Czechoslovak Mathematical Journal

Chafiq Benhida

# Propriétés spectrales des restrictions d'opérateurs de la classe $A$

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 49 (1999), No. 1, 13–20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127462

Czechoslovak Mathematical Journal, 49 (124) (1999), 13–20

# PROPRIÉTÉS SPECTRALES DES RESTRICTIONS D'OPÉRATEURS DE LA CLASSE $\mathbb{A}$

Chafiq Benhida, Lille

(Reçu le 5 septembre 1995)

*Abstract.* We discuss here the question whether there exists an invariant subspace $\mathscr{M}$ for a contraction $T$ in the class $\mathbb{A}$ such that the spectrum of the restriction of $T$ on $\mathscr{M}$ is the whole closed unit disc.

## 1. Introduction

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie. $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ désigne l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur $\mathscr{H}$ et $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathscr{H})$ l'ensemble des contractions dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ absolument continues telles que le calcul fonctionnel de Nagy-Foias est isométrique [7].

On connait diverses propriétés et caractérisations des sous classes $\mathbb{A}_{\aleph_0}$ et $\mathbb{A}_{1,\aleph_0}$ (définitions rappelées ci-dessous) de la classe $\mathbb{A}$ grâce aux ensembles $\mathscr{X}_\theta(\mathscr{A}_T)$ et $\mathscr{E}_\theta^{\mathrm{r}}(\mathscr{A}_T)$ ([2], [5] et [6]), ce qui donne également des informations sur le treillis des sous espaces invariants (s. e. i.) par $T$.

Outre la richesse de ce treillis, exprimée notamment par la réflexivité de tout opérateur de la classe $\mathbb{A}$ (cf. [3]), on obtient également l'existence des s. e. i. de type particulier à savoir les s. e. i. analytiques.

Ceci montre en l'occurence l'existence (pour $T$ dans l'une de ces sous-classes) de sous espaces invariants $\mathscr{M}$ tels que $\sigma(T/\mathscr{M}) = \overline{\mathbb{D}}$, suggérant naturellement la question générale suivante:

Si $T \in \mathbb{A}$, existe — il un s. e. i. $\mathscr{M}$ pour $T$ tel que: $\sigma(T/\mathscr{M}) = \overline{\mathbb{D}}$?

Le but de cette note est de fournir une réponse partielle via un procédé de »remplissage« des trous du spectre et du spectre essentiel d'un opérateur dans la classe $\mathbb{A}$, ce procédé s'appuie sur les techniques du résultat $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1$ établi par Bercovici et par Chevreau respectivement dans [1] et [4].

Nous complétons ces réponses partielles par quelques remarques et suggestions de direction quant à leur amélioration.

On désignera par $\mathbb{D}$ le disque unité, par $\mathbb{T}$ le cercle unité, par $\sigma(T)$ et $\sigma_e(T)$ le spectre et le spectre essentiel d'un opérateur $T$.

Rappelons qu'un trou d'un compact $K \subset \mathbb{C}$ est une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$.

Nous terminons cette introduction en rappelant quelques éléments de terminologie concernant les algèbres duales nécessaires pour la suite.

On sait que $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ s'identifie au dual de $\mathscr{C}^1(\mathscr{H})$, (l'espace de Banach des opérateurs à trace finie) par le biais de la dualité donnée par:

$$\langle T, L\rangle = \operatorname{tr}(TL) \quad \text{pour } T \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \text{ et } L \in \mathscr{C}^1(\mathscr{H}).$$

Si $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $\mathscr{A}_T$ est la sous algèbre unitaire faible $*$ fermée de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ engendrée par $T$ qui s'identifie au dual de l'espace de Banach quotient $Q_T = \left(\mathscr{C}^1(\mathscr{H}) \,/\, {}^{\perp}\mathscr{A}_T\right)$ où ${}^{\perp}\mathscr{A}_T$ est le préannulateur de $\mathscr{A}_T$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. L'élément générique de $Q_T$ est noté $[L]$.

A tout $(x,y) \in \mathscr{H}^2$ est associé $x \otimes y$ l'opérateur de rang au plus égal à 1 défini par:

$$x \otimes y(u) = \langle u, y\rangle\, x \text{ pour tout } u \in \mathscr{H}, \text{ et nous avons } \operatorname{tr}(x \otimes y) = \langle x, y\rangle.$$

On dit que $\mathscr{A}_T$ a la propriété $(\mathbb{A}_{m,n})$, $1 \leqslant m \leqslant \aleph_0$, $1 \leqslant n \leqslant \aleph_0$, si pour tout $\left([L_{ij}]\right)_{\substack{0 \leqslant i < m \\ 0 \leqslant j < n}}$ dans $Q_T$, il existe $(x_i)_{0 \leqslant i < m}$ et $(y_j)_{0 \leqslant j < n}$ dans $\mathscr{H}$ tels que:

$$[L_{ij}] = [x_i \otimes y_j].$$

Si $T$ est une contraction absolument continue, le calcul fonctionnel $\Phi_T$ de Sz. Nagy & Foias [7] est un homomorphisme faible $*$ continu de $H^\infty$ dans l'algèbre $\Phi_T(H^\infty) \subset \mathscr{A}_T$ vérifiant:

$$\left\|f(T)\right\| \leqslant \left\|f\right\|_\infty \quad \text{où } f(T) = \Phi_T(f).$$

Ainsi qu'il a été mentionné plus haut la classe $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathscr{H})$ est l'ensemble des contractions absolument continues de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ pour lesquelles $\Phi_T$ est une isométrie, et on définit les classes $\mathbb{A}_{n,m}$ ($n$, $m$ cardinaux au plus égaux à $\aleph_0$) par $\mathbb{A}_{n,m} = \left\{T \in \mathbb{A} / \mathscr{A}_T \text{ ait la propriété } (\mathbb{A}_{n,m})\right\}$ ($\mathbb{A}_{n,n}$ est notée $\mathbb{A}_n$).

## 2. Préliminaires

Soit $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, on note $\mathrm{Lat}(T)$ le treillis des sous espaces invariants (s. e. i.) par $T$. On désigne par $\Omega$ un domaine borné de $\mathbb{C}$.

**Définition 2.1.** ([6] et [8]) Soit $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $\mathscr{M} \in \mathrm{Lat}(T)$ est dit un *sous espace invariant $\Omega$-analytique* pour $T$ s'il existe une fonction antianalytique non nulle $\lambda \to e_\lambda$ de $\Omega$ dans $\mathscr{M}$ telle que:

$$(T \mid \mathscr{M} - \lambda)^* \, e_\lambda = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \in \Omega.$$

Si de plus $\bigvee\limits_{\lambda \in \Omega} e_\lambda = \mathscr{M}$, $\mathscr{M}$ est dit un *sous espace invariant $\Omega$-analytique total pour $T$* ($\bigvee\limits_{\lambda \in \Omega} e_\lambda$ est le sous espace fermé de $\mathscr{H}$ engendré par $\{e_\lambda / \lambda \in \Omega\}$).

Notons au regard de la question qui nous occupe, que si $\mathscr{M}$ est un s. e. i. $\Omega$-analytique pour $T$ alors $\sigma(T \mid \mathscr{M}) \supset \overline{\Omega}$.

La proposition suivante est la traduction en termes de sous espace invariant analytique d'un résultat bien connu de la théorie de Fredholm.

**Proposition 2.1.** *Soit $\mathscr{H}$ un trou du $\sigma_e(T)$ d'indice négatif non inclu dans $\sigma_p(T)$. Alors pour $\lambda_0 \in H \setminus \sigma_p(T)$ et $x_0 \in \ker(T - \lambda_0)^* \setminus \{0\}$, il existe un disque $\Delta = \Delta(\lambda_0)$ centré en $\lambda_0$ et une fonction antianalytique $\lambda \to e_\lambda$ faisant de $\mathscr{H}$ un sous espace invariant $\Delta$-analytique pour $T$, telle que $e_{\lambda_0} = x_0$.*

**Proposition 2.2.** *Si $\mathscr{H}$ est un sous espace invariant $\Omega$-analytique total pour $T$, $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ et $\Omega \subset \mathbb{D}$, Alors tout sous espace invariant cyclique $\mathscr{M}$, $\mathbb{D}$-analytique pour $T$ est total.*

*($\mathscr{M} \in \mathrm{Lat}(T)$ est dit cyclique s'il existe $x \in \mathscr{H}$ tel que $\mathscr{M} = \bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} T^n x$.)*

P r e u v e. Soient $k\colon \mathbb{D} \to \mathscr{M}$ et $e\colon \Omega \to \mathscr{H}$ antianalytiques non nulles telles que:
$(T \mid \mathscr{M} - \lambda)^* k_\lambda = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{D}$.
$(T - \lambda)^* e_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in \Omega$ et $\bigvee\limits_{\lambda \in \Omega} e_\lambda = \mathscr{H}$.

Prenons

$$\begin{aligned} \bar{e}\colon \Omega &\longrightarrow \mathscr{M} \\ \lambda &\longmapsto \bar{e}_\lambda = P_{\mathscr{M}} \, e_\lambda \end{aligned}$$

où $P_{\mathscr{M}}$ est la projection orthogonale sur $\mathscr{M}$. Alors $\bar{e}$ est antianalytique et on a $(T \mid \mathscr{M} - \lambda)^* \, \bar{e}_\lambda = 0$ et $\bigvee\limits_{\lambda \in \Omega} \bar{e}_\lambda = \mathscr{M}$.

Comme $(T \mid \mathscr{M} - \lambda)\,\mathscr{M} = \bigvee_{n\geqslant 1} (T-\lambda)^n\, x$ pour tout $\lambda$, $\ker(T \mid \mathscr{M} - \lambda)^*$ est de dimension au plus égal à un.

Donc pour $\lambda \in \Omega$, $\ker(T \mid \mathscr{M} - \lambda)^* = \mathbb{C}\,\bar{e}_\lambda = \mathbb{C}\,k_\lambda$.

D'où, il existe $\alpha_\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $k_\lambda = \alpha_\lambda\,\bar{e}_\lambda$ pour $\lambda \in \Omega$.

Dans ce cas:

$$\mathscr{M} = \bigvee_{\lambda\in\Omega} \bar{e}_\lambda = \bigvee_{\lambda\in\Omega} (\alpha_\lambda\,\bar{e}_\lambda) = \bigvee_{\lambda\in\Omega} k_\lambda \subset \bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}} k_\lambda \subset \mathscr{M}.$$

Alors $\bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}} k_\lambda = \mathscr{M}$, et $\mathscr{M}$ est un s. e. i. $\mathbb{D}$-analytique total pour $T$. $\square$

Les considérations ci-dessus dans le cas d'une contraction $T \in \mathbb{A}$ conduisent à une réponse positive à notre question car rentrant dans un cas connu de la classe $\mathbb{A}_{1,\aleph_0}$.

**Proposition 2.3.** *Soient $T \in \mathbb{A}$ et $\mathscr{M} \in \mathrm{Lat}(T)$ tels que:*

1) $T \mid \mathscr{M} \in \mathbb{A}(\mathscr{M})$.

2) *Il existe $\Omega$ un domaine borné ($\Omega \subset \mathbb{D}$) tel que $\mathscr{M}$ soit $\Omega$-analytique total pour $T$.*

*Alors $T \in \mathbb{A}_{1,\aleph_0}$.*

P r e u v e . $\mathscr{M}$ est un s. e. i. $\Omega$-analytique total pour $T$, alors il existe $e\colon\ \Omega \to \mathscr{M}$ antianalytique non nulle telle que:

$$(T \mid \mathscr{M} - \lambda)^* e_\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \bigvee_{\lambda\in\Omega} e_\lambda = \mathscr{M}$$

et

$$\big\|(T \mid \mathscr{M})^* e_\lambda\big\| = |\lambda|^n \big\|e_\lambda\big\| \ \longrightarrow\ 0$$

pour tout $\lambda \in \Omega$ (car $|\lambda| < 1$). Donc $T \mid \mathscr{M}$ est $C_{.0}$.

Or, il est déja établi que:

$$\mathbb{A}(\mathscr{H}) \cap C_{.0} = \mathbb{A}_{1,\aleph_0} \cap C_{.0} \qquad \text{(cf. [9])}.$$

D'où $T \mid \mathscr{M} \in \mathbb{A}_{1,\aleph_0}(\mathscr{M})$.

Nous en déduisons que $T \in \mathbb{A}_{1,\aleph_0}(\mathscr{H})$ (voir [6]). $\square$

Rappelons que dans le cas où $T \in \mathbb{A}_{1,\aleph_0}$ on a le résultat suivant [6, p. 55].

**Proposition 2.4.** *Si $T \in \mathbb{A}_{1,\aleph_0}$, alors*

$$CF(T) =: \Big\{x \in \mathscr{H} / \mathscr{M}_x = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} T^n\, x \textit{ est un s. e. i. } \mathbb{D}\textit{-analytique total pour } T\Big\}$$

*est dense dans $\mathscr{H}$.*

Ainsi le treillis des sous espaces invariants par un opérateur $T$ de la classe $\mathbb{A}_{1,\aleph_0}$ est très riche en sous espaces invariants cycliques $\mathbb{D}$-analytique totals pour $T$.

Si $\lambda \in \mathbb{D}$ et $T \in \mathbb{A}$, $[C_\lambda] = (\varphi_T)^{-1}\big([P_\lambda]\big)$ ($P_\lambda$ est le noyau de poisson et ${\varphi_T}^* =: \Phi_T$). D'où

$$\big\langle f(T), [C_\lambda]\big\rangle = \big\langle f, \varphi_T\big([C_\lambda]\big)\big\rangle = \big\langle f, [P_\lambda]\big\rangle = f(\lambda).$$

Ces éléments ont un rôle très important dans l'exploration du prédual.

## 3. Procédé de remplissage

Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des trous du spectre de $T$ et des trous du spectre essentiel de $T$ non inclus dans le spectre ponctuel de $T$.

Nous donnons d'abord un cas particulier de remplissage d'un élément de $\mathscr{R}$.

**Proposition 3.1.** *Soient $T \in \mathbb{A}$ et $H_0 \in \mathscr{R}$. Alors il existe $\mathscr{M} \in \mathrm{Lat}(T)$ tel que $\sigma(T \mid \mathscr{M}) \supset H_0$.*

Preuve. Soit $\lambda_0 \in H_0 \setminus \sigma_p(T)$. Comme $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1$ (cf. [1] et [3]), on résout $[C_{\lambda_0}]$ dans $Q_T$; il existe alors dans $\mathscr{H}$, $x$ et $y$ tels que: $[C_{\lambda_0}] = [x \otimes y]$ (i. e. $\big\langle (T-\lambda_0)^k x, y\big\rangle = 0$ si $k \neq 0$ et $\langle x, y\rangle = 1$). Prenons

$$\mathscr{M} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} T^n\, x = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (T-\lambda_0)^n\, x.$$

Nous avons $(T-\lambda_0)\,\mathscr{M} = \bigvee_{n\geqslant 1} (T-\lambda_0)^n\, x \neq \mathscr{M}$ (car $P_{\mathscr{M}} y \in (\mathscr{M} \ominus (T \mid \mathscr{M} - \lambda_0)\mathscr{M})^\perp \setminus \mathscr{M}^\perp$).

Or $1 \leqslant \dim\big(\mathscr{M} \ominus (T \mid \mathscr{M} - \lambda_0)\mathscr{M}\big) \leqslant 1$, donc $\dim\big(\mathscr{M} \ominus (T \mid \mathscr{M} - \lambda_0)\mathscr{M}\big) = 1$ et $\dim\big(\ker(T \mid \mathscr{M} - \lambda_0)^*\big) = 1$.

$(T \mid \mathscr{M} - \lambda_0)$ est injectif et à image fermée donc semi Fredholm, en outre:

$$i\,(T \mid \mathscr{M} - \lambda_0) = -1 =: i_{T|_{\mathscr{M}}}(\lambda_0) \quad (i \text{ est l'indice}).$$

Notons que si $H_0$ est un trou de $\sigma(T)$, alors pour $\lambda \in H_0$, $(T \mid \mathscr{M} - \lambda)$ est injectif et $\mathrm{Im}(T \mid \mathscr{M} - \lambda)$ est fermé donc $(T \mid \mathscr{M} - \lambda)$ est semi Fredholm.

D'autre part, si $H_0$ est un trou dans $\sigma_e(T)$, alors pour $\lambda \in H_0$, $(T \mid \mathscr{M} - \lambda)$ reste semi Fredholm, donc nous pouvons parler de l'indice:

$$i_{T|_{\mathscr{M}}}(\lambda) = i_{T|_{\mathscr{M}}}(\lambda_0) = -1 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in H_0.$$

Ce qui donne que:

$$\mathscr{M} \ominus (T \mid \mathscr{M} - \lambda)\mathscr{M} \neq (0)$$

Ce qui signifie $(T \mid \mathscr{M} - \lambda)\mathscr{M} \neq \mathscr{M}$ pour $\lambda \in H_0$.

Donc

$$H_0 \subset \sigma(T \mid \mathscr{M}).$$

□

L'idée de la preuve de la proposition 3.1 nous a mené à établir la proposition suivante:

**Proposition 3.2.** *Soient $T \in \mathbb{A}$ et $(H_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{R}$ tel qu'il existe pour chaque $k \in \mathbb{N}, \lambda_k \in H_k \setminus \sigma_p(T)$ et $(\lambda_k)_k$ est une suite de Blaschke (i. e. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (1 - |\lambda_k|) < \infty$). Alors il existe $\mathscr{M} \in \mathrm{Lat}(T)$ tel que $\Big(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} H_k\Big) \subset \sigma(T \mid \mathscr{M})$.*

P r e u v e . Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une série convergente avec $\alpha_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On résout:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k [C_{\lambda_k}] = [x \otimes y] \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont dans } \mathscr{H}.$$

Donc, pour tout $f$ et tout $g$ dans $H^\infty$, on a:

$$\big(fg(T)x, y\big) = \big(f(T)x, g(T)^* y\big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k f(\lambda_k) g(\lambda_k).$$

Soit $B = \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k$ le produit de Blaschke associé à $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$$B_k = \frac{\overline{\lambda}_k}{|\lambda_k|} \, \frac{\lambda_k - z}{1 - \overline{\lambda}_k z}.$$

Prenons:

$$g_k = \frac{1}{\gamma_k \alpha_k} \, \frac{B}{B_k} \;\text{ et }\; y_k = g_k(T)^* \, y \quad (\text{avec } \gamma_k \text{ tel que } g_k(\lambda_k) = 1),$$

nous avons:

$$[x \otimes y_k] = [C_{\lambda_k}] \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Si $\mathscr{M} = \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} T^n x$, les mêmes arguments que ceux de la proposition 3.1 donnent:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k \subset \sigma\big(T \mid \mathscr{M}\big).$$

□

Nous finissons par quelques remarques:

Ce procédé de remplissage des trous du spectre est limité, car le spectre d'un opérateur de la classe $\mathbb{A}$ hormis qu'il est compact et qu'il contient $\mathbb{T}$ est de nature géométrique quelconque.

En effet:

Si $B$ est le shift bilatéral et $K$ un compact quelconque dans $\mathbb{D}$, il existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ telle que $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $K$. Prenant l'opérateur diagonal $R$: $R(e_n) = \lambda_n e_n$ où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathscr{H}$, on a alors:

$$\sigma(B \oplus R) = \mathbb{T} \cup K.$$

Ceci nous pousse à prendre des conditions suplémentaires, par exemple $T \in \mathbb{A}_{1,2}$ ou $\mathbb{A}_2$, ou plus particulièrement les opérateurs: $T^2 = T \circ T$ et $T^{(2)} = T \oplus T$ avec $T$ dans $\mathbb{A}$.

Notons que $T^{(2)}$ est dans $\mathbb{A}_2(\mathscr{H}^2)$ quand $T \in \mathbb{A}(\mathscr{H})$ (cf. [10]), et que si

$$I = \bigl\{H \text{ trou de } \sigma(T) \text{ tel que: } \overline{H} \cap \mathbb{T} \neq \emptyset\bigr\},$$

il existe d'aprés la proposition 3.3 $\mathscr{M} \in \operatorname{Lat}(T)$ tel que:

$$\bigcup_{H\in I} H \subset \sigma(T \mid \mathscr{M}).$$

En prenant $\mathscr{H} \oplus \mathscr{M}$, nous avons:

$$\sigma\bigl(T^{(2)}/\mathscr{H} \oplus \mathscr{M}\bigr) \supset \sigma(T) \cup \Biggl(\bigcup_{H\in I} H\Biggr).$$

D'où le résultat suivant.

**Proposition 3.3.** *Si $T \in \mathbb{A}$ alors il existe $\mathscr{N} \in \operatorname{Lat}\bigl(T^{(2)}\bigr)$ tel que $\sigma\bigl(T^{(2)} \mid \mathscr{N}\bigr)$ soit dominant pour $\mathbb{T}$.*

*($\Lambda$ est dit dominant pour $\mathbb{T}$ si pour tout $f \in H^\infty$, $\bigl\|f\bigr\|_\infty = \sup_{\lambda\in\Lambda}\bigl|f(\lambda)\bigr|$.)*

En ce qui concerne $T^2 = T \circ T$, il est important de signaler que l'on peut avoir $T^2 \in \mathbb{A}_{\aleph_0}$ sans que $T$ soit dans $\mathbb{A}$.

En effet:

Prenant $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ une contraction absolument continue telle que:

$$\sigma(T) = \sigma_e(T) = \bigl\{\lambda \in \mathbb{D} \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda) \geqslant 0\bigr\},$$

il est clair que $T \notin \mathbb{A}(\mathscr{H})$ car le spectre de $T$ ne contient pas le cercle unité $\mathbb{T}$ (condition nécéssaire d'appartenance à cette classe). Mais, $T^2$ est une contraction absolument continue et

$$\sigma_e(T^2) = \{\lambda^2/\lambda \in \sigma_e(T)\} = \overline{\mathbb{D}}.$$

Or on sait que si $S$ est une contraction absolument continue et $\sigma_e(S) \cap \mathbb{D}$ est dominant pour $\mathbb{T}$, $S \in \mathbb{A}_{\aleph_0}$.

Donc $T^2 \in \mathbb{A}_{\aleph_0}$.

*Bibliographie*


[1] *H. Bercovici*: Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert space. Annals of Math. *128* (1988), 399–431.

[2] *H. Bercovici, C. Foias, C. Pearcy*: Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory. CBMS Regional conference series in Math. vol. 56, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1985.

[3] *S. Brown, B. Chevreau*: Toute contraction à calcul fonctionnel isométrique est réflexive. C. R. Acad. Sci. Paris *307,* Série I (1988), 185–188.

[4] *B. Chevreau*: Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique 2. Journal Operator Theory *20* (1988), 269–293.

[5] *B. Chevreau, C. Pearcy*: On the structure of contraction operators I. Journal Func. Anal. *76* (1988), 1–29.

[6] *B. Chevreau, G. Exner, C. Pearcy*: On the structure of contraction operators III. Michigan. Math. Journal *36* (1989), 29–61.

[7] *B. Sz. Nagy, C. Foias*: Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space. North Holland, Amsterdam, 1970.

[8] *R. Olin, J. Thomson*: Algebras of subnormal operators. Journal Func. Anal. *37* (1980), 271–301.

[9] *M. Ouannasser*: Une remarque sur la classe $\mathbb{A}_{1\aleph_0}$. Math. Balkanica (N. S) *4* (1990), 203–205.

[10] *M. Ouannasser*: Sur les contractions de la classe $\mathbb{A}_n$. Journal Operator Theory *28* (1992), 105–120.



*L'adresse de l'auteur*: URA CNRS 751, Bât. M 2, UFR de Mathématiques, Université des Sciences et Technologies de Lille I, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.