Milan Medveď

Zovšeobecnenia Bihariho lemy a ich aplikácie

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 3, 225--232

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/127083`

Matematický časopis 20 (1970), No. 3

ZOVŠEOBECNENIA BIHARIHO LEMY A ICH APLIKÁCIE

MILAN MEDVEĎ, Bratislava

V tomto článku dokážeme dve zovšeobecnenia nasledujúcej lemy.

Bihariho lema. *Nech $Y(x)$, $F(x)$ sú nezáporné, spojité funkcie v intervale $\langle a, b\rangle$ a $k \geqq 0$, $M \geqq 0$ sú konštanty. Nech $\omega(u)$ je nezáporná, neklesajúca, spojitá funkcia pre $u \geqq 0$. Potom z nerovnosti*

$$(1) \qquad Y(x) \leqq k + M \int_a^x F(t)\omega(Y(t))\,\mathrm{d}t \quad (a \leqq x \leqq b)$$

vyplýva nerovnosť

$$(2) \qquad Y(x) \leqq \Omega^{-1}\,(\Omega(k) + M \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t) \quad (a \leqq x < b' \leqq b)$$

(b' je také číslo, že funkcia na pravej strane nerovnosti (2) *je definovaná pre $a \leqq x < b'$), kde*

$$(3) \qquad \Omega(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} \quad (u > 0,\ u \geqq 0)$$

a $\Omega^{-1}(u)$ je inverzná funkcia k funkcii $\Omega(u)$.

Pomocou zovšeobecnení predchádzajúcej lemy nájdeme určité ohraničenie rozdielu riešení diferenciálnych rovníc $y' = f(x, y) + g_1(x)$ a $y' = f(x, y) + g_2(x)$ resp. $z'' = g(x, z, z') + h_1(x)$ a $z'' = g(x, z, z') + h_2(x)$ (V [1] sa vyšetruje prípad $g_1(x) = \varepsilon_1$, $g_2(x) = \varepsilon_2$, kde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sú konštanty) s danými počiatočnými podmienkami, za predpokladu, že funkcia $f(x, y)$ spĺňa „Osgoodovu podmienku"

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq \omega(|y_2 - y_1|)$$

v oblasti $G(x, y)$ resp. funkcia $g(x, u, v)$ spĺňa podmienku

$$|g(x, u_1, v_1) - g(x, u_2, v_2)| \leqq \omega(|u_1 - u_2|) + K|v_1 - v_2|$$

v oblasti $H(x, u, v)$.

I

Lema 1. (a) *Nech* $Y(x)$, $F(x)$ *sú kladné, spojité funkcie v intervale* $\langle a, b\rangle$ *a* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *sú nezáporné, spojité funkcie v* $\langle a, b\rangle$. *Nech* $M \geqq 0$ *je konštanta a* $\omega(u)$, $\Omega(u)$, $\Omega^{-1}(u)$ *majú ten istý význam a vlastnosti ako v predchádzajúcej leme.*

(b) *Nech je splnená nerovnosť*

$$Y(x) \leqq \varphi(x) + M \int_a^x F(t)\omega(Y(t))\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Ak predpoklady (a), (b) *sú splnené, potom platí nerovnosť*

$$Y(x) \leqq \Omega^{-1}(\Omega(\varphi(x)) + M \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t) \quad (a \leqq x < b' \leqq b) \tag{5}$$

(b' *je také číslo, že funkcia na pravej strane nerovnosti* (5) *je definovaná pre* $a \leqq x < b'$.

Dôkaz. Nech $V(x) = \varphi(x) + M \int_a^x F(t)\omega(Y(t))\,\mathrm{d}t$. Pretože $\omega(u)$ je neklesajúca funkcia, platí: $\dfrac{\omega(Y)}{\omega(V)} \leqq 1$. Vynásobením tejto nerovnosti funkciou $M \,.\, F$ a pripočítaním funkcie $\dfrac{\varphi'}{\omega(V)}$ dostávame nerovnosť

$$\frac{\varphi' + M \,.\, F \,.\, \omega(Y)}{\omega(V)} \leqq M \,.\, F + \frac{\varphi'}{\omega(V)}.$$

Pretože $\varphi \leqq V$, $\varphi' \geqq 0$ je $\dfrac{\varphi'}{\omega(\varphi)} \geqq \dfrac{\varphi'}{\omega(V)}$.

Z toho plynie nerovnosť $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\Omega(V(x))] = \dfrac{V'(x)}{\omega(V(x))} \leqq M \,.\, F(x) + \dfrac{\varphi'(x)}{\omega(\varphi(x))} =$

$$= M \,.\, F(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\Omega(\varphi(x))]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\Omega(V(x)) - \Omega(\varphi(x))] \leqq M \,.\, F(x)$$

Integrovaním poslednej nerovnosti dostávame nerovnosť

$$\Omega(V(x)) - \Omega(\varphi(x)) \leqq M \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t,$$

odkiaľ vyplýva nerovnosť (5).

Dôsledok 1. *Ak* $\varphi(x) = k$ *je konštanta, dostávame Bihariho lemu.*

2\. *Ak* $\omega(t) = Kt$ $(K \geqq 0)$, *potom*

$$Y(x) \leqq \varphi(x) \exp \{K \,.\, M \int_a^x F(t)\, dt\}$$

3\. *Ak* $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(K \geqq 0,\ 0 < \alpha < 1)$, *potom*

$$Y(x) \leqq [(\varphi(x))^{1-\alpha} + M \,.\, K(1 - \alpha) \int_a^x F(t)\, dt]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4\. *Nech je splnený predpoklad* (a) *lemy* 1. (*nemusí byť* $\varphi'(x) \geqq 0$). *Nech* $\Psi(x)$ *je kladná, spojitá funkcia v* $\langle a, b\rangle$. *Nech je splnená nerovnosť*

$$Y(x) \leqq \varphi(x) + M\psi(x) \int_a^x F(t)\omega(Y(t))\, dt. \tag{6}$$

Potom ak $\psi(x) \leqq 1$, $W(\psi(x), \varphi(x)) \geqq 0$ $(W(\psi, \varphi) = \psi\varphi' - \varphi\psi')$ *platí nerovnosť*

$$Y(x) \leqq \psi(x)\, \Omega^{-1} \left(\Omega \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) + M \int_a^x F(t)\, dt\right) \tag{7}$$

Nerovnosť (6) možno za daných predpokladov upraviť na tvar

$$\frac{Y(x)}{\psi(x)} \leqq \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + M \int_a^x F(t)\, \omega\left(\frac{Y(t)}{\psi(t)}\right) dt,$$

odkiaľ podľa lemy 1. vyplýva nerovnosť (7).

Teraz pomocou lemy 1. dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta 1. (A) *Nech* $\varphi(x)$ *a* $\psi(x)$ *sú riešenia diferenciálnych rovníc* $y' = f(x, y) + g_1(x)$, *resp.* $y' = f(x, y) + g_2(x)$ *vyhovujúce počiatočným podmienkam* $\varphi(\xi_1) = \eta_1$, $\psi(\xi_2) = \eta_2$, *ktoré existujú v intervale* $\langle a, b\rangle$, *kde* $g_1(x)$, $g_2(x)$ *sú spojité funkcie v* $\langle a, b\rangle$.

(B) *Nech* $f(x, y)$ *je funkcia definovaná a spojitá v oblasti* $G(x, y)$ *a pre ľubovoľné* (x, y_1), $(x, y_2) \in G$ *platí*:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq \omega(|y_2 - y_1|)$$

(C) *Nech* $|f(x, y)| \leqq A$ *v* G, *kde* A *je konštanta,* $|g_1(x)| \leqq B$ *pre* $a \leqq x \leqq b$, B *je konštanta.*

Ak predpoklady (A), (B), (C) *sú splnené, potom platí nerovnosť*

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqq \Omega^{-1}(\Omega(R(x)) + x - \xi_2), \tag{8}$$

kde $R(x) = |\eta_1 - \eta_2| + (A + B)|\xi_1 - \xi_2| + \int\limits_{\xi_2}^{x} |g_1(t) - g_2(t)|\,\mathrm{d}t,\, x \geqq \xi_2$

Dôkaz.

$$\varphi(x) = \eta_1 + \int\limits_{\xi_1}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\xi_1}^{x} g_1(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\psi(x) = \eta_2 + \int\limits_{\xi_2}^{x} f(t, \psi(t))\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\xi_2}^{x} g_2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqq |\eta_1 - \eta_2| + \Big| \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} |f(t, \varphi(t))|\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int\limits_{\xi_2}^{x} |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))|\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} |g_1(t)|\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\xi_2}^{x} |g_1(t) - g_2(t)|\,\mathrm{d}t \Big| \leqq$$

$$\leqq |\eta_1 - \eta_2| + (A + B)\,|\xi_1 - \xi_2| + \int\limits_{\xi_2}^{x} |g_1(t) - g_2(t)|\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\xi_2}^{x} \omega(|\varphi(t) - \psi(t)|)\,\mathrm{d}t =$$

$$= R(x) + \int\limits_{\xi_2}^{x} \omega(|\varphi(t) - \psi(t)|)\,\mathrm{d}t \quad (x \geqq \xi_2).$$

Funkcia $R(x)$ má tie isté vlastnosti ako funkcia $\varphi(x)$ v leme 1., preto podľa lemy 1. je splnená nerovnosť (8).

Poznámka. 1. Ak $(\xi_1, \eta_1) = (\xi_2, \eta_2) = (\xi, \eta)$, potom

$$R(x) = \int\limits_{\xi}^{x} |g_1(t) - g_2(t)|\,\mathrm{d}t. \text{ Ak naviac } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{\varepsilon}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} = \infty \text{ pre } u > 0,$$

potom

$$\lim_{x \to \xi^+} [\Omega^{-1}(\Omega(R(x)) + x - \xi)] = 0.$$

2. Ak $\omega(t) = Kt$ $(K \geqq 0)$, potom

$$|\varphi(x) - \Psi(x)| \leqq \Omega^{-1}(\Omega(R(x)) + K(x - \xi_2)) = R(x) \exp K(x - \xi)$$
$$\text{pre } x \geqq \xi_2.$$

Ako dôsledok vety 1. dostávame nasledujúcu vetu.

Veta 2. *Nech pre funkciu $f(x, y)$ je splnená podmienka* (B) *vety* 1. *Nech $|f(x, y)| \leqq A$ v oblasti $G(x, y)$, funkcia $y(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice $y' = f(x, y)$ spĺňajúca počiatočnú podmienku $y(\xi) = \eta$ a nech existuje postupnosť funkcii $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\varphi_n(\xi) = \eta$, $\varphi_n(x)$ sú spojité pre $a \leqq x \leqq b$, $n = 1, 2, 3, \ldots$*

Nech $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{\varepsilon}^{u}\frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} = \infty$ *pre* $u > 0$. *Potom ak funkcie* $g_n(x) = \varphi_n'(x) - f(x, \varphi_n(x)) \rightrightarrows 0$ *na* $\langle\xi, b)$, *funkcie* $\varphi_n(x) \rightrightarrows y(x)$ *na* $\langle\xi, b')$. $(\xi < b' \leqq b)$.

Dôkaz. Z vety 1. vyplýva nerovnosť

$$|\varphi_n(x) - y(x)| \leqq \Omega^{-1}(\Omega(\int\limits_{\xi}^{x}|g_n(t)|\,\mathrm{d}t) + x - \xi) \quad \text{pre } \xi \leqq x < b' \leqq b.$$

Ak $|g_n(x)| \rightrightarrows 0$, potom $\int\limits_{\xi}^{x}|g_n(t)|\,\mathrm{d}t \rightrightarrows 0$.

$$\Omega\left(\int\limits_{\xi}^{x}|g_n(t)|\,\mathrm{d}t\right) = \int\limits_{u_0}^{\int_{\xi}^{x}|g_n(t)|\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\omega(\tau)} \to -\infty, \text{ ak } |g_n(x)| \rightrightarrows 0 \text{ na} \langle\xi, b').$$

Z vlastností funkcie $\Omega^{-1}(u)$ priamo vyplýva tvrdenie vety.

Príklad. $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 1$. V tomto prípade $\omega(t) = t$. Nech $\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

$$|\varphi_n'(x) - \varphi_n(x)| = \frac{x^n}{n!},\ R(x) = \int\limits_{0}^{x}|\varphi_n'(t) - \varphi_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \geqq 0)$$

$$|\varphi_n(x) - y(x)| \leqq \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^x \leqq \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^b \to 0.$$

Preto $\varphi_n(x) \rightrightarrows y(x)$ na $\langle 0, b\rangle$, kde $b < \infty$.

II

V tejto časti dokážeme druhé zobecnenie Bihariho lemy a najdeme určité ohraničenie rozdielu riešení dvoch nelineárnych diferenciálnych rovníc s danými počiatočnými podmienkami.

Lema 2. (A₁) *Nech* $Y(x)$ *je nezáporná spojitá funkcia v* $\langle a, b\rangle$, $F(x)$, $\varphi(x)$ *sú kladné, spojité funkcie v intervale* $\langle a, b\rangle$, $\varphi''(x)$ *je nezáporná, spojitá funkcia v* $\langle a, b\rangle$ *a* $M \geqq 0$ *je konštanta. Nech* $\omega(u)$, $\Omega(u)$, $\Omega^{-1}(u)$ *majú ten istý význam a vlastnosti ako v časti I.*

(A_2) *Nech je splnená nerovnosť*

$$Y(x) \leqq \varphi(x) + M \int_a^x \left(\int_a^t F(\tau)\omega(Y(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t \quad a \leqq x \leqq b. \tag{9}$$

Ak predpoklady (A_1), (A_2) *sú splnené, potom platí*

$$Y(x) \leqq \Omega^{-1} \left\{ \Omega(\varphi(x)) + M \int_a^x \left(\int_a^t F(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t + \int_a^x \left(\int_a^t \frac{\mathrm{d}\omega(\varphi)}{\mathrm{d}\tau} \cdot \left[\frac{\mathrm{d}\Omega(\varphi(\tau))}{\mathrm{d}\tau} \right]^2 \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t \right\}$$

pre $a \leqq x < b' \leqq b$. (10)

(b' *je také číslo, že funkcia na pravej strane nerovnosti* (10) *je definovaná pre* $a \leqq x < b'$).

Dôkaz. Nech $V(x) = \varphi(x) + M \int_a^x \left(\int_a^t F(\tau)\omega(Y(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t$

Podobným postupom ako v dôkaze lemy 1. možno dokázať nerovnosť

$$\frac{V''}{\omega(V)} \leqq MF + \frac{\varphi''}{\omega(\varphi)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Omega(V)}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{V'}{\omega(V)} \right)' = \frac{V''}{\omega(V)} - \frac{\frac{\mathrm{d}\omega(V)}{\mathrm{d}V} \cdot (V')^2}{\omega^2(V)} \leqq \frac{V''}{\omega(V)}$$

$$\frac{\varphi''}{\omega(\varphi)} = \left(\frac{\varphi'}{\omega(\varphi)} \right)' + \frac{\mathrm{d}\omega(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \left[\frac{\varphi'}{\omega(\varphi)} \right]^2 = \frac{\mathrm{d}^2\Omega(\varphi)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}\omega(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \left[\frac{\mathrm{d}\Omega(\varphi)}{\mathrm{d}x} \right]^2$$

Z týchto nerovností vyplýva nerovnosť

$$\frac{\mathrm{d}^2\Omega(V(x))}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^2\Omega(\varphi(x))}{\mathrm{d}x^2} \leqq MF(x) + \frac{\mathrm{d}\omega(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \left[\frac{\mathrm{d}\Omega(\varphi)}{\mathrm{d}x} \right]^2$$

Dvojnásobnýni integrovaním a jednoduchou úpravou dostávame nerovnosť (10).

Dôsledok 1. *Ak* $\varphi(x) = k$ *je konštanta, potom platí*

$$Y(x) \leqq \Omega^{-1}(\Omega(k) + M \int_a^x \left(\int_a^t F(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t)$$

Táto nerovnosť má podobný tvar ako Bihariho nerovnosť.

2. *Ak* $\omega(t) = Kt$ *a potom platí*

$$Y(x) \leqq \varphi(x) \exp \left\{ MK \int_a^x \left(\int_a^t F(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \int_a^x \int_a^t \left[\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} \right]^2 \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}t \right\}\right.$$

Ak naviac $\varphi(x) = k$ *je konštanta, potom*

$$Y(x) \leqq k \exp \{MK \int_a^x (\int_a^t F(\tau)\, \mathrm{d}\tau)\, \mathrm{d}t\}$$

Teraz dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta 3. *Nech funkcia* $g(x, u, v)$ *je definovaná a spojitá v oblasti* $H(x, u, v) : a \leqq \leqq x \leqq b,\ \alpha \leqq u \leqq \beta,\ \gamma \leqq v \leqq \delta$. *Nech pre ľubovoľné* $(x, u_1, v_1), (x, u_2, v_2) \in H$ *platí*

$$|g(x, u_1, v_1) - g(x, u_2, v_2)| \leqq \omega(|u_1 - u_2|) + K|v_1 - v_2|,$$

kde $\omega(u)$ *je definovaná, spojitá a neklesajúca funkcia v intervale* $\langle \alpha, \beta \rangle$. *Nech existujú riešenia* $\varphi(x)$ *a* $\psi(x)$ *diferenciálnych rovníc* $y'' = g(x, y, y') + h_1(x)$ *resp.* $y'' = g(x, y, y') + h_2(x)$, *kde* $h_1(x)$, $h_2(x)$ *sú definované a spojité funkcie v intervale* $\langle a, b \rangle$. *Nech* $\varphi(x_0) = \varphi_0$, $\psi(x_0) = \psi_0$, $\varphi'(x_0) = \varphi_0'$, $\psi'(x_0) = \psi_0'$. *Potom platí nerovnosť*

$$(11)\quad |\varphi(x) - \psi(x)| \leqq \Omega^{-1} \left\{ \Omega(G(x)) + \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{K(b'-x_0)} (x - x_0)^2 + \int_a^x \int_a^t \frac{\mathrm{d}\omega(G)}{\mathrm{d}G} \right.$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}\Omega(G(\tau))}{\mathrm{d}\tau} \right] \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}t,$$

$$kde\ G(x) = |\varphi_0 - \psi_0| + \frac{1}{K} |\varphi_0' - \psi_0'|\, (\mathrm{e}^{K(x-x_0)} - 1) +$$

$$+ \int_{x_0}^x \mathrm{e}^{K(t-x_0)} \int_{x_0}^t |h_1(\tau) - h_2(\tau)|\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}t$$

pre $a \leqq x < b' \leqq b$. (b' *je také číslo, že pravá strana nerovnosti* (11) *je definovaná pre* $a \leqq x < b'$).

Dôkaz. $|\varphi'(x) - \psi'(x)| \leqq |\varphi_0' - \psi_0'| + \int_{x_0}^x |h_1(t) - h_2(t)|\, \mathrm{d}t + \int_{x_0}^x \omega(|\varphi(t) -$

$$- \psi(t)|)\, \mathrm{d}t + K \int_{x_0}^x |\varphi'(t) - \psi'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Podľa dôsledku 2. lemy 1. platí nerovnosť

$$|\varphi'(x) - \psi'(x)| \leqq \{|\varphi_0' - \psi_0'| + \int_{x_0}^{x} |h_1(t) - h_2(t)|\,\mathrm{d}t\} e^{K(x-x_0)} + e^{K(b'-x_0)} \int_{x_0}^{x} \omega(|\varphi - \psi|)\,\mathrm{d}t$$

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqq |\varphi_0 - \psi_0| + (e^{K(x-x_0)} - 1)\frac{1}{K}|\varphi_0' - \psi_0'| +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} e^{K(t-x_0)} \int_{x_0}^{t} |h_1(\tau) - h_2(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t + e^{K(b'-x_0)} \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{t} \omega(|\varphi - \psi|)\,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t$$

Po použití lemy 2. na poslednú nerovnosť dostávame nerovnosť (11).

Poznámka 1. Na základe predchádzajúcej vety sa dá dokázať analogická veta k vete 2. z časti I. pre diferenciálne rovnice druhého rádu.

Poznámka 2. Metóda dôkazu lemy 1. z časti I. je analogická Bihariho metóde dôkazu pôvodnej lemy.

LITERATÚRA

[1] Bihari I., *A generalization of a lemma of Bellman and its applications ot uniqueness problems of differential equations, Acta Math. Hung.* 7 (1956), 81-94.

Došlo 12. 8. 1968

Matematický ústav
Slovenskej akadémie vied
Bratislava

GENERALIZATIONS OF THE BIHARI LEMMA AND THEIR APPLICATIONS

Milan Medveď

Summary

In this paper the Bihari inequality is generalized and some applications are given to an upper estimate of the difference of solutions of the differential equations $y' = f(x, y) + g_1(x)$, and $y' = f(x, y) + g_2(x)$, or $z'' = g(x, z, z') + h_1(x)$ resp., and $z'' = g(x, z, z') + h_2(x)$.