Beloslav Riečan

О непрерывном продолжении монотонных функционалов некаторого типа

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 15 (1965), No. 2, 116--125

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127113

О НЕПРЕРЫВНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НЕКОТОРОГО ТИПА

БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН (BELOSLAV RIEČAN), Братислава

В теории меры и в теории интегрирования часто встречаются аналогичные теоремы, построения и методы доказательств. В настоящей статье мы будем изучать с общей точки зрения проблему, важную в обеих теориях: проблему о продолжении соответственно меры и интеграла. Мы укажем на аналогию между построением меры и построением интеграла и на роль, которую при этом играет частичное упорядочение.

Главным результатом работы является теорема 3,4 о продолжении функционала, определенного на подструктуре некоторой структуры S. Из этой теоремы непосредственно вытекают теорема о продолжении меры и теорема о продолжении интеграла.

Заметим еще, что аналогичные результаты содержатся и в работах других авторов. Взаимоотношению этих работ и наших результатов посвящен §5.

§1. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

В произвольной структуре S через $x \cup y$ (соответственно, через $x \cap y$) мы будем обозначать наименьшее верхнее (соответственно, наибольшее нижнее) ограничение элементов x, y. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов из S. Если существует наименьшее верхнее (соответственно, наибольшее нижнее) ограничение последовательности $\{x_n\}$, то обозначим его через $\bigcup x_n$ (соответственно, через $\bigcap x_n$). Наконец, мы будем писать $x_n \nearrow x$ (соответственно, $x_n \searrow x$), если $x_n \leqq x_{n+1}$ (соответственно, $x_n \geqq x_{n+1}$) и выполняется $x = \bigcup x_n$ (соответственно, $x = \bigcap x_n$).

Вплоть до §4 мы будем предполагать выполнение следующих условий:

1. S — относительно σ-монотонная структура, т. е. произвольная

ограниченная монотонная последовательность элементов из S имеет соответственно наибольшее нижнее или наименьшее верхнее ограничение.

2. Если $x_n \nearrow x$, $y_n \nearrow y$, $x_n, y_n, x, y \in S$, то $x_n \cap y_n \nearrow x \cap y$. Если $x_n \searrow x$, $y_n \searrow y$, $x_n, y_n, x, y \in S$, то $x_n \cup y_n \searrow x \cup y$.

На структуре S определены бинарные операции $+$, $-$, для которых выполняется:

3. $x + y = y + x$ для всех $x, y \in S$.

4. Если $x, y, z \in S$ и $x \leqq y$, то $x + z \leqq y + z$, $x - z \leqq y - z$, $z - x \geqq z - y$.

5. Если $x_n, y_n, x, y \in S$, $x_n \nearrow x$, $y_n \nearrow y$ (соответственно, $x_n \searrow x$, $y_n \searrow y$), то $x_n + y_n \nearrow x + y$ (соответственно, $x_n + y_n \searrow x + y$).

6. Если $x_n, x, y \in S$, $x_n \nearrow x$, то $x_n - y \nearrow x - y$.

7. Если $x_n, x, y \in S$, $x_n \nearrow x$, то $y - x_n \searrow y - x$.

8. Если $x_n, x, y \in S$, $x_n \searrow x$, то $x_n - y \searrow x - y$.

9. Если $x_n, x, y \in S$, $x_n \searrow x$, то $y - x_n \nearrow y - x$.

10. Существует элемент $0 \in S$ такой, что $x - x = 0$ для всех $x \in S$.

11. Если $x, y \in S$, $x \leqq y$, то $y = x + (y - x)$.

Пусть теперь A — подструктура структуры S, замкнутая относительно операций $+$, $-$. Пусть для произвольного элемента $a \in S$ существуют элементы $b, c \in A$ такие, что $b \leqq a \leqq c$. Пусть J_0 — конечная действительная функция на A, удовлетворяющая следующим условиям:

(I) $x \leqq y \Rightarrow J_0(x) \leqq J_0(y)$.

(II) $J_0(x) + J_0(y) = J_0(x \cup y) + J_0(x \cap y)$ для всех $x, y \in A$.

(III) $x \leqq y \Rightarrow J_0(y) = J_0(x) + J_0(y - x)$.

(IV) $J_0(x + y) \leqq J_0(x) + J_0(y)$ для произвольных $x, y \in A$.

(V) Если $x_n \searrow 0$, то $\lim J_0(x_n) = 0$.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы (теорема 3,4):

Существует σ-монотонная подструктура N структуры S такая, что $N \supset A$ и существует продолжение функции J_0 на N (обозначим его через J) такое, что J удовлетворяет на N условиям (I), (II) и следующему условию:

(VI) Если $x_n \nearrow x$ ($x_n \searrow x$) и $x_n \in N$, то $x \in N$ и имеет место равенство $J(x) = \lim J(x_n)$.

§2. ПОСТРОЕНИЕ

Определение 2.1. *Через B (соответственно, через C) мы будем обозначать множество всех элементов $b \in S$, для которых существует последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in A$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что $a_n \nearrow b$ (соответственно, $a_n \searrow b$).*

Лемма 2.1. *Пусть $b_n \nearrow b$, $b_n \in B$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда существует* *последовательность* $\{c_n\}$, $c_n \nearrow b$, $c_n \leqq b_n$, $c_n \in A$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Отсюда вытекает, что* $b \in B$.

Доказательство. Согласно определению множества B, для произвольного натурального числа n существует последовательность $\{a_m^n\}$ такая, что $a_m^n \in A$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $a_m^n \nearrow b_n$ $(m \to \infty)$. Положим $c_n = \bigcup_{m=1}^{n} a_n^m$. Очевидно, $c_n \in A$, $c_n \leqq c_{n+1}$, $c_n \leqq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a_n^m \leqq c_n$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Отсюда получаем неравенства

$$b = \bigcup a_m^n \leqq \bigcup c_n \leqq \bigcup b_n = b,$$

значит, $b = \bigcup c_n$.

Лемма 2.2. *Пусть* $c_n \in C$, $c_n \searrow c$. *Тогда* $c \in C$.

Доказательство двойственно доказательству леммы 2.1.

Лемма 2.3. B, C *являются подструктурами структуры* S, *замкнутыми относительно операции* $+$.

Введем теперь на B функцию J_1:

Определение 2.2. *Для* $b \in B$ *полагаем*

$$J_1(b) = \lim J_0(a_n),$$

где $\{a_n\}$ — *произвольная последовательность элементов из* A *такая, что* $a_n \nearrow b$.

Нужно доказать, что $J_1(b)$ не зависит от выбора последовательности $\{a_n\}$. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.4. *Пусть* $c_n \nearrow c$, $d_n \nearrow d$, $c \leqq d$, c_n, $d_n \in A$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *Тогда* $\lim J_0(c_n) \leqq \lim J_0(d_n)$.

Доказательство. Пусть m фиксировано. Согласно условию 2 имеет место $c_m \cap d_n \nearrow c_m \cap d = c_m$ $(n \to \infty)$. Из свойств 7 и 10 вытекает, что имеет место $c_m - c_m \cap d_n \searrow c_m - c_m = 0$. Отсюда, а также из свойства (V) вытекает

$$\lim_n J_0(c_m - c_m \cap d_n) = 0,$$

для каждого m. Используя последнее равенство, (I) и (III), получаем

$$J_0(c_m) = \lim_n J_0(c_m) = \lim J_0(c_m - c_m \cap d_n) +$$
$$+ \lim_n J_0(c_m \cap d_n) \leqq 0 + \lim_n J_0(d_n) = \lim_n J_0(d_n).$$

Из последнего неравенства легко получается утверждение леммы.

Докажем некоторые простые свойства функции J_1.

Лемма 2.5. *J_1 — конечная действительная функция на B, являющаяся продолжением функции J_0, т. е. $A \subset B$ и $J_0(a) = J_1(a)$ для $a \in A$. Если $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \leqq b_2$, то $J_1(b_1) \leqq J_1(b_2)$.*

Доказательство вытекает из леммы 2.4 и определения J_1.

Лемма 2.6. *Пусть $b_n \in B$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $b_n \nearrow b$. Тогда*

$$J_1(b) = \lim J_1(b_n).$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1 существует последовательность $\{c_n\}$ такая, что $c_n \nearrow b$, $c_n \in A$, $c_n \leqq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Согласно определению 2,2 и лемме 2,5 имеем

$$J_1(b) = \lim J_0(c_n) \leqq \lim J_1(b_n) \leqq J_1(b).$$

Лемма 2.7. *Для произвольных $a, b \in B$ справедливо*

$$J_1(a) + J_1(b) = J_1(a \cup b) + J_1(a \cap b)$$

$$J_1(a + b) \leqq J_1(a) + J_1(b).$$

Доказательство. Пусть $a_n \nearrow a$, $b_n \nearrow b$, $a_n, b_n \in A$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Согласно условиям 2 и 5 и на основании известных свойств структуры имеет место $a_n \cup b_n \nearrow a \cup b$, $a_n \cap b_n \nearrow a \cap b$, $a_n + b_n \nearrow a + b$. Согласно лемме 2,3 и определению 2,2 $a \cup b$, $a \cap b$, $a + b \in B$ и выполняется

$$J_1(a) + J_1(b) = \lim [J_0(a_n) + J_0(b_n)] =$$
$$= \lim [J_0(a_n \cup b_n) + J_0(a_n \cap b_n)] = J_1(a \cup b) + J_1(a \cap b).$$

Аналогично

$$J_1(a + b) = \lim J_0(a_n + b_n) \leqq \lim [J_0(a_n) + J_0(b_n)] = J_1(a) + J_1(b).$$

Продолжим теперь J_0 на все элементы из S.

Определение 2.3. *Для $d \in S$ определяем*

$$J(d) = \inf \{J_1(b) : d \leqq b \in B\}.$$

Определение 2.4. *Будем говорить, что множество $K \subset S$ монотонно, если оно содержит пределы всех ограниченных, монотонных последовательностей элементов из K.*

Обозначение. Через N мы будем обозначать наименьшее монотонное множество над A. Это означает, что N монотонно, $N \supset A$, и если M — произвольное монотонное множество такое, что $M \supset A$, то $M \supset N$. Множество N является пересечением системы всех монотонных надмножеств множества A.

Заметим, что множество N и функция J, рассматриваемая на N, представляют собой требуемые продолжения функции J_0. Доказательству свойств N и J будет посвящен весь следующий параграф. Но следующие леммы все же своим характером принадлежат скорее настоящему параграфу. Первую из них приведем без доказательства.

Лемма 2.8. *Функция J конечна на S. Для $b \in B$ выполняется $J(b) = J_1(b)$. Если $a \leqq b$, a, $b \in S$, то $J(a) \leqq J(b)$.*

Лемма 2.9. *Для произвольных a, $b \in S$ выполняется неравенство*

$$J(a + b) \leqq J(a) + J(b).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем $a_1, b_1 \in B$ так, чтобы $a \leqq a_1$, $b \leqq b_1$ и $J(a) + \varepsilon/2 > J_1(a_1)$, $J(b) + \varepsilon/2 >$
$> J_1(b_1)$.
Сложением обоих неравенств получаем

$$J(a) + J(b) + \varepsilon > J_1(a_1) + J_1(b_1) \geqq J_1(a_1 + b_1) \geqq J(a + b).$$

Лемма 2.10. *Если $a \leqq b$, a, $b \in S$, то $J(a) + J(b - a) \geqq J(b)$.*

Доказательство. Согласно свойству 11 имеем $b = a + (b - a)$. Отсюда и из леммы 2.9 вытекает утверждение леммы.

Лемма 2.11. *Для произвольного элемента $a \in C$ существует последовательность $\{b_n\}$ элементов из B такая, что $b_n \searrow a$ и $\lim J_1(b_n) = J(a)$.*

Доказательство. Возьмем последовательность $\{a_n\}$, $a_n \searrow a$, $a_n \in A$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Из свойств нижней грани и из леммы 2.3 вытекает существование невозрастающей последовательности $\{c_n\}$ такой, что $c_n \geqq a$, $c_n \in B$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\lim J_1(c_n) = J(a)$. Положим $b_n = a_n \cap c_n$. Очевидно, $b_n \in B$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $b_n \searrow a$. Кроме того,

$$J(a) \leqq \lim J_1(b_n) \leqq \lim J_1(c_n) = J(a).$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Главный результат настоящего параграфа сформулирован в теореме 3.4. Первый из важных результатов — теорема Беппо Леви. Она справедлива на всем S.

Теорема 3.1. *Пусть $\{d_n\}$ — произвольная последовательность, $d_n \nearrow d$, причем d_n, $d \in S$. Тогда $J(d) = \lim J(d_n)$.*

Доказательство теоремы Беппо Леви будет основываться на вспомогательном утверждении, которое мы сформулируем отдельно.

Лемма 3.1. *Пусть $d_1 \leqq d_2 \leqq \ldots \leqq d_{n-1} \leqq d_n$ — произвольные элементы из S. Пусть $b_i \geqq d_i$, $b_i \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и пусть*

$$J(d_i) + \varepsilon/2^{i+1} > J_1(b_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

где ε — некоторое положительное число.

Тогда

$$J(d_n) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon/2^{i+1} > J_1 (\bigcup_{i=1}^{n} b_i).$$

Доказательство проведем по индукции. Первый индукционный шаг очевиден. Пусть для некоторого натурального числа k выполняется

$$J(d_k) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon/2^{i+1} > J_1(\bigcup_{i=1}^{k} b_i).$$

Если используем лемму 2,7 и неравенства $b_i \geqq d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то получим

$$J_1(\bigcup_{i=1}^{k+1} b_i) = J_1(\bigcup_{i=1}^{k} b_i \cup b_{k+1}) = J_1(\bigcup_{i=1}^{k} b_i) + J_1(b_{k+1}) -$$

$$- J_1[(\bigcup_{i=1}^{k} b_i) \cap b_{k+1}] < J(d_k) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon/2^{i+1} + J(d_{k+1}) +$$

$$+ \varepsilon/2^{k+2} - J[(\bigcup_{i=1}^{k} d_i) \cap d_{k+1}] = J(d_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon/2^{i+1}.$$

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем $b_i \in B$ так, чтобы $b_i \geqq d_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и

$$J(d_i) + \varepsilon/2^{i+1} > J_1(b_i).$$

Положим $k_n = \bigcup_{i=1}^{n} b_i$. Очевидно, $k_n \geqq d_n$, $k_n \in B$, $k_n \leqq k_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим $k = \bigcup k_n$.(1) Очевидно, $k_n \nearrow k$. Согласно лемме 3.1 имеет место

$$J(d_n) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon/2^{i+1} > J_1(k_n).$$

Из последнего неравенства и леммы 2.6 вытекает неравенство

$$J(d) \leqq J_1(k) = \lim J_1(k_n) \leqq \lim J(d_n) + \varepsilon.$$

Так как последнее неравенство справедливо для всякого $\varepsilon > 0$, то справедливо также неравенство $J(d) \leqq \lim J(d_n)$. Обратное неравенство вытекает из монотонности функции J (лемма 2.8).

Теорема 3.2. *Пусть $a \leqq b$, $a \in C$, $b \in S$. Тогда*

$$J(b - a) + J(a) = J(b). \tag{1}$$

(1) Возьмем $a \in A$ так, чтобы $a \geqq d$. Очевидно, последовательность $\{b_i\}$ можно выбрать так, чтобы $b_i \leqq a$. Отсюда и из условия 1 вытекает, что $\bigcup k_n$ существует.

Доказательство. В лемме 2.10 мы доказали справедливость неравенства

(2) $$J(b-a)+J(a)\geqq J(b).$$

Равенство (1) мы докажем в несколько шагов.

1. $b\in B$, $a\in A$.

Построим последовательность $\{b_n\}$, $b_n\in A$ $(n=1,2,\ldots)$ так, чтобы $a\leqq b_n\nearrow b$. Согласно условию 6 имеем $b_n-a\nearrow b-a$. Из теоремы 3.1 вытекает

$$J(b-a)=\lim J_0(b_n-a)=\lim J_0(b_n)-J_0(a)=J_1(b)-J_0(a).$$

2. $b\in B$, $a\in B$.

Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное число. Возьмем $a_1\in A$ так, чтобы $a_1\geqq$ $\leqq a\leqq b$ и $J_0(a_1)+\varepsilon>J_1(a)$. Согласно условию 4 имеет место

$$J(b-a)\leqq J(b-a_1)=J_1(b)-J(a_1)<J_1(b)-J_1(a)+\varepsilon$$

для всякого $\varepsilon>0$. Отсюда и из (2) следует (1).

3. $b\in B$, $a\in C$.

Согласно лемме 2.11 существует последовательность $\{a_n\}$, $a_n\in B(n=$ $=1,2,\ldots)$, $a_n\searrow a$, $\lim J_1(a_n)=J(a)$. Выберем a_n так, чтобы $b\geqq a_n$ $(\geqq a)$. В таком случае имеет место $b-a_n\nearrow b-a$. Значит, согласно теорема 3.1 имеем

$$J(b-a)=\lim J(b-a_n)=J_1(b)-\lim J_1(a_n)=J_1(b)-J(a).$$

4. $b\in S$, $a\in C$.

Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное число. Выберем $b_1\in B$ так, чтобы $b_1\geqq$ $\geqq b\geqq a$, $J(b)+\varepsilon>J(b_1)$. Тогда справедливо

$$J(b-a)\leqq J(b_1-a)=J_1(b_1)-J(a)<J(b)-J(a)+\varepsilon$$

для всякого $\varepsilon>0$. Отсюда и из (2) следует (1).

Теорема 3.3. *Пусть $\{c_n\}$ — невозрастающая последовательность элементов из C, $c_n\searrow c$. Тогда*

$$J(c)=\lim J(c_n).$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2, $c\in C$. Очевидно, $c_1-c_n\nearrow$ $\nearrow c_1-c$. Значит, согласно теореме 3.1 и теореме 3.2 справедливо

$$J(c_1)-J(c)=J(c_1-c)=\lim[J(c_1)-J(c_n)]=J(c_1)-\lim J(c_n).$$

Теорема 3.4. *Пусть N — наименьшее монотонное множество над A, J — продолжение функции J_0, определенное в определении 2.3. Тогда N является σ-монотонной подструктурой структуры S; J обладает свойствами* (I), (II) *и следующим свойством:*

(VI) *Если $x_n \nearrow x$, или $x_n \searrow x$ и $x_n \in N$, то $x \in N$ и справедливо* $J(x) = \lim J(x_n)$.

Доказательство. Для доказательства используем один результат из работы [1]. В ней приводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы функцию J_0 можно было продолжить до т. наз. полного интеграла. Это следующее условие:

(P) *Если $y_n, z_n \in A$, $y_n \nearrow y \in S$, $z_n \searrow z \in S$, причем $z \leqq y$, то* $\inf J_0(z_n) \leqq \sup J_0(y_n)$.

Указанное условие (P) в нашем случае выполнено. В самом деле, согласно теореме 3.1 и теореме 3.3 имеет место

$$\inf J_0(z_n) = \lim J_0(z_n) = J(z) \leqq J(y) = \lim J_0(y_n) = \sup J_0(y_n).$$

Из утверждения (P) и теоремы 5 работы [1] вытекает существование множества $L \supset A$ и функции I, удовлетворяющей на L свойствам (I), (II), (VI). Из той же теоремы вытекает (в наших обозначениях), что $I(x) = J(x)$ для всех $x \in L$. Множество L при этом монотонно, так как J — конечная функция; значит, $L \supset N$.

Примечание 1. Пусть F — произвольная функция на N, удовлетворяющая на N свойству (VI) и совпадающая с J на A. Тогда $J(x) = F(x)$ для всех $x \in N$. В самом деле, пусть P — множество тех $x \in S$, для которых $J(x) = F(x)$. Так как J, F удовлетворяют свойству (VI), то множество P монотонно. Значит, ввиду $P \supset A$ справедливо $P \supset N$.

Примечание 2. Функция J удовлетворяет на N, собственно говоря, всем условиям (I)—(V). Очевидно, свойство (V) вытекает из (VI), свойство (IV) — из леммы 2.9. Одно только свойство (III) требует более подробного доказательсва. Мы не будем его проводить, так как не будем в дальнейшем использовать это свойство.

§4. МЕРА И ИНТЕГРАЛ

В настоящем параграфе мы будем рассматривать два частных выбора S. При первом выборе мы из теоремы 3.4 получим теорему о продолжении меры, при втором — теорему о продолжении интеграла.(2)

1. Пусть S — система всех подмножеств некоторого множества X.

(2) См. также [1], Добавление.

Для $A, B \in S$ мы будем писать $A \leqq B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$; $A + B = A \cup B = \{x : x \in A \ \ \text{или} \ \ x \in B\}$, $A - B = \{x : x \in A, \ \ x \notin B\}$.

Применением теоремы 3.4 мы получим теорему о продолжении меры: *Пусть A — алгебра подмножеств X, J_0 — конечная мера на A. Тогда на наименьшей σ-алгебре N над алгеброй A существует одна и только одна мера J, являющаяся продолжением J_0.*

Заметим, что функция J, рассматриваемая на наименьшем наследственном σ-кольце H над алгеброй A, совпадает с внешней мерой J_0^* индуцированной мерой J_0.

2. Пусть S — система всех ограниченных дейтсвительных функций, определенных на некотором множестве X. Отношение $\leqq$ и операции $+$, $-$ будут иметь обычный смысл, т. е. для f, $g \in S$ будет $f \leqq g$ тогда и только тогда, когда $f(x) \leqq g(x)$ для всех $x \in X$; $f + g(x) = f(x) + g(x)$, $f - g(x) = f(x) - g(x)$.

При таком выборе структуры S мы из теоремы 3,4 получим некоторый вариант теоремы о продолжении интеграла Даниэля. Заметим, что построение интеграла, как мы его сделали в §2, довольно принято (см., например, [5]). Из примечания 1 вытекает также следующее утверждение:

Пусть m — конечная мера, определенная на алгебре T подмножеств пространства X. Обозначим через A систему всех простых интегрируемых функций на X, т. е. функций вида $f = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$, где $E_i \in T$, E_i — взаимно непересекающиеся и χ_{E_i} — характеристическая функция множества E_i. Если для $f \in A$ положить $J_0(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i m(E_i)$, то для всех ограниченных бэровских функций на X справедливо

$$J(f) = \int f \, \mathrm{dm}.$$

§5. ПРИМЕЧАНИЯ

Аналогичные обобщения теоремы о продолжении меры и теоремы о продолжении интеграла можно найти и у других авторов.

В книге [3] доказана теорема (гл. IX, теорема 4.21 о продолжении положительной операции на замыкание ее области), из которой простым образом выведены теорема о продолжении интеграла и теорема о продолжении меры. Правда, из указанной теоремы не вытекает теорема о продолжении меры непосредственно, как это происходит у нас. В [3] для заданного пространства меры сначала строится некоторое линейное пространство и продолжается функционал, заданный на его подпространстве. (Аналогичный способ применяется в работе [4].)

Принятому в настоящей статье пониманию значительно ближе работа [1]. Более того, в [1] не предполагается существование операций $+$, $-$. Не предполагается также, что A мажоризирует S (т. е. что для произвольного $a \in S$ существуют b, $c \in A$ такие, что $b \leqq a \leqq c$). В работе [1] вместо условий (I)—(V) предполагается (I), (II) и условие (P): y_n, $z_n \in A$, $y_n \nearrow y$, $z_n \searrow z$, y, $z \in S$, $z \leqq y \Rightarrow \inf J_0(z_n) \leqq \sup J_0(y_n)$. Это свойство в конкретном случае меры или интеграла нужно отдельно доказывать. В настоящей работе условие (P) доказано в общем виде, в силу чего теоремы о продолжении меры и интеграла вытекают непосредственно из теоремы 3.4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alfsen E. M., *Order Theoretic Foundations of Integration*, Math. Ann. *149* (1963), 419—461.

[2] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950.

[3] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах*, Москва 1950.

[4] Kluvánek I., *Abstraktný integrál ako kladná funkcionála a veta o rozšírení miery*, Mat.-fyz. časopis *6* (1956), 3—9.

[5] Loomis L. H., *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, New York 1953.

Поступило 31. 1. 1964.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

ON THE CONTINUOUS EXTENSION OF MONOTONE FUNCTIONALS OF A CERTAIN TYPE

Beloslav Riečan

Summary

Let S be a lattice that satisfies the conditions 1 and 2 from § 1. Let $+$ and $-$ be binary operations defined on S and satisfying the conditions 3—11. Let A be any sublattice of S closed under the operations $+$, $-$. It will be supposed that for each $a \in S$ there exist $b, c \in A$ such that $b \leqq a \leqq c$. Let J_0 be any finite real-valued function on A which satisfies the conditions (I)—(V).

The following theorem is proved (theorem 3,4):

Let N be the smallest σ-complet sublattice over A. Then there exists an extension on N of the function J_0 (denoted by J) which satisfies the conditions (I), (II) and (VI).

The theorem on the extension of the measure and the theorem on the extension of the integral are immediate corollaries of this theorem.