Czechoslovak Mathematical Journal, 44 (119) 1994, Praha

О ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ УПРАВЛЯЮЩИХ ХАОТИЧНОСТЬЮ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ $Z(t)$ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Ян Мозер, Братислава*

(Поступило в редакцию 15-ого мая 1991)

Введение

(A) Хаотичность поведения графиков функций $Z(t)$ и $Z^{(k)}(t)$.

Вычисления значений функции $Z(t)$ при помощи формулы Римана-Зигеля ([21], стр. 94)

$$(1)\qquad Z(t) = 2\sum_{n\leqslant \bar{t}} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\bigl(\vartheta(t) - t\ln n\bigr) + O(t^{-1/4}), \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{t}{2\pi}},$$

(методом Е. К. Титчмарша [27] и его усовершенствований), связанные с регистрацией нулей нечетного порядка функции $\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)$, показывают, что поведение графика функции $Z(t)$ хаотично в промежутке покрываемом вычислениями. По этому поводу см. например график функции $Z(t)$ в окрестности первой пары нулей Д. Лемера (специальной пары нулей функции $Z(t)$, лежащих в окрестности значения $t = 2\pi\cdot 1\,114,89$ ([24], стр. 296, 297), см. также график [28].

Еще более хаотичное поведение графика функции $Z(t)$ следует ожидать в случае $t\to\infty$ (ср. также мнение А. Сельберга в работе [25], стр. 196, строки 10–11 сверху, и стр. 200, строки 7–13 сверху).

Так как для производных $Z^{(k)}(t)$ справедлива формула (см. [8], (10), [2], стр. 52)

$$(2)\qquad Z^{(k)}(t) = 2\sum_{n\leqslant \bar{t}} \frac{1}{\sqrt{n}} \bigl(\vartheta'(t) - \ln n\bigr)^k \cos\bigl(\vartheta(t) - t\ln n + k\tfrac{\pi}{2}\bigr) + O(t^{-1/4}\ln^{k+1} t), \quad k = 1, 2, \dots$$

* Работа написана при поддержке гранта Слов. АН, Но. 363/90.

то, по вышеприведенным соображениям, поведение графиков функций $Z^{(k)}(t)$ тоже следует считать хаотическим при $t \to \infty$.

(Б) Разбиение графиков функций $Z(t)$, $Z^{(k)}(t)$ на две части асимптотически равных длин.

Однако, в упоминавшемся выше внешнем хаосе кроется внутренняя симметрия, отблеском которой являются некоторые красивые геометрические закономерности.

Напомним, что в работе [9], в связи с доказательством теорем о среднем для $Z(t)$, нами были введены две системы несвязных множеств $\mathbb{G}_1(x)$, $\mathbb{G}_2(y)$ (системы знаковых подмножеств $\mathbb{G}_1^+(x), \dots$ для $Z(t)$ мы начали изучать в работе [12]).

В предлагаемой работе доказано, что родственные системы несвязных множеств и знаковых подмножеств для $Z^{(k)}(t)$ приводят нас к закономерностям, которым подчиняется хаотическое поведение графиков функций $Z(t)$, $Z^{(k)}(t)$.

А именно, полученные результаты можно сформулировать как решения следующих геометрических задач:

(а) График функции $Z(t)$, $t \in \langle T, T+H \rangle$ разбить на два несвязных подмножества (т.е. на две несвязные кривые) асимптотически равных мер (= длин) при $T \to \infty$ и подходящих H.

(б) Любой бесконечной системе несвязных множеств, лежащих в промежутке $\langle T, T+H \rangle$, соответствует бесконечная система несвязных кривых, порожденных графиком функции $Z(t)$. Требуется построить пример бесконечной системы таких несвязных кривых, что каждая из них разбивается на две подкривые асимптотически равных длин при $T \to \infty$.

(в) Решить задачи типа (а) и (б) для графиков производных $Z^{(k)}(t)$.

(В) Сопутствующие результаты.

В процессе доказательства главного результата были получены новые результаты и в других направлениях:

(а) геометрические закономерности типа (Б), (а)–(в) для площадей несвязных криволинейных трапеций, соответствующих графикам функций $Z^{(k)}(t)$ на несвязных множествах,

(б) оценки снизу для некоторого класса интегралов по несвязным множествам,

(в) в направлении нашей работы [19], умеющей точку соприкосновения с квадратурной формулой П. Л. Чебышева ([22], стр. 249, (2)).

Еще заметим, что с точки зрения теоретической радиотехники все полученные результаты выражают свойства особых сигналов, порождаемых формулами Римана-Зигеля для $Z(t)$ и $Z^{(k)}(t)$ (ср. [20]), на различного рода дискретных и несвязных множествах.

В целом предлагаемая работа продолжает анализ следствий из формулы Римана-Зигеля при помощи дискретного метода, основы которого были заложены Е. К. Титчмаршем в его знаменитом мемуаре [26] в связи с изучением теоремы Харди (см. [23]) о бесконечности множества нулей нечетного порядка функции $\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)$ и закона Грама.

План изложения таков: в 1-й части введено основное семейство последовательностей $\{h_\nu^k(\tau)\}$, в частях 2–4 сформулированы Теоремы 1, 2 и 3, в частях 5, 6 доказаны вспомогательные утверждения, в части 7 завершены доказательства Теорем 1, 2 и 3, в части 8 сформулирована и доказана Теорема 4, касающаяся некоторых свойств сумм, зависящих от „хороших“ и „плохих“ экстремальных значений функции $Z^{(k-1)}(t)$, и, наконец, в 9-й части приведены заключительные замечания.

1. Формула Римана-Зигеля для $Z^{(k)}(t)$ и семейство последовательностей $\{h_\nu^k(\tau)\}$

Напомним, что (см. [21], стр. 94, 260, 383)

$$
\begin{aligned}
Z(t) &= e^{\mathrm{i}\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t), \\
\vartheta(t) &= -\frac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\left\{\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\mathrm{i}\frac{t}{2}\right)\right\}, \\
\vartheta'(t) &= \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\vartheta(t) &= \vartheta_1(t) + O\left(\frac{1}{t}\right), \\
\vartheta_1(t) &= \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В работе [8], в связи с изучением корней нечетного порядка уравнения $Z'(t)=0$ автор использовал аналог формулы (1) для $Z'(t)$ (см. [88], (10)):

$$
\begin{aligned}
Z'(t) = 2\sum_{n\leqslant\bar{t}} &\frac{1}{\sqrt{n}}\bigl(\vartheta'(t)-\ln n\bigr)\cos\left(\vartheta(t)-t\ln n+\frac{\pi}{2}\right) \\
&+ O(t^{-1/4}\ln t),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

который можно назвать формулой Римана-Зигеля для $Z'(t)$. Далее, А. А. Карацуба, в своей работе [2], стр. 52 использовал формулу (2), в которой постоянная в O-оценке зависит только от k.

Из формулы (2) способом [8], (40)–(46) и заменой $\vartheta \to \vartheta_1$ (см. (3), (4)) получается локализованная формула

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad Z^{(k)}(t) &= 2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\ln\frac{P}{n}\Big)^k\cos\Big(\vartheta_1(t)-t\ln n+k\frac{\pi}{2}\Big)\\
&\quad+O(T^{-1/4}\ln^{k+1}T),\\
P&=\sqrt{\frac{T}{2\pi}},\ k=1,\dots,K_0,\ t\in\langle T,T+H\rangle,\ H\in(0,\sqrt[4]{T}\,\rangle,
\end{aligned}
$$

где K_0-любое, но фиксированное число.

Теперь мы определим семейство последовательностей $\{h_\nu^k(\tau)\}$ следующим образом:

$$
(7)\qquad \vartheta_1[h_\nu^k(\tau)]=\pi\nu+\tau+\frac{3\pi}{2}k,\quad \nu=1,2,\dots,\ \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle.
$$

Замечание 1. Семейство последовательностей $\{h_\nu^k(\tau)\}$ является обобщением семейства $\{h_\nu(\tau)\}$, введенного нами в работе [19] (ср. [8], (12)).

Еще напомним, что из (7) обычным способом (см. [6], (42), [11], (59)) получаются основные соотношения для семейства последовательностей $\{h_\nu^k(\tau)\}$:

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad h_{\nu+1}^k(\tau)-h_\nu^k(\tau)&=\frac{\pi}{\ln P}+O\Big(\frac{H}{T\ln^2T}\Big),\\
\sum_{T\leqslant h_\nu^k\leqslant T+H}1&=\frac{1}{\pi}H\ln P+O(1),\quad h_\nu^k=h_\nu^k(0).
\end{aligned}
$$

2. Разбиение графика функции $Z^{(k-1)}(t)$ на две части асимптотически равных длин

В промежутке $\langle T,T+H\rangle$ мы определим следующие системы несвязных множеств (ср. [9], (3), [19], (17)):

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad G_{2\nu,k}(x)&=\{t\colon h_{2\nu}^k(-x)<t<h_{2\nu}^k(x),\ t\in\langle T,T+H\rangle\},\\
G_{2\nu+1,k}(y)&=\{t\colon h_{2\nu+1}^k(-y)<t<h_{2\nu+1}^k(y),\ t\in\langle T,T+H\rangle\},\\
\mathbb{G}_{1,k}(x)&=\bigcup_{T\leqslant h_{2\nu}^k\leqslant T+H}G_{2\nu,k}(x),\\
\mathbb{G}_{2,k}(y)&=\bigcup_{T\leqslant h_{2\nu+1}^k\leqslant T+H}G_{2\nu+1,k}(y),
\end{aligned}
$$

где $k = 1, \ldots, K_0$ и $0 < x,\ y \leqslant \pi/2$.

Далее мы определим знаковые подмножества функции $Z^{(k)}(t)$ относительно множеств (9):

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}^{+}_{1,k}(x) &= \{t\colon Z^{(k)}(t) > 0,\ t \in \mathbb{G}_{1,k}(x)\},\\
\mathbb{G}^{-}_{1,k}(x) &= \{t\colon Z^{(k)}(t) < 0,\ t \in \mathbb{G}_{1,k}(x)\},\\
\mathbb{G}^{0}_{1,k}(x) &= \{t\colon Z^{(k)}(t) = 0,\ t \in \mathbb{G}_{1,k}(x)\},
\end{aligned} \tag{10}$$

(аналогичный смысл имеют обозначения $\mathbb{G}^{+}_{2,k}(y), \ldots$).

Пусть $L^{+}_{k-1}(x) = L^{+}_{k-1}(x; T, H)$ обозначает несвязное множество, соответствующее графику функции

$$Z^{(k-1)}(t), \quad t \in \mathbb{G}^{+}_{1,k}(x) \cup \mathbb{G}^{+}_{2,k}(x),$$

и $L^{-}_{k-1}(x)$ — несвязное множество, соответствующее графику функции

$$Z^{(k-1)}(t), \quad t \in \mathbb{G}^{-}_{1,k}(x) \cup \mathbb{G}^{-}_{2,k}(x).$$

Пусть $m\{L^{+}_{k-1}(x)\}$, $m\{L^{-}_{k-1}(x)\}$ обозначают меры соответствующих несвязных множеств.

Определение. Несвязные множества $L^{+}_{k-1}(x)$, $L^{-}_{k-1}(x)$ мы назовем несвязными кривыми и числа $m\{L^{+}_{k-1}(x)\}$, $m\{L^{-}_{k-1}(x)\}$ — длинами этих несвязных кпивых.

Пусть еще $S(a, b)$ обозначает элементарную тригонометрическую сумму:

$$S(a,b) = \sum_{a \leqslant n \leqslant b} n^{\mathrm{i}t}, \quad 1 \leqslant a < b \leqslant 2a,\ b \leqslant \sqrt{\frac{t}{2\pi}}.$$

Справедлива

Теорема 1. (главный результат). *Если*

$$|S(a,b)| < A(\Delta)\sqrt{a}t^{\Delta}, \quad \Delta \in (0, 1/6\,\rangle, \tag{11}$$

то

$$m\{L^{+}_{k-1}(x)\} \sim m\{L^{-}_{k-1}(x)\}, \quad T \to \infty,\ k = 1, \ldots, K_0, \tag{12}$$

для

$$T^{\Delta+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T^{1/4}, \tag{13}$$

где K_0 — любое фиксированное целое число и $0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число.

Так как условие (11) справедливо, например, для $\Delta = 1/6$, (см. [21], стр. 110), то из Теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Асимптотическое соотношение* (12) *имеет место для промежутка* $\langle T, T+H\rangle$, *где*

$$T^{1/6+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T^{1/4}. \tag{14}$$

В случае справедливости гипотезы Линделёфа для элементарной тригонометрической суммы имеет место (см. [1], стр. 89, ср. [8], (7)) оценка

$$|S(a,b)| < A(\varepsilon)\sqrt{a}t^{\varepsilon}.$$

Значит, имеет место

Следствие 2. *По гипотезе Линделёфа асимптотическое соотношение* (12) *имеет место для промежутка* $\langle T, T+H\rangle$, *где*

$$T^{2\varepsilon} \leqslant H \leqslant T^{1/4}. \tag{15}$$

Замечание 2. Итак, по гипотезе Линделёфа, получается почти 100%-ое улучшение показателя 1/6 в (14).

Замечание 3. В условиях (13)–(15) выступает ограничение $H \leqslant T^{1/4}$. Конечно, расширение справедливости асимптотического соотношения (12) на значения $H \in (T^{1/4}, T\,)$-дело простое. То же самое касается и Теорем 2–4.

Так как (см. (7), (9))

$$\begin{aligned} \vartheta_1[h_{2\nu}^k(x)] - \vartheta_1[h_{2\nu}^k(-x)] &= 2x, \\ \vartheta_1[h_{2\nu+1}^k(y)] - \vartheta_1[h_{2\nu+1}^k(-y)] &= 2y, \end{aligned}$$

то (ср. [11], (11)–(13), [6], (42))

$$\begin{aligned} h_{2\nu}^k(x) - h_{2\nu}^k(-x) &= \frac{2x}{\ln P} + O\Big(\frac{xH}{T\ln^2 T}\Big), \\ h_{2\nu+1}^k(y) - h_{2\nu+1}^k(-y) &= \frac{2y}{\ln P} + O\Big(\frac{yH}{T\ln^2 T}\Big) \end{aligned} \tag{16}$$

для $h^k_{2\nu}(-x)$, $h^k_{2\nu+1}(y)\in\langle T,T+H\rangle$ и, далее, из (9), в силу (8), (16), для мер множеств $\mathbb{G}_{1,k}(x)$, $\mathbb{G}_{2,k}(y)$ получаем:

$$\begin{aligned} m\{\mathbb{G}_{1,k}(x)\} &= \frac{x}{\pi}H + O\Big(\frac{x}{\ln T}\Big), \\ m\{\mathbb{G}_{2,k}(y)\} &= \frac{y}{\pi}H + O\Big(\frac{y}{\ln T}\Big). \end{aligned} \tag{17}$$

В специальном случае $x=y=\pi/2$:

$$m\Big\{\mathbb{G}_{1,k}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\cup\mathbb{G}_{2,k}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big\} = H + O\Big(\frac{1}{\ln T}\Big). \tag{18}$$

После этого делаем

Замечание 4. Теорема 1 дает решение геометрических задач (Б), (а)–(в), сформулированных во введении. А именно, график функции

$$Z^{(k-1)}(t), \quad t\in\mathbb{G}_{1,k}(x)\cup\mathbb{G}_{2,k}(x),$$

разбивается на две несвязные кривые асимптотически равных длин (см. (12)) при помощи знаковых подмножеств функции $Z^{(k)}(t)$ относительно множества $\mathbb{G}_{1,k}(x)\cup\mathbb{G}_{2,k}(x)$ (задаче (а) соответствует значение $x=\pi/2$).

3. Закон асимптотического равенства площадей

Пусть $D^+_k(x)=D^+_k(x;T,H)$ обозначает несвязную криволинейную трапецию (= несвязная фигура), соответствующую (в обычном смысле) графику функции

$$Z^{(k)}(t), \quad t\in\mathbb{G}^+_{1,k}(x)\cup\mathbb{G}^+_{2,k}(x),$$

и $D^-_k(x)$ — несвязную фигуру, соответствующую графику функции

$$Z^{(k)}(t), \quad t\in\mathbb{G}^-_{1,k}(x)\cup\mathbb{G}^-_{2,k}(x).$$

Пусть $m\{D^+_k(x)\}$, $m\{D^-_k(x)\}$ обозначают меры (площади) соответствующих несвязных фигур, т.е.

$$\begin{aligned} m\{D^+_k(x)\} &= \int\limits_{\mathbb{G}^+_{1,k}(x)\cup\mathbb{G}^+_{2,k}(x)} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t, \\ m\{D^-_k(x)\} &= \int\limits_{\mathbb{G}^-_{1,k}(x)\cup\mathbb{G}^-_{2,k}(x)} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{19}$$

Справедлива

Теорема 2. *Из условия* (11) *следует:*

$$m\{D_k^+(x)\} \sim m\{D_k^-(x)\}, \quad T \to \infty, \ k = 1, \dots, K_0, \tag{20}$$

для $H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4} \rangle$. *При этом, асимптотическое равенство* (20) *справедливо: безусловно, например для* $H \in \langle T^{1/6+\varepsilon}, T^{1/4} \rangle$ (см. (14)) *и, по гипотезе Линделёфа, для* $H \in \langle T^{2\varepsilon}, T^{1/4} \rangle$, *(см.* (15)*).*

Замечание 5. Теорема 2 дает решение следующей геометрической задачи: несвязную фигуру, соответсвующую графику функции

$$Z^{(k)}(t), \quad t \in \mathbb{G}_{1,k}(x) \cup \mathbb{G}_{2,k}(x),$$

разбить на две несвязные фигуры, асимптотически равных площадей.

Замечание 6. Асимптотическое равенство типа (20) автор получил в работе [12], (4) для графика функции $Z(t)$ (другие направления для обобщений см. в работах [14], [15]).

Замечание 7. Асимптотические соотношения (12) и (20) представляют собой некоторые из закономерностей, управляющих хаотичностью поведения графиков функций $Z(t)$, $Z^{(k)}(t)$.

4. Оценки снизу для некоторых интегралов по несвязным множествам

Справедлива

Теорема 3. *Из условия* (11) *следуют оценки снизу:*

$$\int_{G^+_{1,k}(x)\cup G^+_{2,k}(y)} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{2}{\pi}(1-\delta)H(\ln^k P)\sin x, \tag{21}$$

$$\int_{G^-_{1,k}(x)\cup G^-_{2,k}(y)} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{2}{\pi}(1-\delta)H(\ln^k P)\sin y,$$

для $k = 1, \dots, K_0$, $H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4} \rangle$, *где* $0 < \delta$ *— сколь угодно малое число. При этом оценки снизу* (21) *справедливы: безусловно, например для*

$H \in \langle T^{1/6+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle$ *(см.* (14)*) и, по гипотезе Линделёфа, для* $H \in \langle T^{2\varepsilon}, T^{1/4}\rangle$ *(см.* (15)*).*

Далее отметим, что, применяя к сумме в (6) преобразование Абеля, в силу (11) получается оценка (ср. [8], (54), (55)):

$$Z^{(k)}(t) = O(T^{\Delta} \ln^{k+1} T), \quad t \in \langle T, T+H\rangle\,. \tag{22}$$

Полагая теперь в (21) $x = y = \pi/2$, в силу (18), (22) получаем

Следствие 3. *По условию* (11) *справедлива оценка снизу:*

$$\int_T^{T+H} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{4}{\pi}(1-\eta)H \ln^k P, \quad T \to \infty, \tag{23}$$

для $H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle$, $\eta = 2\delta$.

5. Дискретные формулы

Справедлива

Лемма 1. *Из условия* (11) *следует:*

$$\sum_{T \leqslant h_{2\nu}^k \leqslant T+H} Z^{(k)}[h_{2\nu}^k(\tau)] = \frac{1}{\pi} H \ln^{k+1} P \cos\tau + O(T^{\Delta} \ln^{k+1} T), \tag{24}$$

$$\sum_{T \leqslant h_{2\nu+1}^k \leqslant T+H} Z^{(k)}[h_{2\nu+1}^k(\tau)] = -\frac{1}{\pi} H \ln^{k+1} P \cos\tau + O(T^{\Delta} \ln^{k+1} T),$$

для $H \in (0, \sqrt[4]{T}\rangle$, $k = 1, \dots, K_0$ *и* O*-оценки справедливы равномерно для* $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

Доказательство. (A) Так как (см. (6), (7))

$$\begin{aligned} Z^{(k)}[h_\nu^k(\tau)] &= 2(-1)^\nu \ln^k P \cos\tau \\ &\quad + 2 \sum_{2 \leqslant n < P} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \frac{P}{n}\right)^k \cos\left(\pi\nu - h_\nu^k(\tau) \ln n + \tau\right) \\ &\quad + O(T^{-1/4} \ln^{k+1} T), \end{aligned} \tag{25}$$

то отсюда, в силу (8), получаем (ср. [6], (59)–(61), [8], (51)–53))

$$\sum_{T \leqslant h_\nu^k \leqslant T+H} Z^{(k)}[h_\nu^k(\tau)] = 2W_k + O(\ln^{k+2} T), \tag{26}$$

где

$$
\begin{aligned}
W_k = (-1)^{\bar\nu} \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\ln \frac{P}{n} \Big)^k \cos\varphi \\
+ (-1)^{N+\bar\nu} \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\ln \frac{P}{n} \Big)^k \cos(\omega N + \varphi) \\
+ (-1)^{\bar\nu} \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\ln \frac{P}{n} \Big)^k \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \sin\varphi \\
+ (-1)^{N+\bar\nu+1} \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\ln \frac{P}{n} \Big)^k \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \sin(\omega N + \varphi),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega = \pi \frac{\ln n}{\ln P}, \ \varphi = h_{\bar\nu}^k(\tau) \ln n - \tau, \ n \in \langle 2, P), \\
\bar\nu = \bar\nu(k) = \min \{ \nu \colon h_\nu^k \in \langle T, T+H \rangle \}, \\
\bar\nu + N = \max \{ \nu \colon h_\nu^k \in \langle T, T+H \rangle \}.
\end{aligned}
$$

Теперь уже очевидно, что способом [8], (54)–(64), при замене

$$
\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{P}{n} \to \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\ln \frac{P}{n} \Big)^k,
$$

в силу (11), получается оценка

$$
W_k = O(T^\Delta \ln^{k+1} T)
$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и следовательно (см. (26)):

$$
\sum_{T \leqslant h_\nu^k \leqslant T+H} Z^{(k)}[h_\nu^k(\tau)] = O(T^\Delta \ln^{k+1} T). \tag{27}
$$

(Б) Далее (см. (8), (25))

$$
\sum_{T \leqslant h_\nu^k \leqslant T+H} (-1)^\nu Z^{(k)}[h_\nu^k(\tau)] = \frac{2}{\pi} H \ln^{k+1} P \cos\tau + 2R_k + O(\ln^{k+1} T),
$$

где

$$
R_k = \sum_{2 \leqslant n < P} \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\ln \frac{P}{n} \Big)^k \sum_{T \leqslant h_\nu^k \leqslant T+H} \cos \{ h_\nu^k(\tau) \ln n - \tau \}.
$$

Так как из (11), аналогично случаю [8], (65)–(70), следует

$$
R_k = O(T^\Delta \ln^{k+1} T)
$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, то

$$(28)\qquad \sum_{T\leqslant h_\nu^k\leqslant T+H} (-1)^\nu Z^{(k)}[h_\nu^k(\tau)] = \frac{2}{\pi} H \ln^{k+1} P \cos\tau + O(T^\Delta \ln^{k+1} T).$$

Наконец сопоставлением соотношений (27), (28) получается (24). Доказательство Леммы 1 закончено. □

Замечание 8. Формулы (24) являются асимптотическими для $H \in \langle T^\Delta \psi(T), T^{1/4} \rangle$, $\tau \neq -\pi/2, \pi/2$, где $0 < \psi(T)$ — функция, сколь угодно медленно возрастающая к ∞ при $T \to \infty$.

Теперь из Леммы 1 в силу Замечания 8 получается обобщение теоремы из нашей работы [8]:

Следствие 4. *По условию* (11), *уравнение*

$$(29)\qquad Z^{(k)}(t) = 0, \quad k = 1, \dots, K_0$$

имеет корень нечетного порядка, лежащий в промежутке

$$(30)\qquad \bigl(T, T + T^\Delta \psi(T)\bigr),$$

при любом достаточно большом T. При этом, корень уравнения (29) *безусловно существует, например, в промежутке (см.* (14)*)*

$$(31)\qquad \bigl(T, T + T^{1/6} \psi(T)\bigr)$$

и, по гипотезе Линделёфа, в промежутке (см. (15)*)*

$$(32)\qquad (T, T + T^{2\varepsilon}).$$

Напомним, что А. А. Карацуба, уточняя и обобщая результаты из наших работ [6]–[8], получил вместо промежутка (31) промежуток (см. [2], стр. 58, [3], стр. 51):

$$(33)\qquad \bigl(T, T + T^{\frac{1}{6k+6}} (\ln T)^{\frac{2}{k+1}}\bigr), \quad k = 1, \dots, K_0,$$

т.е. свою знаменитую "теорему о сближении корней" уравнений (29) с ростом k.

Замечание 9. Однако мы будем придерживаться в этой работе нашего результата о нулях в промежутке (30), поскольку он доказывает существенное влияние гипотезы Линделёфа на изучаемые вопросы, одновременно для всех значений $k = 1, \ldots, K_0$ (ср. (32), (33)).

6. Интегралы по несвязным множествам

Справедлива

Лемма 2. *Из условия* (11) *следуют соотношения:*

$$\begin{aligned}(34)\qquad \int\limits_{G_{1,k}(x)} Z^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{2}{\pi}H(\ln^k P)\sin x + O(xT^{\Delta}\ln^k T),\\ \int\limits_{G_{2,k}(y)} Z^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{2}{\pi}H(\ln^k P)\sin y + O(yT^{\Delta}\ln^k T),\end{aligned}$$

для $H \in (0, T^{1/4})$, $k = 1, \ldots, K_0$ *и* $x,\, y \in (0, \pi/2)$.

Замечание 10. Формулы (34) являются асимптотическими для $H \in \langle T^{\Delta}\psi(T), T^{1/4}\rangle$.

Доказательство Леммы 2. Так как (см. (4), (7), ср. [9], (51))

$$\left(\frac{\mathrm{d}h_{2\nu}^k(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} = \vartheta_1'[h_{2\nu}^k(\tau)] = \ln P + O\left(\frac{H}{T}\right),$$

то (см. (9), (22), ср. [9], (52))

$$\begin{aligned}(35)\qquad \int_{-x}^{x} Z^{(k)}[h_{2\nu}^k(\tau)]\,\mathrm{d}t &= \int_{-x}^{x} Z^{(k)}[h_{2\nu}^k(\tau)]\left(\frac{\mathrm{d}h_{2\nu}^k(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}h_{2\nu}^k(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\\ &= (\ln P)\int\limits_{h_{2\nu}^k(-x)}^{h_{2\nu}^k(x)} Z^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t + O\left(x\frac{H}{T}T^{\Delta}\ln^{k+1}T\frac{1}{\ln T}\right)\\ &= (\ln P)\int\limits_{G_{2\nu,k}(x)} Z^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t + O(xHT^{-5/6}\ln^k T).\end{aligned}$$

Теперь, интегрируя первую формулу в (24) по $\tau \in \langle -x, x\rangle$, получаем (см. (8), (9), (35))

$$\int\limits_{G_{1,k}(x)} Z^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}H(\ln^k P)\sin x + O(xT^{\Delta}\ln^k T) + O(xH^2T^{-5/6}\ln^{k+1}T),$$

т.е. первую формулу в (34); вторая получается аналогичным образом. □

7. Завершение доказательств Теорем 1, 2, 3

(А) Так как формулы (34) являются асимптотическими для $H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle$ (см. Замечание 10), то из второго асимптотического соотношения в (34) следует (см. (10))

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}(1-\delta)H(\ln^k P)\sin y &\leqslant -\int_{G_{2,k}(y)} Z^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant -\int_{G^-_{2,k}(y)} Z^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{G^-_{2,k}(y)} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{G^-_{1,k}(x)\cup G^-_{2,k}(y)} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

т.е. мы получили вторую оценку в (21). Аналогичным способом получается и первая оценка в (21). Доказательство Теоремы 3 закончено.

(Б) Так как с одной стороны, сложением формул (34) при $x = y$ получаем

$$\int_{G_{1,k}(x)\cup G_{2,k}(x)} Z^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = O(xT^{\Delta}\ln^k T) = o(H\ln^k T), \quad H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle,$$

с другой же стороны,

$$\int_{G_{1,k}(x)\cup G_{2,k}(x)} Z^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{G^+_{1,k}(x)\cup G^+_{2,k}(x)} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t - \int_{G^-_{1,k}(x)\cup G^-_{2,k}(x)} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t,$$

то имеет место соотношение (см. (19))

$$m\{D^+_k(x)\} = m\{D^-_k(x)\} + o(H\ln^k T), \quad H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle. \tag{36}$$

Поскольку (см. (19), (21))

$$m\{D^+_k(x)\}, \quad m\{D^-_k(x)\} > A(x)H\ln^k P, \quad H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle, \tag{37}$$

то соотношение (36) является асимптотическим, т.е. доказательство Теоремы 2 завершено.

(В) Прежде всего (см. часть 2)

$$\begin{aligned} m\{L^+_{k-1}(x)\} &= \int_{G^+_{1,k}(x)\cup G^+_{2,k}(x)} \sqrt{1+\{Z^{(k)}(t)\}^2}\,\mathrm{d}t, \\ m\{L^-_{k-1}(x)\} &= \int_{G^-_{1,k}(x)\cup G^-_{2,k}(x)} \sqrt{1+\{Z^{(k)}(t)\}^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{38}$$

Далее, так как

$$\text{(39)}\qquad \sqrt{1+\{Z^{(k)}(t)\}^2} = |Z^{(k)}(t)| + \frac{1}{\sqrt{1+\{Z^{(k)}(t)\}^2}+|Z^{(k)}(t)|} = |Z^{(k)}(t)| + O(1)$$

и, очевидно,

$$m\{\mathbb{G}_{1,k}^{+}(x)\cup\mathbb{G}_{2,k}^{+}(x)\},\quad m\{\mathbb{G}_{1,k}^{-}(x)\cup\mathbb{G}_{2,k}^{-}(x)\}\leqslant H,$$

то из (38) (см. (19)) получаем

$$\text{(40)}\qquad \begin{aligned} m\{L_{k-1}^{+}(x)\} &= m\{D_k^{+}(x)\} + O(H), \\ m\{L_{k-1}^{-}(x)\} &= m\{D_k^{-}(x)\} + O(H). \end{aligned}$$

Теперь из (40) в силу оценок снизу (37) и асимптотического равенства (20) получаем асимптотическое равенство

$$m\{L_{k-1}^{+}(x)\}\sim m\{L_{k-1}^{-}(x)\},\quad T\to\infty$$

для $H\in\left\langle T^{\Delta+\epsilon}, T^{1/4}\right\rangle$. Доказательство Теоремы 1 закончено.

8. Экстремальные значения функции $Z^{(k-1)}(t)$

8.1. Хорошие и плохие экстремальные значения. Пусть $\{\gamma^k\}$, $\gamma^k>0$ — последовательность корней нечетного порядка уравнения

$$\text{(41)}\qquad Z^{(k)}(t)=0,\quad k=1,\dots,K_0.$$

Значит, $Z^{(k-1)}(\gamma^k)$ — экстремальные значения функции $Z^{(k-1)}(t)$. Очевидно

$$|Z^{(k-1)}(\gamma_n^k)| + |Z^{(k-1)}(\gamma_{n+1}^k)| > 0.$$

Члены последовательности $\{\gamma^k\}$ подразделим на два класса следующим образом:

(A) Если

$$Z^{(k-1)}(\gamma_n^k)Z^{(k-1)}(\gamma_{n+1}^k)\leqslant 0,$$

то γ_n^k, γ_{n+1}^k назовем хорошими корнями и обозначим их через $\bar{\gamma}_n^k$, $\bar{\gamma}_{n+1}^k$.

(Б) Если

$$Z^{(k-1)}(\gamma_n^k)Z^{(k-1)}(\gamma_{n+1}^k) > 0 \tag{42}$$

и

$$|Z^{(k-1)}(\gamma_n^k)| > |Z^{(k-1)}(\gamma_{n+1}^k)|, \tag{43}$$

то γ_n^k назовем хорошим корнем ($\gamma_n^k = \bar{\gamma}_n^k$) и γ_{n+1}^k — плохим корнем и обозначим его через $\bar{\bar{\gamma}}_{n+1}^k$.

(В) Если в случае (42), вместо (43), имеем

$$|Z^{(k-1)}(\gamma_n^k)| < |Z^{(k-1)}(\gamma_{n+1}^k)|,$$

то теперь γ_{n+1}^k — хороший и γ_n^k — плохой корень.

Пусть $\{t_0^k\}$, $t_0^k > 0$ — подпоследовательность последовательности $\{\gamma^k\}$, для которой

$$Z^{(k-1)}(t_0^k) \neq 0.$$

Ясно, что вышеприведенному подразделению $\{\gamma^k\} = \{\bar{\gamma}^k\} \cup \{\bar{\bar{\gamma}}^k\}$ соответствует подразделение $\{t_0^k\} = \{\bar{t}_0^k\} \cup \{\bar{\bar{t}}_0^k\}$.

Замечание 11. Последовательность $\{t_0^1\} = \{t_0\}$ автор начал изучать в работе [4] и продолжал ее изучение (в предположении справедливости гипотезы Римана), в связи с некоторыми математическими вопросами релятивистской космологии, в работах [5], [10], [16]–[18]. Конечно, предположение о справедливости гипотезы Римана не имеет принципиального значения — оно лишь упрощало соответствующие исследования. Аналоги всех результатов по математическим вопросам релятивистской космологии из работ [5], [10], [16]–[18] сохраняют силу и в общем случае.

8.2. Длина дуги кривой $w = Z^{(k-1)}(t)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$. Справедлива

Теорема 4. *Из условия (11) следует, что длина дуги кривой $w = Z^{(k-1)}(t)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$ выражается асимптотической формулой*

$$\begin{aligned} &\int_T^{T+H} \sqrt{1 + \{Z^{(k)}(t)\}^2}\,\mathrm{d}t \\ &\sim 2 \sum_{T \leqslant \bar{t}_0^k \leqslant T+H} |Z^{(k-1)}(\bar{t}_0^k)| - 2 \sum_{T \leqslant \bar{\bar{t}}_0^k \leqslant T+H} |Z^{(k-1)}(\bar{\bar{t}}_0^k)|, \quad T \to \infty \end{aligned} \tag{44}$$

для $H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle$, $k = 1,\dots,K_0$. *При этом, формула* (44) *справедлива безусловно, например для* $H \in \langle T^{1/6+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle$, *(см.* (14)*) и, по гипотезе Линделёфа, для* $H \in \langle T^{2\varepsilon}, T^{1/4}\rangle$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Из условия* (11) *следует соотношение*

$$\tag{45} \begin{aligned} \int_T^{T+H} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t = 2 &\sum_{T\leqslant \bar{t}_0^k \leqslant T+H} |Z^{(k-1)}(\bar{t}_0^k)| \\ -2 &\sum_{T\leqslant \bar{\bar{t}}_0^k \leqslant T+H} |Z^{(k-1)}(\bar{\bar{t}}_0^k)| + O(T^{\Delta}\ln^{k+1} T), \\ &H \in (0, T^{1/4}\rangle,\ k = 1,\dots,K_0. \end{aligned}$$

При помощи Леммы 3 доказательство Теоремы 4 завершается просто. Прежде всего (см. (39))

$$\tag{46} \int_T^{T+H} \sqrt{1+\{Z^{(k)}(t)\}^2}\,\mathrm{d}t = \int_T^{T+H} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t + O(H).$$

Далее, в силу (23) соотношение (45) является асимптотическим для $H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle$. Теперь, из (46), в силу (45), следует (44).

Итак, остается доказать Лемму 3, что будет сделано в п. 8.4.

8.3. Оценка снизу для суммы, содержащей экстремальные значения функции $Z^{(k-1)}(t)$. Из соотношения (45) в силу (23) получаем

Следствие 5. *По условию* (11) *имеет место оценка снизу:*

$$\tag{47} \sum_{T\leqslant \bar{t}_0^k \leqslant T+H} |Z^{(k-1)}(\bar{t}_0^k)| - \sum_{T\leqslant \bar{\bar{t}}_0^k \leqslant T+H} |Z^{(k-1)}(\bar{\bar{t}}_0^k)| > \frac{2}{\pi}(1-2\eta)H\ln^k P,$$

для $H \in \langle T^{\Delta+\varepsilon}, T^{1/4}\rangle$, $k = 1,\dots,K_0$, *где* $0 < \eta$ — *сколь угодно малое число.*

Замечание 12. Разность стоящую на левой стороне соотношения (47) мы назовем избытком хороших локальных экстремумов над плохими локальными экстремумами функции $Z^{(k-1)}(t)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$.

Далее отметим, что, исходя из формулы Римана-Зигеля для $Z^{(k)}(t)$ (см. (6), $H \in (0, \sqrt[4]{T}\rangle \longrightarrow U \in (0, T^{1/2+2\varepsilon}\rangle)$ и применяя простые методы для оценок остаточных членов, нетрудно получить асимптотическую формулу:

$$\int_T^{T+U} \{Z^{(k)}(t)\}^2 \, dt \sim \frac{1}{4^k(2k+1)} U \ln^{2k+1} T, \quad T \to \infty, \tag{48}$$

для $U = T^{1/2+\varepsilon}$; главный член в асимптотической формуле (48) получается применением формулы суммирования Эйлера-Маклорена (см. [21], стр. 19) к сумме

$$2U \sum_{n<P} \frac{1}{n}\left(\ln \frac{P}{n}\right)^{2k}, \quad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

Поскольку, по неравенству Коши-Буняковского,

$$\int_T^{T+U} |Z^{(k)}(t)| \, dt \leqslant \sqrt{U}\left(\int_T^{T+U} \{Z^{(k)}(t)\}^2 \, dt\right)^{1/2},$$

то из (45) при $\Delta = 1/6$ в силу (23), (47), (48) получаем

Следствие 6.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi 2^{k-1}}(1-2\eta)U \ln^k T &< \sum_{T \leqslant \bar{t}_0^k \leqslant T+U} |Z^{(k-1)}(\bar{t}_0^k)| - \sum_{T \leqslant \bar{\bar{t}}_0^k \leqslant T+U} |Z^{(k-1)}(\bar{\bar{t}}_0^k)| \\ &< \frac{1}{2^{k+1}\sqrt{2k+1}}(1+\eta)U \ln^{k+1/2} T, \\ &\qquad U = T^{1/2+\varepsilon}, \ T \to \infty, \end{aligned} \tag{49}$$

где $0 < \eta$ — сколь угодно малое число.

Замечание 12. Явно обратим внимание на то обстоятельство, что оценка снизу в (49) особенно близко подходит к оценке сверху — их отношение есть $A(k)\sqrt{\ln T}$, т.е. порядок избытка почти определен.

Замечание 13. В соотношениях (48) и (49), $U = T^{1/2+\varepsilon}$ можно заменить на $U = T^{5/12+\varepsilon}$ (ср. [11]) или даже на степень T с еще меньшим показателем $(27/82 + \varepsilon)$. Так как, с одной стороны, соответствующие оценки очень громоздки и, с другой стороны, получаемые показатели очень далеки от значения $1/6 + \varepsilon$ выступающего в (47) при $\Delta = 1/6$, то мы здесь не будем касаться этого воспроса.

8.4. Доказательство Леммы 3. Прежде всего, в силу Следствия 4, промежуток $\langle T, T+H\rangle$ содержит не меньше чем

$$\left[\frac{H}{T^{\Delta}\psi(T)}\right] > A\frac{T^{\varepsilon}}{\psi(T)}$$

членов последовательности $\{\gamma^k\}$. Пусть

$$T \leqslant \gamma_1^k < \gamma_2^k < \ldots < \gamma_N^k \leqslant T+H$$

(нижние индексы являются здесь относительными, ср. п. 8.1). Так как $Z^{(k)}(t)$ сохраняет знак в промежутках $\langle T, \gamma_1^k\rangle$, $\langle \gamma_N^k, T+H\rangle$ то, в силу (22),

$$\int_T^{\gamma_1^k} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t = |Z^{(k-1)}(\gamma_1^k) - Z^{(k-1)}(T)| = O(T^{\Delta}\ln^{k+1} T),$$

$$\int_{\gamma_N^k}^{T+H} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t = O(T^{\Delta}\ln^{k+1} T).$$

Следовательно,

$$\int_T^{T+H} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1}\int_{\gamma_n^k}^{\gamma_{n+1}^k} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t + O(T^{\Delta}\ln^{k+1} T). \tag{50}$$

Очевидно

$$0 < \int_{\gamma_n^k}^{\gamma_{n+1}^k} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t = \pm\left\{Z^{(k-1)}(\gamma_{n+1}^k) - Z^{(k-1)}(\gamma_n^k)\right\},$$

где знаки $\pm$ соответствуют случаям $Z^{(k)}(t) \gtrless 0$.

Так как, далее

$$\int_{\bar{\gamma}_n^k}^{\bar{\gamma}_{n+1}^k} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t = |Z^{(k-1)}(\bar{\gamma}_{n+1}^k)| + |Z^{(k-1)}(\bar{\gamma}_n^k)|,$$

$$\int_{\bar{\gamma}_n^k}^{\bar{\bar{\gamma}}_{n+1}^k} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t = |Z^{(k-1)}(\bar{\gamma}_n^k)| - |Z^{(k-1)}(\bar{\bar{\gamma}}_{n+1}^k)|,$$

$$\int_{\bar{\bar{\gamma}}_n^k}^{\bar{\gamma}_{n+1}^k} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t = |Z^{(k-1)}(\bar{\gamma}_{n+1}^k)| - |Z^{(k-1)}(\bar{\bar{\gamma}}_n^k)|,$$

то, из (50), в силу (22), принимая во внимание все возможные способы чередования хороших и плохих корней уравнения (41), получаем соотношение

$$\int_T^{T+H} |Z^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t = 2\sum_{T\leqslant\bar{\gamma}^k\leqslant T+H} |Z^{(k-1)}(\bar{\gamma}^k)|$$
$$-2\sum_{T\leqslant\bar{\bar{\gamma}}^k\leqslant T+H} |Z^{(k-1)}(\bar{\bar{\gamma}}^k)| + O(T^{\Delta}\ln^{k+1} T).$$

Переходя в этом соотношении к последовательности $\{t_0^k\} = \{\bar{t}_0^k\} \cup \{\bar{\bar{t}}_0^k\}$, получаем (45).

9. Заключительные замечания

9.1. Оценки снизу. Отметим, что метод доказательства Теоремы 3 позволяет получить и следующие оценки снизу:

(А) Пусть $\{g_\nu(\tau)\}$ — семейство последовательностей, определенное условием (ср. [7] и [11], (6))

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{1}{2}\left(\pi\nu + \tau - \frac{\pi}{2}\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots, \ \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Пусть $\mathbb{G}_3(x)$, $\mathbb{G}_4(y)$ — семейства несвязных множеств, которые определены на основе $\{g_\nu(\tau)\}$ способом (9).

Имеют место (использованы формулы (1), (5)) оценки снизу:

$$\int_{\mathbb{G}_3^+(x)\cup\mathbb{G}_4^+(y)} |Z(t)Z'(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{1}{\pi}(1-\delta)(\sin x)U\ln T,$$

$$\int_{\mathbb{G}_3^-(x)\cup\mathbb{G}_4^-(y)} |Z(t)Z'(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{1}{\pi}(1-\delta)(\sin y)U\ln T,$$

для $U = T^{1/2+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon, \delta$ — сколь угодно малые числа.

(Б) Пусть $\{k_\nu(\tau)\}$ — семейство последовательностей, определенное условием (ср. (7) и [13], (9))

$$\vartheta_1[k_\nu(\tau)] = \frac{1}{3}\left(\pi\nu + \tau - \frac{\pi}{2}\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots, \ \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Пусть $\mathbb{G}_5(x)$, $\mathbb{G}_6(y)$ — семейства несвязных множеств, которые определены на основе $\{k_\nu(\tau)\}$ способом (9).

Имеют место (для оценок остаточных членов использован метод работы [13]) оценки снизу:

$$\int_{\mathbb{G}_5^+(x)\cup\mathbb{G}_6^+(y)} Z^2(t)|Z'(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{1}{\pi}(1-\delta)(\sin x)V\ln T,$$

$$\int_{\mathbb{G}_5^-(x)\cup\mathbb{G}_6^-(y)} Z^2(t)|Z'(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{1}{\pi}(1-\delta)(\sin y)V\ln T,$$

для $V = T^{13/16+2\varepsilon}$.

Замечание 14. Знаковые множества

$$\mathbb{G}_3^+(x) \cup \mathbb{G}_4^+(x), \quad \mathbb{G}_3^-(x) \cup \mathbb{G}_4^-(x)$$

решают следующую геометрическую задачу (ср. Замечание 4): График несвязной кривой

$$w = \tfrac{1}{2}\{Z(t)\}^2, \quad t \in \mathbb{G}_3(x) \cup \mathbb{G}_4(x)$$

разбить на две несвязные кривые, асимптотически равных длин, и, одновременно, задачу (см. Замечание 5) о разбиении несвязной фигуры, соответствующей графику несвязной кривой

$$Z(t)Z'(t), \quad t \in \mathbb{G}_3(x) \cup \mathbb{G}_4(x).$$

Аналогичным способом, знаковые множества

$$\mathbb{G}_5^+(x) \cup \mathbb{G}_6^+(x), \quad \mathbb{G}_5^-(x) \cup \mathbb{G}_6^-(x)$$

решают соответствующие геометрические задачи для несвязной кривой

$$w = \tfrac{1}{3}\{Z(t)\}^3, \quad t \in \mathbb{G}_5(x) \cup \mathbb{G}_6(x).$$

Замечание 15. Все приведенные результаты обобщаются и на случай кривых:

$$w = \frac{1}{l}\{Z^{(k-1)}(t)\}^l, \quad l = 2,3,\ k = 1,\dots,K_0.$$

9.2. Длины дуг несвязных кривых. Метод доказательства Теоремы 4 позволяет получить и следующие асимптотические формулы (ср. (44)):

(A) Для длины дуги кривой $w = \frac{1}{2}Z^2$ (т.е. с точностью до множителя 2π и для площади поверхности тела вращения, образованного вращением кривой $w = Z(t)$, $t \in \langle T, T+U\rangle$ вокруг оси $0t$):

$$\int_T^{T+U} \sqrt{1 + \{Z(t)Z'(t)\}^2}\,\mathrm{d}t \sim \sum_{T \leqslant \bar{t}_0 \leqslant T+U} Z^2(\bar{t}_0) - \sum_{T \leqslant \bar{\bar{t}}_0 \leqslant T+U} Z^2(\bar{\bar{t}}_0),$$
$$T \to \infty,$$

для $U = T^{1/2+\epsilon}$, $t_0^1 = t_0$.

(Б) Для длины дуги кривой $w = \frac{1}{3}Z^3$:

$$\int_T^{T+V} \sqrt{1+\{Z^2(t)Z'(t)\}^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{3} \sum_{T\leqslant \bar{t}_0 \leqslant T+V} |Z^3(\bar{t}_0)| - \frac{2}{3} \sum_{T\leqslant \bar{\bar{t}}_0 \leqslant T+V} |Z^3(\bar{\bar{t}}_0)|, \quad T \to \infty,$$

для $V = T^{13/16+2\varepsilon}$.

9.3. Оценки сверху и снизу для некоторых избытков. В направлении Следствия 6 имеют место оценки:

(А) При $T \to \infty$:

$$\frac{2}{\pi}(1-\delta)U\ln T < \sum_{T\leqslant \bar{t}_0 \leqslant T+U} Z^2(\bar{t}_0) - \sum_{T\leqslant \bar{\bar{t}}_0 \leqslant T+U} Z^2(\bar{\bar{t}}_0) < \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\delta)U\ln^2 T, \quad U = T^{1/2+\varepsilon}.$$

(Б) При $T \to \infty$:

$$\frac{3}{\pi}(1-\delta)T\ln T < \sum_{T\leqslant \bar{t}_0 \leqslant 2T} |Z^3(\bar{t}_0)| - \sum_{T\leqslant \bar{\bar{t}}_0 \leqslant 2T} |Z^3(\bar{\bar{t}}_0)| < \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}(1+\delta)T\ln^{7/2} T.$$

По поводу обобщения результатов из 9.2 и 9.3 см. Замечание 15.

Литература

[1] *А. А. Карацуба*: Основы аналитической теории чисел. Москва, 1975.

[2] *А. А. Карацуба*: О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой. Труды МИАН *157* (1981), 49–63.

[3] *А. А. Карацуба*: Дзета-функция Римана и ее нули. Успехи математ. наук *40(5)* (1985), 19–70.

[4] *Ян Мозер*: Об одном новом сделствии из гипотезы Римана. Acta Arith. *25* (1974), 307–311.

[5] *Ян Мозер*: Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой. Acta Arith. *26* (1974), 33–39.

[6] *Ян Мозер*: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана. Acta Arith. *31* (1976), 31–43; *40* (1981), 97–107.

[7] *Ян Мозер*: Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана. Acta Arith. *31* (1976), 45–51.

[8] *Ян Мозер*: О корнях уравнения $Z'(t) = 0$. Acta Arith. *40* (1981), 79–89.

[9] *Ян Мозер*: Новые следствия из формулы Римана-Зигеля. Acta Arith. *42* (1982), 1–10.

[10] *Ян Мозер*: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна-Фридмана. Acta Math. Univ. Comen. *44–45* (1984), 115-125.

[11] *Ян Мозер*: Новые теоремы о среднем в теории дзета-функции Римана. Acta Math. Univ. Comen. *46-47* (1985), 21–40.

[12] *Ян Мозер*: О поведении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ в теории дзета-функции Римана. Acta Math. Univ. Comen. *46-47* (1985), 41–48.

[13] *Ян Мозер*: Кубические теоремы о среднем в теории дзета-функции Римана. Acta Math. Univ. Comen. *50-51* (1987), 133-163.

[14] *Ян Мозер*: Об интегральном равновесии функции $Z(t)$ в теории дзета-функции Римана. Acta Math. Univ. Comen. *50-51* (1987), 165–175.

[15] *Ян Мозер*: Кубические корреляционные формулы в теории дзета-функции Римана. Acta Math. Univ. Comen. *52-53* (1988), 21–48.

[16] *Ян Мозер*: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна-Фридмана II. Acta Math. Univ. Comen. *52-53* (1988), 49–73.

[17] *Ян Мозер*: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна-Фридмана III. Acta Math. Univ. Comen. *54-55* (1988), 53–71.

[18] *Ян Мозер*: Некоторые уравнения состояния, определяемые дзета-функцией Римана. Acta Math. Univ. Comen. *56-57* (1989), 23–45.

[19] *Ян Мозер*: Гипотеза Римана и экстремальные значения функции $Z(t)$. Acta Arith. *56* (1990), 225–236.

[20] *Ян Мозер*: О порядке одной суммы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана. Czech. Math. Journal *41(116)* (1991), 663–684.

[21] *Е. К. Титчмарш*: Теория дзета-функции Римана. ИЛ, Москва, 1953.

[22] *П. Л. Чебышев*: О приближенных выражениях квадратного корня переменной через простые дроби. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, т. 3. Издательство АН СССР, Москва, Ленинград, 1948.

[23] *G. H. Hardy*: Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. C.R. Acad. Sci. *158* (1914), 1012–1014.

[24] *D. H. Lehmer*: On the roots of the Riemann zeta-function. Acta Math. *95* (1956), 291–298.

[25] *A. Selberg*: The zeta-function and the Riemann hypothesis. 10. Skand. Math. Kongr. 1946, 187–200.

[26] *E. C. Titchmarsh*: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV). Quart. J. Math. *5* (1934), 98–105.

[27] *E. C. Titchmarsh*: The zeros of the Riemann zeta-function. Proc. Royal Soc. (A) *151* (1935), 234–255. *157*(1936), 261–263.

[28] The Riemann zeta-function on the critical line, plotted with Mathematica. Wolfram Research, 1990.

Адрес автора: Katedra mat. anal. MFF UKo, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava, Slovakia.