Samuel M. Vovsi

Бесконечные треугольные произведения представлений групп

Mathematica Slovaca, Vol. 27 (1977), No. 4, 337--358

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136154

Math. Slovaca 27, 1977, No. 4, 337—358

БЕСКОНЕЧНЫЕ ТРЕУГОЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

С. М. ВОВСИ

Введение

Пусть K – произвольное, но фиксированное коммутативное кольцо с единицей. Если задано представление некоторой группы Γ относительно K – модуля V, то говорят, что задана пара (V, Γ). Для нас термины «пара» и «представление» являются синонимами.

Настоящая работа делится на две части. Первая часть (§§ 1, 2) посвящена построению обобщенных треугольных произведений представлений и исследованию их свойств. Операция треугольного произведения была введена Б. И. Плоткиным в [1] и оказалась весьма полезной при изучении произведений классов представлений, при исследовании убывающего фундаментального ряда групповых колец и других вопросах. Далее эта операция была обобщена в [2], где, в отличие от [1], рассматриваются треугольные произведения не только конечного, но и бесконечного вполне упорядоченного набора сомножителей. В настоящей статье дается определение треугольного произведения произвольного частично упорядоченного набора представлений, которое обобщает все предыдущие случаи.

Такая общность не является самоцелью: разработанный в §§ 1, 2 аппарат используется во второй части статьи для решения некоторых задач. Первая из этих задач связана с понятиями верхнего радикального и нижнего вербального рядов. Известно, что произвольное многообразие представлений $\mathfrak{X}$ является радикальным классом [3]. Поэтому для любой пары (V, Γ) в V существуют $\mathfrak{X}$-радикал $\mathfrak{X}(V, \Gamma)$ и $\mathfrak{X}$-вербал $\mathfrak{X}^*(V, \Gamma)$. Исходя из этого, в V можно обычным образом построить верхний радикальный и нижний вербальный $\mathfrak{X}$-ряды (вообще говоря, трансфинитной длины). Сразу же возникает вопрос: как связаны между собой длины этих двух $\mathfrak{X}$-рядов?

Напомним в связи с этим два результата из теории групп. Если $\mathfrak{X}$ – наследственный радикальный класс групп, не замкнутый по расширениям, то для любого ординала α существует группа G, у которой верхний $\mathfrak{X}$-ряд доходит до G в точности через α шагов [4]. Если $\mathfrak{X}$ – предмногообразие групп, не замкнутое по расширениям, то для любого ординала α существует группа G, у которой нижний $\mathfrak{X}$-ряд доходит до нуля через α шагов [5, 6]. Аналогичные утверждения можно доказать для радикальных классов и предмногообразий пар. Доказательства их особого интереса не представляют, т.к. по существу являются повторением своих групповых прообразов с использованием треугольных произведений пар вместо сплетений групп. Однако тот характерный именно для ситуации представлений факт, что многообразие представлений одновременно есть радикальный класс, приводит к существенно более сложной задаче: если $\mathfrak{X}$ – нетривиальное многообразие представлений, α и β – произвольные ординалы, то существует ли пара (V, Γ), у которой верхний $\mathfrak{X}$-ряд доходит до V в точности через α шагов, а нижний $\mathfrak{X}$-ряд доходит до нуля в точности через β шагов? Ясно, во-первых, что если такая пара существует и один из ординалов α, β конечен, то необходимо $\alpha=\beta$. Таким образом, задача имеет смысл лишь для бесконечных α и β. Положительное решение ее для любых таких ординалов получено в § 3 (при условии, что основное кольцо K является полем). Иными словами, длины верхнего и нижнего $\mathfrak{X}$ – рядов для любого многообразия $\mathfrak{X}$ в общем случае не зависят друг от друга.

В § 4 на основе треугольных произведений вводится конструкция сплетенной треугольной степени представления, которая позволяет строить широкий класс бесконечномерных неприводимых представлений. С помощью этой конструкции строятся примеры неприводимых, но не строго неприводимых представлений, которые аналогичны примерам Ф. Холла [7] простых, но не строго простых групп.

1. Определение треугольных произведений

Мы будем далее вместо слова «представление» в основном употреблять более короткий термин «пара». Пусть Λ – произвольное частично упорядоченное (ч.у.) множество и пусть для каждого $\alpha \in \Lambda$ задана пара $(A_\alpha, \Sigma_\alpha)$.

Возьмем прямое произведение этих пар (V, Σ). Здесь

$$V=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha, \quad \Sigma=\prod_{\alpha\in\Lambda}\Sigma_\alpha$$

и действие Σ в V определено покомпонентно. Для каждого $\alpha \in \Lambda$ определим в V два подмодуля

$$V_\alpha=\bigoplus_{\lambda\leq\alpha} A_\lambda, \quad V_\alpha^0=\bigoplus_{\lambda<\alpha} A_\lambda$$

(если α – минимальный элемент в Λ, то положим $V_\alpha^0=0$). Тогда множество, состоящее из всех V_α и всех V_α^0, $\alpha \in \Lambda$, частично упорядочено по включению: если $\alpha < \beta$, то

$$V_\alpha^0 \subset V_\alpha \subseteq V_\beta^0 \subset V_\beta .$$

Пусть теперь $\tilde{\Phi}$ есть множество всех тех элементов из $\operatorname{Aut} V$, которые стабилизируют системы факторов V_α / V_α^0, $\alpha \in \Lambda$. Через Φ обозначим подмножество всех тех $\varphi \in \tilde{\Phi}$, которые удовлетворяют следующему условию дискретности: на всех, кроме конечного числа слагаемых A_α, φ действует тождественно. Ясно, что $\tilde{\Phi}$ и Φ являются подгруппами в $\operatorname{Aut} V$.

Пусть теперь $(V, \bar{\Sigma})$ – уточнение пары (V, Σ). Тогда $\bar{\Sigma}$ можно расматривать как подгруппу в $\operatorname{Aut} V$, причем легко видеть, что $\tilde{\Phi} \cap \bar{\Sigma} = 1$. Далее, так как $\tilde{\Phi}$ действует тождественно в факторах V_α / V_α^0, а V_α и V_α^0 допустимы относительно $\bar{\Sigma}$, то $\tilde{\Phi}$ инвариантно в $\langle \tilde{\Phi}, \bar{\Sigma} \rangle$. Достаточно очевидно, что Φ также инвариантно относительно $\bar{\Sigma}$. Поэтому из всего сказанного следует, что подгруппы $\langle \tilde{\Phi}, \bar{\Sigma} \rangle$ и $\langle \Phi, \bar{\Sigma} \rangle$ группы $\operatorname{Aut} V$ распадаются в полупрямые произведения:

$$\langle \tilde{\Phi}, \bar{\Sigma} \rangle = \tilde{\Phi} \lambda \bar{\Sigma}, \quad \langle \Phi, \bar{\Sigma} \rangle = \Phi \lambda \bar{\Sigma},$$

следовательно, мы имеем точные пары

$$(V, \tilde{\Phi} \lambda \bar{\Sigma}), \quad (V, \Phi \lambda \bar{\Sigma}). \tag{1}$$

Естественный эпиморфизм $\Sigma \to \bar{\Sigma}$ приводит к полупрямым произведениям $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Phi} \lambda \Sigma$ и $\Gamma = \Phi \lambda \Sigma$ и индуцирует эпиформизмы $\tilde{\mu}: \tilde{\Gamma} \to \tilde{\Phi} \lambda \bar{\Sigma}$ и $\mu: \Gamma \to \Phi \lambda \bar{\Sigma}$. Поэтому представления (1) с помощью эпиморфизмов $\tilde{\mu}$ и μ «оттягиваются» до представлений:

$$(V, \tilde{\Gamma}) = (V, \tilde{\Phi} \lambda \Sigma), \quad (V, \Gamma) = (V, \Phi \lambda \Sigma),$$

которые называются соответственно полным и дискретным треугольными произведениями пар $(A_\alpha, \Sigma_\alpha)$ по множеству Λ и обозначаются

$$(V, \tilde{\Gamma}) = \tilde{\nabla}_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha, \Sigma_\alpha), \quad (V, \Gamma) = \nabla_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha, \Sigma_\alpha). \tag{2}$$

Из построений следует, что если Ψ_α есть ядро пары $(A_\alpha, \Sigma_\alpha)$, то ядрами обеих пар $(V, \tilde{\Gamma})$ и (V, Γ) является

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} \Psi_\alpha .$$

Таким образом, треугольные произведения точных пар являются точными.

Отметим еще, что если все сомножители $(A_\alpha, \Sigma_\alpha)$ изоморфны одной паре (A, Σ), то вместо обозначений (2) будут употребляться обозначения

$$\tilde{\nabla}(A, \Sigma)^\Lambda, \quad \nabla(A, \Sigma)^\Lambda ;$$

эти пары будем называть треугольными Λ – степенями пары (A, Σ) (соответственно полной и дискретной).

Дадим теперь другое, «внутренее» определение треугольных произведений. Мы приведем его только для дискретных произведений, так как в полном случае все делается аналогично.

Пусть (V, Γ) – произвольная пара, Λ – ч.у. множество, $(A_\alpha, \Sigma_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, – набор подпар в (V, Γ). Будем говорить, что (V, Γ) раскладывается в дискретное треугольное произведение своих подпар $(A_\alpha, \Sigma_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, если выполняются следующие условия:

1) Пусть $\Sigma = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in \Lambda \rangle$. Тогда (V, Σ) раскладывается в прямое произведение своих подпар $(A_\alpha, \Sigma_\alpha)$.

2) Рассмотрим в V подмодули

$$V_\alpha = \bigoplus_{\lambda \leq \alpha} A_\lambda \quad \text{и} \quad V_\alpha^0 = \bigoplus_{\lambda < \alpha} A_\lambda, \quad \alpha \in \Lambda.$$

Тогда в Γ существует нормальный делитель Φ, действующий в V точно, у которого естественный образ в $\operatorname{Aut} V$ совпадает со стабилизатором системы факторов $\{ V_\alpha / V_\alpha^0 | \alpha \in \Lambda \}$ и который на почти всех прямых слагаемых A_α действует тождественно.

3) $\Gamma = \Phi \lambda \Sigma$.

Для доказательства эквивалентности этого определения предыдующему надо показать, что если (V, Γ) удовлетворяет условиям 1)–3), то

$$(V, \Gamma) \cong \mathop{\nabla}_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha, \Sigma_\alpha).$$

Деляется это непосредственной проверкой.

Замечание. Треугольные произведения пар можно определить и на основе декартовых произведений. А именно, если $(A_\alpha, \Sigma_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, – произвольные пары, то по аналогии с предыдущим можно построить представления

$$(V, \tilde{\Phi} \lambda \tilde{\Sigma}), \quad (V, \Phi \lambda \tilde{\Sigma}),$$

где V, $\tilde{\Phi}$, Φ – те же, что и раньше, а $\tilde{\Sigma}$ – декартово произведение групп Σ_α, $\alpha \in \Lambda$, действующее в V понятным образом. Нам не потребуются в этой статье конструкции такого типа, однако заметим, что в некоторых случаях они могут оказаться полезными (например, при доказательстве обобщенных теорем типа теоремы Калужнина–Краснера о сплетениях).

2. Свойства треугольных произведений

Пусть Λ – непустое ч.у. множество. Отрезком множества Λ называется такое непустое подмножество Ω, что если $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ и $\omega_1 < \lambda < \omega_2$, то $\lambda \in \Omega$.

Специальными видами отрезков являются:

а) нижний отрезок, т.е. такой, что если $\lambda < \omega \in \Omega$, то $\lambda \in \Omega$;

б) верхний отрезок, т.е. такой, что если $\lambda > \omega \in \Omega$, то $\lambda \in \Omega$.

Разбиением ч.у. множества Λ называется представление его в виде объединения непересекающихся непустых отрезков Λ_i, $i \in I$, удовлетворяющих условию: если $i \neq j, a \in \Lambda_i, \beta \in \Lambda_j$, и $\alpha < \beta$, то всякий элемент из Λ_i меньше всякого элемента из Λ_j. Ясно, что если Λ линейно упорядочено, то всякое представление его в виде объединения непересекающихся отрезков является разбиением. Заметим, что разбиение ч.у. множества Λ на отрезки Λ_i, $i \in I$, индуцирует частичный порядок на множестве I, так что последнее также будем считать ч.у.

Пусть Λ – ч.у. множество, $\{(A_\alpha, \Sigma_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ – набор пар,

$$(V, \tilde{\Gamma}) = \underset{\alpha \in \Lambda}{\tilde{\nabla}} (A_\alpha, \Sigma_\alpha) \text{ и } (V, \Gamma) = \underset{\alpha \in \Lambda}{\nabla} (A_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

– соответствующие треугольные произведения. Результаты настоящего параграфа относятся к этим фиксированным парам.

Лемма 1. *Если Ω – подмножество в Λ, то пара*

$$\underset{\alpha \in \Omega}{\tilde{\nabla}} (A_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

изоморфно содержится в $(V, \tilde{\Gamma})$, а пара

$$\underset{\alpha \in \Omega}{\nabla} (A_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

– в (V, Γ).

Доказательство этой леммы несложно, поэтому мы его опускаем. Следующее предложение показывает, что операция дискретного (но не полного!) треугольного произведения ассоциативна.

Предложение 1. *Пусть*

$$\Lambda = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i$$

– разбиение множества Λ,

$$(H_i, \Gamma_i) = \underset{\alpha \in \Lambda_i}{\nabla} (A_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

для каждого $i \in I$. Тогда

$$(V, \Gamma) \cong \underset{i \in I}{\nabla} (H_i, \Gamma_i).$$

Доказательство. По лемме 1 пары (H_i, Γ_i), $i \in I$, можно считать подпарами в (V, Γ). Покажем, что (V, Γ) раскладывается в треугольное произведение этих подпар, т.е. проверим, что выполняются условия 1)–3) из § 1.

1. Напомним, что $\Gamma = \Phi\lambda\Sigma$, $\Gamma_i = \Phi_i\lambda\Sigma_i$, где

$$\Sigma = \prod_{\alpha \in \Lambda} \Sigma_\alpha, \quad \Sigma_i = \prod_{\alpha \in \Lambda_i} \Sigma_\alpha,$$

а Φ и Φ_i – стабилизаторы соответствующих систем. При этом Φ_i есть множество всех тех $\varphi \in \Phi$, для которых:

а) если $\alpha \notin \Lambda_i$, то φ действует тождественно на A_α ;

б) H_i инвариантно относительно φ.

Так как Γ_i действует только на подмодули H_i, то различные Γ_i попарно перестановочны. Очевидно также, что $\Gamma_i \cap \Gamma_j = 1$ при $i \neq j$. Следовательно,

$$(V, \langle \Gamma_i | i \in I \rangle) = \prod_{i \in I} (H_i, \Gamma_i).$$

2. Обозначим через Ψ подгруппу всех тех $\varphi \in \Phi$, которые действуют тождественно в каждом факторе

$$\bigoplus_{i \leq j} H_i / \bigoplus_{i<j} H_i, \quad j \in I. \tag{1}$$

Тогда все элементы с этим свойством из $\operatorname{Aut} V$ содержатся в Ψ. Действительно, всякий автоморфизм модуля V, который действует тождественно в факторах (1), будет действовать тождественно и в факторах $V_\alpha / V_\alpha^\circ$, $\alpha \in \Lambda$. Поэтому этот автоморфизм содержится в Φ и, следовательно, в Ψ.

Так как система всех подмодулей

$$\bigoplus_{i \leq j} H_i, \quad \bigoplus_{i<j} H_i \quad (j \in I)$$

инвариантна относительно Γ, а Ψ «централизует» эту систему, и так как централизатор всегда нормален в нормализаторе, то $\Psi \lhd \Gamma$.

3. Осталось доказать, что

$$\Gamma = \Psi\lambda \prod_{i \in I} \Gamma_i.$$

Сначала покажем, что $\Psi \cap \prod \Gamma_i = 1$. Так как $\Psi \subseteq \Phi$, то ясно, что $\Psi \cap \prod \Gamma_i \subseteq \prod \Phi_i$. Поэтому если $\psi \in \Psi \cap \prod \Gamma_i$, то $\psi = \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n$, где $\varphi_k \in \Phi_{i_k}$. Каждое H_i инвариантно относительно всех φ_{i_k}, поэтому H_i инвариантно относительно ψ. Из определения Ψ следует, что ψ действует тождественно в каждом H_i, т.е. $\psi = 1$.

Покажем, что

$$\langle \Psi, \prod_{i \in I} \Gamma_i \rangle = \Gamma.$$

Так как $\Gamma = \Phi\lambda\Sigma$ и $\Sigma \subseteq \Pi\, \Gamma_i$, то достаточно проверить, что выполняется включение

$$\Phi \subseteq \Psi\lambda\Pi\, \Gamma_i. \tag{2}$$

Это наиболее трудная часть доказательства.

Возмем произвольный $\varphi \in \Phi$. Из условия дискретности следует, что в модуле

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$$

только на конечном числе слагаемых A_α автоморфизм φ действует нетривиально. Поэтому φ действует нетривиально только на конечном числе H_i, $i \in I$, пусть этими слагаемыми являются H_{i_1}, H_{i_2}, ..., H_{i_n}.

Зафиксируем некоторое $i \in I$ и обозначим

$$H_i' = \bigoplus_{\alpha \notin \Lambda_i} A_\alpha.$$

Тогда $V = H_i \oplus H_i'$, поэтому для любого $g \in V$ элемент $g \circ \varphi$ можно представить в виде

$$g \circ \varphi = g_\varphi + g', \quad \text{где} \quad g_\varphi \in H_i,\ g' \in H_i'.$$

Определим отображение $\varphi_i : H_i \to H_i$ формулой

$$\forall h \in H_i : h\varphi_i = h_\varphi$$

и покажем, что φ_i есть автоморфизм H_i. Ясно, что φ_i линейно, поэтому достаточно проверить его инъективность и сюръективность.

а) Инъективность. Пусть $a, b \in H_i$ и $a\varphi_i = b\varphi_i$, т.е. $a_\varphi = b_\varphi$. Тогда из равенств

$$a \circ \varphi = a_\varphi + a', \ b \circ \varphi = b_\varphi + b' \ (a_\varphi, b_\varphi \in H_i\,;\ a', b' \in H_i')$$

имеем

$$(a - b) \circ \varphi = a' - b' \in H_i'. \tag{3}$$

Если $a - b \neq 0$, то $a - b$ однозначно представим в виде

$$a - b = c_1 + c_2 + \ldots + c_k,$$

где $c_j \neq 0$, $c_j \in A_{\lambda_j}$, $\lambda_j \in \Lambda_i$. Без ограничения общности можно считать, что λ_1 есть максимальный элемент ч.у. множества $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$. Тогда из определения Φ следует, что $(a - b) \circ \varphi = c_1 + d$, где

$$d \in \bigoplus_{\lambda \neq \lambda_1} A_\lambda .$$

Это противоречит (3), откуда $a - b = 0$ и φ инъективно.

б) Сюръективность. Пусть $h \in H_i$. Существует $g \in V$, такой, что $g \circ \varphi = h$. Представим g в виде

$$g = a + b\,; \quad a \in H_i,\ b \in H_i' .$$

Тогда

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_k, \quad b = b_1 + b_2 + \ldots + b_l,$$

где все a_r и b_s отличны от нуля, $a_r \in A_{\lambda_r}$ $(\lambda_r \in \Lambda_i)$, $b_s \in A_{\mu_s}$ $(\mu_s \notin \Lambda_i)$. Допустим, что среди всех μ_s есть такой элемент μ, что $\mu \nless \lambda_r$ для каждого r, $1 \leqslant r \leqslant k$. Будем считать, что μ_1 – это максимальный элемент с таким свойством среди всех μ_s, тогда μ_1 необходимо максимален в множестве $\{\mu_s | 1 \leqslant s \leqslant l\}$. Из определения Φ следует, что

$$g \circ \varphi = \sum_{r=1}^{k} (a_r \circ \varphi) + \sum_{s=1}^{l} (b_s \circ \varphi) = b_1 + c, \text{ где } c \in \bigoplus_{\lambda \neq \mu_1} A_\lambda ,$$

откуда $g \circ \varphi \notin H_i$, что невозможно. Следовательно, каждый μ_s меньше некоторого λ_r, а поэтому и каждого λ_r, $1 \leqslant r \leqslant k$ (по свойству разбиения). Далее

$$h = g \circ \varphi = a \circ \varphi + b \circ \varphi = a_\varphi + a' + b_\varphi + b' = (a_\varphi + b_\varphi) + (a' + b'),$$

откуда $h = a_\varphi + b_\varphi$. Из того, что каждое μ_s меньше каждого λ_r, следует, что

$$b \circ \varphi = \sum_{s=1}^{l} (b_s \circ \varphi) \in \bigoplus_{j<i} H_j \subseteq H_i' .$$

Поэтому $b_\varphi = 0$, $h = a_\varphi = a\varphi_i$. Следовательно, φ_i сюръективно.

Таким образом, $\varphi_i \in \operatorname{Aut} H_i$. Продолжим φ_i тривиальным образом до автоморфизма модуля V, который также будем обозначать через φ_i. Иными словами, элемент $\varphi_i \in \operatorname{Aut} V$ определяется так:

$$g\varphi_i = g_\varphi, \text{ если } g \in H_i\,; \quad g\varphi_i = g, \text{ если } g \in H_i' . \tag{4}$$

Достаточно очевидно, что φ_i действует тождественно во всех факторах $V_\alpha / V_\alpha^\circ$, поэтому из (4) следует, что $\varphi_i \in \Phi_i \subseteq \Gamma_i$.

Теперь уже можно доказать включение (2). Мы знаем, что φ действует нетривиально на $H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_n}$. Используя описанный выше процесс, для каждого i_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ построим автоморфизм $\varphi_{i_m} \in \Phi_{i_m}$ и обозначим

$$\psi = \varphi \varphi_{i_1}^{-1} \varphi_{i_2}^{-1} \ldots \varphi_{i_n}^{-1} .$$

Докажем, что $\psi \in \Psi$, т.е. что для любого $j \in I$ и любого $h \in H_j$

$$h\circ\psi = h + g, \text{ где } g \in \bigoplus_{i<j} H_i. \tag{5}$$

Если j отлично от всех $i_1, i_2, \ldots, i_n$, то φ и все φ_{i_m} действуют на h тождественно, поэтому $h\circ\psi = h$. Если же j совпадает с некоторым i_m (для определенности пусть $j = i_1$), то $h\circ\varphi$ можно представить в виде

$$h\circ\varphi = h_\varphi + h', \text{ где } h_\varphi \in H_j,\ h' \in \bigoplus_{i<j} H_i.$$

По определению φ_{i_1} имеем $h\circ\varphi_{i_1} = h_\varphi$, откуда $h_\varphi\circ\varphi_{i_1}^{-1} = h$ и

$$h\circ(\varphi\varphi_{i_1}^{-1}) = (h_\varphi + h')\circ\varphi_{i_1}^{-1} = h + h'\circ\varphi_{i_1}^{-1} \tag{6}$$

Так как

$$\bigoplus_{i<j} H_i$$

инвариантно относительно Γ, то

$$h'\circ\varphi_{i_1}^{-1}\varphi_{i_2}^{-1}\ldots\varphi_{i_n}^{-1} \in \bigoplus_{i<j} H_i.$$

Далее, так как $\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}, \ldots, \varphi_{i_n}$ действуют на $H_{i_1} = H_j$ тождественно, то учитывая (6), имеем:

$$h\circ\psi = (h\circ\varphi\varphi_{i_1}^{-1})\circ\varphi_{i_1}^{-1}\ldots\varphi_{i_n}^{-1} = h\circ\varphi_{i_2}^{-1}\ldots\varphi_{i_n}^{-1} + h'\circ\varphi_{i_1}^{-1}\varphi_{i_2}^{-1}\ldots\varphi_{i_n}^{-1} =$$

$$= h + h'\circ\varphi_{i_1}^{-1}\varphi_{i_2}^{-1}\ldots\varphi_{i_n}^{-1} = h + g, \text{ где } g \in \bigoplus_{i<j} H_i.$$

Тем самым (5) доказано, откуда $\psi \in \Psi$. Поэтому

$$\varphi = \psi\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\ldots\varphi_{i_n} \in \Psi\lambda\left(\prod_{i\in I} \Gamma_i\right),$$

откуда следует (2). Доказательство закончено.

Если Ω – непустое подмножество в Λ, то обозначим

$$V_\Omega = \bigoplus_{\alpha\in\Omega} A_\alpha, \quad \Sigma_\Omega = \prod_{\alpha\in\Omega} \Sigma_\alpha.$$

Две пары условимся называть эквивалентными, если их уточнения изоморфны.

Лемма 2. *Если Ω – нижний отрезок множества Λ, то пары $(V/V_\Omega, \tilde{\Gamma})$ и $(V/V_\Omega, \Gamma)$ эквивалентны*

$$\tilde{\nabla}_{\alpha\in\Lambda\setminus\Omega} (A_\alpha, \Sigma_\alpha) \text{ и } \nabla_{\alpha\in\Lambda\setminus\Omega} (A_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

соответственно.

Доказательство. (Заметим, что V_Ω в данном случае $\tilde{\Gamma}$-инвариантно, так что все пары из формулировки леммы имеют смысл). Мы рассмотрим только дискретное произведение, так как полный случай доказывается аналогично. Имеем

$$(V, \Gamma) = \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha, \Phi\lambda \prod_{\alpha \in \Lambda} \Sigma_\alpha \Big), \quad \nabla_{\alpha \in \Lambda \setminus \Omega} (A_\alpha, \Sigma_\alpha) = \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda \setminus \Omega} A_\alpha, \Phi_0\lambda \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Omega} \Sigma_\alpha \Big).$$

Обозначив последнюю пару через (V_0, Γ_0), определим эпиморфизм μ: $(V, \Gamma) \to (V_0, \Gamma_0)$ следующим образом: μ: $V \to V_0$ и

$$\mu\colon \prod_{\alpha \in \Lambda} \Sigma_\alpha \to \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Omega} \Sigma_\alpha$$

– естественные проекции, а μ: $\Phi \to \Phi_0$ есть ограничение элементов из $\Phi = \operatorname{Aut} V$ на подмодуль V_0.

Нетрудно проверить, что последнее отображение сюръективно, и что таким образом действительно получается эпиморфизм пар μ: $(V, \Gamma) \to (V_0, \Gamma_0)$. Ядром этого эпиморфизма слева является V_Ω, поэтому μ можно пропустить через $(V/V_\Omega, \Gamma)$. Получим правый эпиморфизм

$$\mu_1\colon (V/V_\Omega, \Gamma) \to (V_0, \Gamma_0),$$

следовательно пары $(V/V_\Omega, \Gamma)$ и (V_0, Γ_0) эквивалентны.

Начиная с этого места и до конца статьи основное кольцо K является полем, а все модули – векторными пространствами над K.

Наша ближайшая цель – описать инвариантные подпространства представлений $(V, \tilde{\Gamma})$ и (V, Γ). Предварительно введем одно обозначение. Если Ω – подмножество в Λ, то через Ω_1 обозначим множество всех максимальных элементов в Ω и пусть $\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_1$. Тогда, в частности, $V_\Omega = V_{\Omega_0} \oplus V_{\Omega_1}$, $\Sigma_\Omega = \Sigma_{\Omega_0} \times \Sigma_{\Omega_1}$.

Предложение 2. *Если H – подпространство в V, то следующие условия эквивалентны:*

(а) H инвариантно относительно $\tilde{\Gamma}$;

(б) H инвариантно относительно Γ;

(в) существует такой нижний отрезок Ω множества Λ, что $H = V_{\Omega_0} \oplus B$, где B – некоторое Σ_{Ω_1} – инвариантное подпространство в V_{Ω_1}.

Доказательство. Очевидно, что (а)$\Rightarrow$(б) и (в)$\Rightarrow$(а), поэтому надо доказать лишь импликацию (б)$\Rightarrow$(в). Обозначим через π_α проекцию пространства

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$$

на прямое слагаемое A_α. Рассмотрим в Λ подмножество

$$\Omega = \{\alpha \in \Lambda \,|\, H\pi_\alpha \neq 0\}.$$

Докажем, что

$$(\alpha \in \Omega)\ \&\ (\lambda < \alpha) \Rightarrow (A_\lambda \subseteq H). \tag{7}$$

Действительно, если $\alpha \in \Omega$, то существует элемент $h \in H$, такой, что

$$h = a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_n}, \text{ где } 0 \neq a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i},$$

причем α совпадает с одним из α_i. Пусть $\lambda < \alpha$ и b – произвольный элемент из A_λ. Выберем в V базис, проходящий через подпространства A_β $(\beta \in \Lambda)$ и содержащий все a_{α_i}. Тогда если φ – автоморфизм пространства V, переводящий a_α в $a_\alpha + b$ и не двигающий все остальные базисные элементы, то очевидно, что $\varphi \in \Phi$ и $h \circ \varphi = h + b$. Так как H Γ – инвариантно, то $h \circ \varphi \in H$, откуда $b = h \circ \varphi - h \in H$. Следовательно, $A_\lambda \subseteq H$, что и требовалось доказать. В частности, отсюда следует, что Ω является нижним отрезком множества Λ.

Далее доказательство разбивается на два случая.

1) Ω не имеет максимальных элементов. Из доказанного выше следует, что если $\lambda \in \Omega$, то $A_\lambda \subseteq H$. Поэтому

$$V_\Omega = \bigoplus_{\lambda \in \Omega} A_\lambda \subseteq H.$$

Обратное включение очевидно. Таким образом, $H = V_\Omega$, а так как в этом случае $\Omega = \Omega_0$, то $H = V_{\Omega_0}$.

2) Ω имеет максимальные элементы. Множество Ω_0 также является нижним отрезком множества Λ, причем для всякого $\alpha \in \Omega_0$ существует $\beta \in \Omega$, такой, что $\alpha < \beta$. По доказанному выше $V_{\Omega_0} \subseteq H$. Включение $H \subseteq V_\Omega$ очевидно, поэтому H однозначно представимо в виде

$$H = V_{\Omega_0} \oplus B, \text{ где } B \subseteq V_{\Omega_1}. \tag{8}$$

При этом B Σ_{Ω_1} – инвариантно, так как в противном случае H не является инвариантным относительно Γ, что невозможно.

Замечание. Пусть множество Λ линейно упорядочено. Из предложения 2 следует, что если H – инвариантное подпространство в V, то либо $H = V_\Omega$ для некоторого нижнего отрезка Ω множества Λ, либо $H = V_\alpha^0 \oplus B$, где $\alpha \in \Lambda$, а B – ненулевое Σ_α – инвариантное подпространство в A_α.

3. Верхние и нижние $\mathfrak{X}$-ряды

В оставшихся параграфах для определенности используются только дискретные треугольные произведения. Пару, у которой область действия есть нулевое пространство, будем называть нулевой.

Лемма 3. [8] *Если* (A, Σ) *и* (B, Φ) – *произвольные пары, то* $\operatorname{var}((A, \Sigma)\nabla(B, \Phi)) = \operatorname{var}(A, \Sigma)\cdot\operatorname{var}(B, \Phi)$.

Предложение 3. *Пусть*

$$(V, \Gamma) = \nabla_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

– произвольное треугольное произведение ненулевых пар, $\mathfrak{X}$ *– собственное многообразие пар. Тогда:*

(а) если Λ *не имеет минимальных элементов, то* $\mathfrak{X}(V, \Gamma) = 0$;

(б) если Λ *не имеет максимальных элементов, то* $\mathfrak{X}^*(V, \Gamma) = V$.

Доказательство. (*а*) Обозначим $H = \mathfrak{X}(V, \Gamma)$ и пусть, как обычно,

$$\Omega = \{\alpha \in \Lambda \mid H\pi_\alpha \neq 0\}.$$

Предположим, что $H \neq 0$. Тогда Ω непусто, а так как Ω есть нижний отрезок и в Λ нет минимальных элементов, то Ω_0 тоже непусто. Кроме того, Ω_0 само является нижним отрезком, поэтому используя еще раз отсутствие в Λ минимальных элементов, получаем, что в Ω_0 существует бесконечная убывающая цепь

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > \alpha_{n+1} > \ldots.$$

Обозначим $\Omega' = \{\alpha_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. По лемме 1 пара

$$(G, \Psi) = \nabla_{\alpha \in \Omega'} (A_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

изоморфно содержится в (V, Γ). По предложению 2 $V_{\Omega_0} \subseteq H$, а так как $\Omega' \subseteq \Omega_0$, то $G \subseteq V_{\Omega_0}$. Учитывая все сказанное, имеем:

$$(G, \Psi) \subseteq (H, \Gamma).$$

Так как $(H, \Gamma) \in \mathfrak{X}$, то и $(G, \Psi) \in \mathfrak{X}$. Но это невозможно, так как собственное многообразие пар по лемме 3 не может содержать бесконечное треугольное произведение ненулевых пар.

(б) Пусть $H = \mathfrak{X}^*(V, \Gamma)$, Ω – то же самое. Если $\Omega \neq \Lambda$, то $\Lambda \backslash \Omega$ непусто, а так как в Λ нет максимальных элементов, то в $\Lambda \backslash \Omega$ найдется бесконечная возрастающая цепь $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$. Так как $H \subseteq V_\Omega$ и $(V/H, \Gamma) \in \mathfrak{X}$, то $(V/V_\Omega, \Gamma) \in \mathfrak{X}$. По леммам 1,2 в $(V/V_\Omega, \Gamma)$ имеется подпара, эквивалентная

$$\nabla_{i=1}^{\infty} (A_{\alpha_i}, \Sigma_{\alpha_i}),$$

поэтому $\mathfrak{X}$ не может быть собственным. Противоречие.

Теорема 1. *Для любого нетривиального многообразия пар* $\mathfrak{X}$ *и любых бесконечных ординалов* α *и* β *существует пара* (V, Γ), *у которой верхний*

$\mathfrak{X}$-ряд доходит до V через α шагов, а нижний $\mathfrak{X}$-ряд доходит до 0 через β шагов.

Доказательство. Рассмотрим множество Λ, состоящее из пар (λ, μ), где λ и μ – всевозможные непредельные ординалы, удовлетворяющие неравенствам $1 \leqslant \lambda \leqslant \alpha$, $1 \leqslant \mu \leqslant \beta$. Определим на Λ отношение порядка, положив

$$(\lambda_1, \mu_1) < (\lambda_2, \mu_2) \Leftrightarrow (\lambda_1 < \lambda_2) \ \& \ (\mu_1 > \mu_2).$$

Тогда Λ становится ч.у. множеством. Для каждой пары $(\lambda, \mu) \in \Lambda$ возьмем изоморфную копию $(A, \Sigma)_{(\lambda, \mu)} = (A_{(\lambda, \mu)}, \Sigma_{(\lambda, \mu)})$ свободной пары многообразия $\mathfrak{X}$ и пусть

$$(V, \Gamma) = \mathop{\nabla}_{(\lambda, \mu) \in \Lambda} (A, \Sigma)_{(\lambda, \mu)} = (V, \Phi\lambda\Sigma).$$

Докажем, что (V, Γ) удовлетворяет условиям теоремы.

1) Докажем, что верхний $\mathfrak{X}$-ряд доходит до V не более, чем через α шагов. Для $\gamma \leqslant \alpha$ положим

$$\Omega_\gamma = \{(\lambda, \mu) \in \Lambda \,|\, \lambda \leqslant \gamma\}, \quad B_\gamma = \bigoplus_{\substack{\lambda \leqslant \gamma \\ 1 \leqslant \mu \leqslant \beta}} A_{(\lambda, \mu)}$$

Тогда Ω_γ есть нижний отрезок, $B_\gamma = V_{\Omega_\gamma}$, следовательно, B_γ инвариантно относительно Γ. Из определений видно, что

$$B_\gamma = \bigcup_{\delta < \gamma} B_\delta$$

для предельных γ. Поэтому в V можно рассмотреть возрастающий ряд

$$0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots B_\gamma \subseteq B_{\gamma+1} \subseteq \ldots B_\alpha = V \qquad (1)$$

Γ — инвариантных подпространств. Достаточно очевидно, что пара $(B_{\gamma+1}/B_\gamma, \Gamma)$ эквивалентна прямому произведению

$$\prod_{\substack{\lambda = \gamma + 1 \\ 1 \leqslant \mu \leqslant \beta}} (A, \Sigma)_{(\lambda, \mu)} \in \mathfrak{X}.$$

Таким образом, (1) есть $\mathfrak{X}$-ряд, длина которого не превосходит α.

2) Докажем, что длина верхнего $\mathfrak{X}$-ряда в (V, Γ) не меньше, чем α. Пусть этот ряд есть

$$0 = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots S_\gamma \subseteq S_{\gamma+1} \subseteq \ldots S_\sigma = V.$$

Докажем индукцией по γ, что $S_\gamma \cap A_{(\lambda, n)} = 0$, если $\lambda > \gamma$, а n – конечное. Тогда $S_\gamma \neq V$ при $\gamma < \alpha$ откуда $\sigma \geqslant \alpha$.

а) Пусть сначала $\gamma = 1$. Предположим, что $0 \neq a \in A_{(\lambda, n)} \cap S_1$, где $\lambda > 1$ и n конечно. Тогда $S_1 \pi_{(\lambda, n)} \neq 0$. Обозначим

$$\Omega=\{(\mu, \nu)|S_1\pi_{(\mu,\nu)}\neq 0\}.$$

Тогда $(\lambda, n)\in\Omega$. Из доказательства предложения 2 (см. (7)) следует, что если $(\mu, \nu)<(\lambda, n)$, то $A_{(\mu,\nu)}\subseteq S_1$. В частности $(1, n+1)<(\lambda, n)$, поэтому $A_{(1,n+1)}\subseteq S_1$.

Обозначим $A_{(\lambda,n)}\cap S_1=H$, тогда $H\neq 0$. Рассмотрим в паре $(A, \Sigma)_{(\lambda,n)}$ подпару $(H, \Sigma_{(\lambda,n)})$. Из результатов работы [1] легко выводится, что в (S_1, Γ), имеется подпара, эквивалентная паре $(G, \Psi)=(A, \Sigma)_{(1,n+1)}\nabla(H, \Sigma_{(\lambda,n)})$. Но это невозможно, так как $(S_1, \Gamma)\in\mathfrak{X}$, а $\operatorname{var}(G, \Psi)=\mathfrak{X}\cdot\operatorname{var}(H, \Sigma_{(\lambda,n)})>\mathfrak{X}$ по лемме 3 (следует учесть, что $H\neq 0$).

б) Предположим, что для всех ординалов, меньших γ, утверждение индукции доказано. Рассмотрим $A_{(\lambda,n)}$, где $\lambda>\gamma$ и n конечно, и докажем, что $S_\gamma\cap A_{(\lambda,n)}=0$. Если γ предельное, то

$$S_\gamma\cap A_{(\lambda,n)}=\left(\bigcup_{\delta<\gamma} S_\delta\right)\cap A_{(\lambda,n)}=\bigcup_{\delta<\gamma}(S_\delta\cap A_{(\lambda,n)})=0$$

(по предположению индукции). Если γ непредельное, то допустим, что $S_\gamma\cap A_{(\lambda,n)}\neq 0$. Тогда $S_\gamma\pi_{(\lambda,n)}\neq 0$, откуда с помощью (7) из § 2 выводится, что $A_{(\mu,\nu)}\subseteq S_\gamma$ при любом $(\mu, \nu)<(\lambda, n)$. В частности, $A_{(\gamma,n+1)}\subseteq S_\gamma$.

Пусть $H=S_\gamma\cap A_{(\lambda,n)}$. Тогда $H+A_{(\gamma,n+1)}=H\oplus A_{(\gamma,n+1)}\subseteq S_\gamma$. В то же время из индуктивного предположения и (7), § 2, следует, что $(H\oplus A_{(\gamma,n+1)})\cap S_{\gamma-1}=0$. Отсюда нетрудно вывести, что пара $(S_\gamma/S_{\gamma-1}, \Gamma)$ обладает фактором, изоморфным паре

$$(A, \Sigma)_{(\gamma,n+1)}\nabla(H, \Sigma_{(\lambda,n)}).$$

Это невозможно, т.к. последняя пара не может содержаться в $\mathfrak{X}$, а $(S_\gamma/S_{\gamma-1}, \Gamma)\in\mathfrak{X}$.

3) Докажем, что нижний $\mathfrak{X}$-ряд пары (V, Γ) доходит до 0 не более, чем через β шагов. Для всякого $\gamma\leqslant\beta$ положим

$$\Omega_\gamma=\{(\lambda, \mu)|\mu>\gamma\},\quad B_\gamma=\bigoplus_{\mu>\gamma} A_{(\lambda,\mu)}.$$

Тогда Ω_γ есть нижний отрезок, $B_\gamma=V_{\Omega_\gamma}$, откуда B_γ инвариантно относительно Γ. Рассмотрим в V убывающий ряд подпространств

$$V\supseteq B_1\supseteq\ldots B_\gamma\supseteq B_{\gamma+1}\supseteq\ldots B_\beta=0. \tag{2}$$

Достаточно очевидно, что в этом ряду на предельных местах стоят пересечения предыдущих членов, и что пара $(B_\gamma/B_{\gamma+1}, \Gamma)$ эквивалентна паре

$$\prod_{\substack{\mu=\gamma+1\\ 1\leqslant\lambda\leqslant\alpha}}(A, \Sigma)_{(\lambda,\mu)}\in\mathfrak{X}.$$

Таким образом, (2) есть $\mathfrak{X}$-ряд, длина которого $\leqslant\beta$.

4) Докажем, что нижний $\mathfrak{X}$-ряд имеет длину не менее, чем β. Пусть этот ряд есть

$$V = R_0 \subseteq R_1 \supseteq \ldots R_\gamma \supseteq R_{\gamma+1} \supseteq \ldots R_\tau = 0.$$

Докажем индукцией по γ, что $R_\gamma \supseteq A_{(n,\mu)}$, где n конечно и $\mu > \gamma$. Тогда $R_\gamma \neq 0$ при $\gamma < \beta$, откуда $\tau \geqslant \beta$.

а) $\gamma = 1$. Предположим, что $A_{(n,\mu)} \nsubseteq R_1$, где n конечно и $\mu > 1$. Тогда $H = A_{(n,\mu)} \cap R_1 < A_{(n,\mu)}$. Положим

$$\Omega = \{(\lambda, \nu) | R_1 \pi_{(\lambda,\nu)} \neq 0\}.$$

Если $(n+1, 1) \in \Omega$; то так как $(n, \mu) < (n+1, 1)$, мы имели бы, что $A_{(n,\mu)} \subseteq R_1$. Поэтому $(n+1, 1) \notin \Omega$, т.е.

$$R_1 \pi_{(n+1,1)} = 0.$$

Отсюда легко вывести, используя [1], что пара $(V/R_1, \Gamma)$ обладает фактором, эквивалентным паре

$$(G, \Psi) = (A_{(n,\mu)}/H, \Sigma_{(n,\mu)}) \nabla (A, \Sigma)_{(n+1,1)}.$$

Так как $(V/R_1, \Gamma) \in \mathfrak{X}$, а $\operatorname{var}(G, \Psi) > \mathfrak{X}$, то мы получаем противоречие.

б) Пусть для ординалов, меньших γ, все доказано. Надо доказать, что $A_{(n,\mu)} \subseteq R_\gamma$, если n конечно и $\mu > \gamma$. Если γ предельное, то

$$R_\gamma = \bigcap_{\delta < \gamma} R_\delta \supseteq A_{(n,\mu)}$$

по предположению индукции. Пусть γ непредельное и пусть $A_{(n,\mu)} \nsubseteq R_\gamma$. Тогда

$$H = A_{(n,\mu)} \cap R_\gamma < A_{(n,\mu)}. \tag{3}$$

По предположению индукции

$$A_{(n+1,\gamma)} \subseteq R_{\gamma-1}, \quad A_{(n,\mu)} \subseteq R_{\gamma-1}. \tag{4}$$

Кроме того,

$$R_\gamma \pi_{(n+1,\gamma)} = 0, \tag{5}$$

ибо в противном случае из (7), §2, следует, что $A_{(n,\mu)} \subseteq R_\gamma$. Из (4) и (5) легко вывести, что пара $(R_{\gamma-1}/R_\gamma, \Gamma)$ обладает фактором, эквивалентным паре

$$(A_{(n,\mu)}/H, \Sigma_{(n,\mu)}) \nabla (A, \Sigma)_{(n+1,\gamma)} = (G, \Psi).$$

Из (3) следует, что пара $(A_{(n,\mu)}/H, \Sigma_{(n,\mu)})$ ненулевая, откуда $\operatorname{var}(G, \Psi) = \operatorname{var}(A_{(n,\mu)}/H, \Sigma_{(n,\mu}\text{-})) \cdot \mathfrak{X} > \mathfrak{X}$. Это невозможно, т.к. $(R_{\gamma-1}/R_\gamma, \Gamma) \in \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольное многообразие пар, (V, Γ) – некоторая пара и

$$V = R_0 \supseteq R_1 \supseteq \ldots R_\alpha \supseteq R_{\alpha+1} \supseteq \ldots \tag{6}$$

– нижний $\mathfrak{X}$-вербальный ряд в (V, Γ). Если α – первый ординал, для которого $R_\alpha = R_{\alpha+1} = \ldots$, то говорят, что ряд (6) стабилизируется через α шагов, а ординал α называется индексом стабилизации ряда (6). При этом вполне возможно, что $R_\alpha \neq 0$. Аналогично определяется индекс стабилизации верхнего $\mathfrak{X}$-ряда.

Имеет место следующее утверждение, которое интересно сравнить с теоремой 1.

Предложение 4. *Для любого нетривиального многообразия пар $\mathfrak{X}$ и любых ординалов α и β существует пара (V, Γ) у которой верхний $\mathfrak{X}$-ряд стабилизируется через α шагов, а нижний $\mathfrak{X}$-ряд – через β шагов.*

Доказательство этого предложения много проще доказательства теоремы 1; приведём только его схему. Пусть M_α – отрезок ряда всех непредельных ординалов, не превосходящих α, M_β – аналогичный отрезок для β, M_β^* – множество, двойственно упорядоченное по отношению к M_β, Z – естественно упорядоченное множество целых чисел. «Склеим» упорядоченные множества M_α, Z, M_β^* в одно упорядоченное множество $M_\alpha \cup Z \cup M_\beta^* = \Lambda$, считая, что каждый элемент из M_α меньше произвольного элемента из Z, а последний меньше произвольного элемента из M_β^* (внутри множеств M_α, Z и M_β^* оставим старый порядок). Пусть (A, Σ) – свободная пара многообразия $\mathfrak{X}$ и $(V, \Gamma) = \nabla(A, \Sigma)^\Lambda$. Используя лемму 3 и предложение 3 можно доказать, что (V, Γ) удовлетворяет всем условиям предложения 4.

Замечание. Над кольцами приведенные выше доказательства теоремы 1 и предложения 4 в общем случае не проходят. Однако для некоторых многообразий $\mathfrak{X}$ (например, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ – классу всех пар с тождественным действием) они остаются верными над произвольным коммутативным кольцом с единицей.

4. Сплетенные треугольные степени и нестрого неприводимые представления

Если Λ – (линейно) упорядоченное множество, то его сдвигом назовем сохраняющую порядок подстановку этого множества. Пусть (A, Σ) – произвольная пара и

$$(V, \Gamma) = \nabla(A, \Sigma)^\Lambda = (A^{(\Lambda)}, \Phi\lambda\Sigma^{(\Lambda)}).$$

Если T – некоторая группа сдвигов множества Λ, то она обычным образом действует в $A^{(\Lambda)}$ и $\Sigma^{(\Lambda)}$. А именно, если $\bar{a} \in A^{(\Lambda)}$, $\bar{\sigma} \in \Sigma^{(\Lambda)}$, $t \in T$, то для любого $\lambda \in \Lambda$

$$(\bar{a} \circ t)(\lambda) = \bar{a}(\lambda t^{-1}), \; (\bar{\sigma} \circ t)(\lambda) = \bar{\sigma}(\lambda t^{-1}).$$

Очевидно, что оба эти действия точны.

Таким образом, можно считать, что T содержится в $\operatorname{Aut} V$. Группа Φ также содержится в $\operatorname{Aut} V$, причем выполняются два условия: (а) Φ инвариантно относительно T; (б) $\Phi \cap T = 1$.

Действительно, пусть $\varphi \in \Phi$, $t \in T$. Докажем, что $t^{-1}\varphi t \in \Phi$. Условимся в дальнейшем прямое слагаемое (сомножитель) в $A^{(\Lambda)}$ (в $\Sigma^{(\Lambda)}$), отвечающее элементу $\alpha \in \Lambda$, обозначать через A_α (соответственно Σ_α). Возьмем произвольный $a \in A_\alpha$ и покажем, что

$$a \circ (t^{-1}\varphi t) = a + b, \text{ где } b \in V_\alpha^0 = \bigoplus_{\lambda<\alpha} A_\lambda. \tag{1}$$

Этим будет доказано, что $t^{-1}\varphi t \in \bar{\Phi}$.

Так как $a \in A_\alpha$, то $a \circ t^{-1} \in A_{\alpha t^{-1}}$. Поэтому

$$(a \circ t^{-1}) \circ \varphi = a \circ t^{-1} + b_1, \text{ где } b_1 \in V_{\alpha t^{-1}}^0.$$

Следовательно, $a \circ (t^{-1}\varphi t) = a + b_1 \circ t$. Так как t есть сдвиг множества Λ, то легко видеть, что $b_1 \circ t \in V_{\alpha t^{-1} t}^0 = V_\alpha^0$. Обозначив $b_1 \circ t = b$, получаем (1). Условие дискретности проверяется столь же просто. Следовательно, $t^{-1}\varphi t \in \Phi$.

Для доказательства (б) предположим, что $\sigma \in \Phi \cap T$. Возьмем произвольный $a \in A_\alpha$. Так как $\sigma \in T$, то

$$a \circ \sigma \in A_{\alpha\sigma}. \tag{2}$$

Так как $\sigma \in \Phi$, то

$$a \circ \sigma = a + b, \text{ где } b \in V_\alpha^0. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), заключаем, что $a \circ \sigma = a$. Отсюда $\sigma = 1$, что и требовалось доказать.

Таким образом, подгруппа $\langle \Phi, T \rangle$ группы $\operatorname{Aut} V$ распадается в полупрямое произведение $\Phi\lambda T$. В частности, мы имеем внутреннюю групповую пару (Φ, T), действие в которой обозначим на время $\varphi \circ t$.

Итак, группа T действует как в Φ, так и в $\Sigma^{(\Lambda)}$. Будут ли эти действия «склеиваться» в действие группы T в полупрямом $\Gamma = \Phi\lambda\Sigma^{(\Lambda)}$? Это будет установлено, если мы докажем, что для произвольных $\varphi \in \Phi$, $\bar{\sigma} \in \Sigma^{(\Lambda)}$, $t \in T$

$$(\bar{\sigma}^{-1}\varphi\bar{\sigma}) \circ t = (\bar{\sigma} \circ t)^{-1}(\varphi \circ t)(\bar{\sigma} \circ t).$$

Обе части последнего равенства – элементы из Φ. Так как Φ действует в V точно и так как V порождается элементами $a(\alpha)$, где $a \in A$, $\alpha \in \Lambda$ (здесь $a(\alpha)$ есть функция из $A^{(\Lambda)}$, принимающая на α единственное ненулевое значение a), то достаточно проверить, что

$$a(\alpha) \circ [(\bar{\sigma}^{-1}\varphi\bar{\sigma}) \circ t] = a(\alpha) \circ [(\bar{\sigma} \circ t)^{-1}(\varphi \circ t)(\bar{\sigma} \circ t)]. \tag{4}$$

Рассмотрим, во-первых, элемент $a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1}$. Так как $a(\alpha t^{-1})\in A_{\alpha t^{-1}}$, то и $a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1}\in A_{\alpha t^{-1}}$, откуда

$$(a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1})\circ\varphi = a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1} + b, \tag{5}$$

где $b\in V^0_{\alpha t^{-1}}$. Используя теперь свойства действий Φ, $\Sigma^{(\Lambda)}$ и T в V, имеем:

1)
$$\begin{aligned} a(\alpha)\circ[(\bar{\sigma}^{-1}\varphi\bar{\sigma})\circ t] &= ((a(\alpha)\circ t^{-1})\circ(\bar{\sigma}^{-1}\varphi\bar{\sigma}))\circ t = \\ &= (((a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1})\circ\varphi)\circ\bar{\sigma})\circ t = ((a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1} + b)\circ\bar{\sigma})\circ t = \\ &= (a(\alpha t^{-1}) + b\circ\bar{\sigma})\circ t = a(\alpha) + (b\circ\bar{\sigma})\circ t; \end{aligned} \tag{6}$$

2)
$$\begin{aligned} a(\alpha)\circ[(\bar{\sigma}\circ t)^{-1}(\varphi\circ t)(\bar{\sigma}\circ t)] &= [[a(\alpha)\circ(\bar{\sigma}\circ t)^{-1}(\alpha)]\circ t^{-1}\varphi t]\circ(\bar{\sigma}\circ t) = \\ = [[(a\circ\bar{\sigma}^{-1}(\alpha t^{-1}))(\alpha)]\circ t^{-1}\varphi t]\circ(\bar{\sigma}\circ t) &= [[(a\circ\bar{\sigma}^{-1}(\alpha t^{-1}))(\alpha t^{-1})]\circ\varphi t]\circ(\bar{\sigma}\circ t) = \\ = [(a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1})\circ\varphi t]\circ(\bar{\sigma}\circ t) &= [(a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1})\circ t + b\circ t]\circ(\bar{\sigma}\circ t) = \\ &= [(a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1})\circ t]\circ(\bar{\sigma}\circ t) + (b\circ t)\circ(\sigma\circ t). \end{aligned} \tag{7}$$

Легко понять, что для любых $v\in V$, $\bar{\sigma}\in\Sigma^{(\Lambda)}$, $t\in T$

$$(v\circ t)\circ(\bar{\sigma}\circ t) = (v\circ\bar{\sigma})\circ t. \tag{8}$$

Поэтому

$$\begin{gathered} [(a(\alpha t^{-1})\circ\bar{\sigma}^{-1})\circ t]\circ(\bar{\sigma}\circ t) = a(\alpha t^{-1})\circ t = a(\alpha), \\ (b\circ t)\circ(\sigma\circ t) = (b\circ\bar{\sigma})\circ t. \end{gathered} \tag{9}$$

Из (7) и (9) имеем:

$$a(\alpha)\circ[(\bar{\sigma}\circ t)^{-1}(\varphi\circ t)(\bar{\sigma}\circ t)] = a(\alpha) + (b\circ\bar{\sigma})\circ t. \tag{10}$$

Равенство (4) теперь следует из (6) и (10).

Итак, мы имеем групповую пару $(\Phi\lambda\Sigma^{(\Lambda)}, T)$, которой отвечает полупрямое произведение $(\Phi\lambda\Sigma^{(\Lambda)})\lambda T$. Все три сомножителя этого полупрямого произведения действуют в V. При этом действия Φ и $\Sigma^{(\Lambda)}$ согласованы, что следует прямо из определения треугольного произведения, действия Φ и T согласованы, т.к. $\Phi\lambda T\in \operatorname{Aut} V$, а действия $\Sigma^{(\Lambda)}$ и T согласованы ввиду (8). Все это показывает, что существует представление

$$(V, \Phi\lambda\Sigma^{(\Lambda)}\lambda T) = (V, \Gamma\lambda T),$$

которое называется сплетенной треугольной Λ-степенью пары (A, Σ) с помощью группы сдвигов T и обозначается

$$\nabla(A, \Sigma)^{\Lambda} \wr T.$$

Следуя Ф. Холлу, будем говорить, что группа сдвигов T действует на множестве Λ неприводимо, если

$$(\forall\lambda,\, \mu \in \Lambda)(\exists t \in T)[\lambda t > \mu].$$

Очевидно, что в этом случае Λ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента.

Теорема 2. *Пусть (A, Σ) – произвольная пара, Λ – произвольное упорядоченное множество, T – неприводимая группа сдвигов этого множества. Тогда пара $\nabla(A, \Sigma)^{\Lambda} \wr T$ неприводима.*

Доказательство. Пусть

$$(V,\, \Psi) = \nabla(A, \Sigma)^{\Lambda} \wr T = (A^{(\Lambda)},\, \Phi\lambda\Sigma^{(\Lambda)}\lambda T)$$

и пусть $0 \neq H - \Psi$ – инвариантное подпространство в V. Тогда H инвариантно относительно $\Gamma = \Phi\lambda\Sigma^{(\Lambda)}$ и, следовательно, из замечания к предложению 2 вытекает, что могут быть две возможности:

(а) $H = V_\Omega$ для некоторого нижнего отрезка Ω множества Λ ;

(б) $H = V_\alpha^0 \oplus B$, где $\alpha \in \Lambda$, а B – ненулевое Σ_α – подпространство в A_α.

Рассмотрим случай (а). Если $\Omega \neq \Lambda$, то пусть $\lambda \in \Lambda \backslash \Omega$. Возьмем в H ненулевой элемент

$$h = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad (a_i \in A_{\alpha_i},\, \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n).$$

Найдем в T сдвиг t, для которого $\alpha_n t > \lambda$. Тогда $h \circ t \notin V_\Omega$ и в то же время $h \circ t \in H$. Противоречие. Следовательно, $\Omega = \Lambda$, откуда $H = V$.

В случае (б) достаточно взять элемент α в качестве λ и повторить предыдущие рассуждения.

Теорема 2 дает довольно общий метод построения неприводимых бесконечномерных представлений. Одно из применений этой теоремы будет сейчас приведено. Сначала несколько определений.

Подпара (A, Σ) пары (V, Γ) называется нормальной (обозначается $(A, \Sigma) \lhd (V, \Gamma)$), если она является ядром некоторого гомоморфизма, т.е. если A инвариантно относительно Γ, $\Sigma \lhd \Gamma$ и Σ действует тождественно в V/A. Среди нормальных подпар пары (V, Γ) отметим следующие:

(а) подпары вида (V, Σ), где $\Sigma \lhd \Gamma$;

(б) подпары вида (O, Σ), где $\mathrm{Ker}(V, \Gamma) \supseteq \Sigma \lhd \Gamma$.

Их естественно назвать тривиальными. Иными словами, нормальная подпара (A, Σ) пары (V, Γ) нетривиальна, если $O \neq A \neq V$. Отсюда видно, что пара не имеет нетривиальных нормальных подпар тогда и только тогда, когда она неприводима.

Определение 1. *Возрастающим нормальным рядом пары (V, Γ) называется ряд*

$$(O, E) = (H_0, \Sigma_0) \subset (H_1, \Sigma_1) \subset \ldots \subset (H_\gamma, \Sigma_\gamma) = (V, \Gamma),$$

где γ – некоторый ординал, на предельных местах стоят объединения преды-

дущих членов и для каждого $\alpha<\gamma$ подпара $(H_\alpha, \Sigma_\alpha)$ является нетривиальной нормальной подпарой в $(H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$. Ординал γ называется длиной этого ряда.

Определение 2. *Пара называется строго неприводимой, если она не имеет возрастающих нормальных рядов длины* >1.

Из определений ясно, что всякая строго неприводимая пара неприводима. Следующая теорема показывает, что обратное неверно. Доказательство ее основано на идеях Ф. Холла [7].

Теорема 3. *Пусть K – произвольное поле, λ – произвольный предельный ординал. Существует неприводимое представление над K, обладающее возрастающим нормальным рядом длины $\omega\lambda$.*

Доказательство. Пусть (H, Σ) – произвольная ненулевая пара, Z – множество целых чисел, упорядоченное обычным образом. Тогда преобразование t, определенное правилом $nt=n+1$, является сдвигом этого множества. Обозначим $T=\langle t\rangle$ и построим сплетенную треугольную степень

$$\nabla(H, \Sigma)^Z \wr T=(H^{(Z)}, \Phi\lambda\Sigma^{(Z)}\lambda T).$$

Возьмем групповую алгебру KT и рассмотрим более широко пару

$$(H^{(Z)}\oplus KT, \Phi\lambda\Sigma^{(Z)}\lambda T), \tag{11}$$

где $\Phi\lambda\Sigma^{(Z)}$ действует в KT тождественно, а T – регулярно. Пара (11) однозначно определяется парой (H, Σ), поэтому обозначим ее $f(H, \Sigma)$. Положим далее

$$(H_0, \Sigma_0)=(H, \Sigma),\ (H_1, \Sigma_1)=f(H_0, \Sigma_0),\ (H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})=f(H_\alpha, \Sigma_\alpha).$$

При этом $(H_\alpha, \Sigma_\alpha)$ будем считать вложенной в $(H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$ в качестве координатной подпары, отвечающий числу $0\in Z$. Исходя из этих вложений, положим

$$(H_\beta, \Sigma_\beta)=\bigcup_{\alpha<\beta}(H_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

для всякого предельного $\beta\leqslant\lambda$. Обозначим, наконец,

$$(H_\lambda, \Sigma_\lambda)=(V, \Gamma)$$

и докажем, что (V, Γ) удовлетворяет всем условиям теоремы.

а) Пара (V, Γ) неприводима. Действительно, пусть A есть Γ – подпространство в V. Предположим, что $A\cap H_\alpha\neq 0$ при некотором $\alpha<\lambda$. Рассмотрим пару

$$(H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})=(H_\alpha^{(Z)}\oplus KT, \Phi_\alpha\lambda\Sigma_\alpha^{(Z)}\lambda T). \tag{12}$$

Так как $A\cap H_\alpha\neq 0$, то $A\cap H_\alpha^{(Z)}$ – ненулевое $\Sigma_{\alpha+1}$ – инвариантное подпространство. Так как T действует на Z неприводимо, то из теоремы 2 следует, что $A\cap H_\alpha^{(Z)}=H_\alpha^{(Z)}$. В частности, $H_\alpha\subseteq A$. Итак, доказано, что если $A\cap H_\alpha\neq 0$, то $H_\alpha\subseteq A$. Так как

$$V=\bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha,$$

то либо $A=0$, либо $A=V$.

б) Пара (V,Γ) не является строго неприводимой. Рассмотрим пары $(H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$ и $(H_\alpha, \Sigma_\alpha)$. Согласно (12),

$$(H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})=(\ldots H_\alpha^{(-1)}\oplus H_\alpha^{(0)}\oplus H_\alpha^{(1)}\oplus\ldots\oplus KT,\ \Phi_\alpha\lambda(\ldots\Sigma_\alpha^{(-1)}\times\Sigma_\alpha^{(0)}\times\Sigma_\alpha^{(1)}\times\ldots)\lambda T).$$

Обозначим

$$(L_\alpha, \Lambda_\alpha)=\left(\bigoplus_{k=-\infty}^{-1} H_\alpha^{(k)},\ \Phi_\alpha\lambda\prod_{k=-\infty}^{-1}\Sigma_\alpha^{(k)}\right),$$

$$(A_\alpha, \Psi_\alpha)=\langle\!\langle (H_\alpha, \Sigma_\alpha),(L_\alpha, \Lambda_\alpha)\rangle\!\rangle. \tag{13}$$

Достаточно очевидно, что

$$(H_\alpha, \Sigma_\alpha)\cap(L_\alpha, \Lambda_\alpha)=(O,E)\ \text{ и }\ (L_\alpha, \Lambda_\alpha)\lhd(A_\alpha, \Psi_\alpha). \tag{14}$$

Покажем теперь, что $(A_\alpha, \Psi_\alpha)\lhd^{\omega+1}(H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$ (т.е. существует возрастающий нормальный ряд длины $\omega+1$, соединяющий (A_α, Ψ_α) с $(H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$). Действительно,

$$(A_\alpha, \Psi_\alpha)=\left(\bigoplus_{k=-\infty}^{0} H_\alpha^{(k)},\ \Phi_\alpha\lambda\prod_{k=-\infty}^{0}\Sigma_\alpha\right)\lhd^{\omega}\left(\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H_\alpha^{(k)},\ \Phi_\alpha\lambda\prod_{k=-\infty}^{\infty}\Sigma_\alpha^{(k)}\right)\lhd$$

$$\lhd\left(\left(\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H_\alpha^{(k)}\right)\oplus KT,\ \Phi\lambda\prod_{k=-\infty}^{\infty}\Sigma_\alpha^{(k)}\lambda T\right)=(H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1}),$$

причем все «шаги» нетривиально увеличивают область действия.

Пусть теперь $(P_\alpha,\ \Pi_\alpha)=\langle (L_\beta, \Lambda_\beta)|\alpha\leqslant\beta<\lambda\rangle$, тогда $(H_\alpha, \Sigma_\alpha)\cap(P_\alpha, \Pi_\alpha)=(O,E)$, причем так как $(H_\alpha, \Sigma_\alpha)$ нормализует (Λ_β, L_β) для всех $\beta\geqslant\alpha$, то $(H_\alpha, \Sigma_\alpha)$ нормализует (P_α, Π_α). Положим

$$(Q_\alpha, \Theta_\alpha)=\langle (P_\alpha, \Pi_\alpha), (H_\alpha, \Sigma_\alpha)\rangle.$$

Тогда

$$(Q_{\alpha+1}, \Theta_{\alpha+1})=\langle (L_\beta, \Lambda_\beta),\ \alpha+1\leqslant\beta<\lambda;\ \ (H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})\rangle, \tag{15}$$

$$(Q_\alpha, \Theta_\alpha)=\langle (L_\beta, \Lambda_\beta),\ \alpha+1\leqslant\beta<\lambda;\ (L_\alpha, \Lambda_\alpha), (H_\alpha, \Sigma_\alpha)\rangle=$$

$$=\langle (L_\beta, \Lambda_\beta),\ \alpha+1\leqslant\beta<\lambda;\ \ (A_\alpha, \Psi_\alpha)\rangle. \tag{16}$$

Так как $(A_\alpha, \Psi_\alpha) \lhd^{\omega+1} (H_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$, то из (15) и (16) выводится, что

$$(Q_\alpha, \Theta_\alpha) \lhd^{\omega+1} (Q_{\alpha+1}, \Theta_{\alpha+1}),\ \alpha < \lambda.$$

В то же время

$$(V, \Gamma) = \bigcup_{\alpha<\lambda} (Q_\alpha, \Theta_\alpha),$$

поэтому в (V, Γ) есть возрастающий нормальный ряд длины $(\omega+1)\lambda$. Так как λ предельное, то $(\omega+1)\lambda = \omega\lambda$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ПЛОТКИН, Б. И.: Треугольные произведения пар. В сб. «Некоторые вопросы теории групп», Рига, изд-во ЛГУ, 1971, 140–170.

[2] ПЛОТКИН, Б. И.—ГРИНГЛАЗ, Л. Е.: Одно замечание о степенях многообразии пар и точных представлениях групп. Латв. матем. ежегодник, 16, 1975, 23—32.

[3] ПЛОТКИН, Б. И.: Радикалы и многообразия в представлениях групп. Латв. матем. ежегодник, 10, 1971, 75–132.

[4] ВОВСИ, С. М.: Абсолютная свобода нестрогих радикалов. В сб. «Некоторые вопросы теории групп», Рига, изд-во ЛГУ, 1971, 14–18.

[5] ВОВСИ, С. М.: О бесконечных произведениях классов групп. Сиб. матем. ж., 13, 1972, 272–285.

[6] МАРТЫНОВ, Л. М.: О достижимых классах групп и полугрупп. Матем. сб. 90, 1973, 234–245.

[7] HALL, P.: On non-strictly simple groups. Proc. Camb. Phil. soc., 59, 1963, 531–553.

[8] ВОВСИ, С. М.: Треугольные произведения и полугруппы классов пар. Латв. матем. ежегодник, 18, 1975, 27–39.

Поступило 12. 1. 1976

СССР
226355, Латвийская ССР
г. Рига, ул. Ленина 1
Рижский политехнический институт
кафедра спецкурсов высшей математики