Mathematica Slovaca

Ján Jakubík; Milan Kolibiar

K sedemdesiatinám akademika Štefana Schwarza

Mathematica Slovaca, Vol. 34 (1984), No. 2, 239--246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136357

Math. Slovaca 34, 1984, No. 2, 239—246

K SEDEMDESIATINÁM AKADEMIKA ŠTEFANA SCHWARZA

V máji 1984 sa dožíva 70 rokov významný československý matematik akademik Štefan Schwarz. S jeho menom je spojený nielen rozvoj matematiky v ČSSR a obzvlášť na Slovensku, rozvoj teórie pologrúp, na ktorej budovaní sa aktívne podieľal, ale jubilant prispel aj v širšom meradle k zveľaďovaniu našej národnej kultúry.

Narodil sa 18. mája 1914 v Novom Meste nad Váhom. Po ukončení vysokoškolského štúdia r. 1936 na Karlovej univerzite v Prahe bol asistentom v Matematickom ústave Prírodovedeckej fakulty tejto univerzity. V roku 1939 prešiel na novozriadenú Slovenskú vysokú školu technickú. V roku 1946 bol habilitovaný na Prírodovedeckej fakulte univerzity v Bratislave za docenta a od roku 1947 je profesorom na Slovenskej vysokej škole technickej v Bratislave. Bol zvolený za člena-korešpondenta ČSAV (1952) a akademika ČSAV (1960). Akademikom SAV sa stal pri jej založení r. 1953. Od 1. 1. 1966 je riaditeľom Matematického ústavu SAV.

Vedecká činnosť Š. Schwarza má ťažisko v algebre a teórii čísel. Zasahuje však aj do iných oblastí matematiky, ako sú napríklad kombinatorika, topológia a teória pravdepodobnosti. Napísal doteraz 94 pôvodných vedeckých prác. Nie je jednoduché v niekoľkých riadkoch popísať výsledky týchto prác a ich prínos k ďalšiemu rozvoju matematiky. V úvahe venovanej šesťdesiatke akademika Schwarza pokúsili sa autori tohto článku uviesť niektoré výsledky obsiahnuté v prácach [1]—[80] a zaradiť ich aspoň čiastočne do rámca neskoršieho vývinu (pozri [D4]). V tomto článku by sme chceli charakterizovať jeho výsledky z posledných desiatich rokov. Treba vopred povedať, že jeho činnosť v siedmej dekáde nijako nepoľavila. Dosiahol rad cenných výsledkov. Čiastočne ide o prehĺbenie vlastných výsledkov, čiastočne o výsledky v nových oblastiach. Zo samotnej problematiky vidieť, ako sleduje neustály vývin rôznych matematických disciplín.

Š. Schwarz mal vždy tendenciu preverovať hĺbku abstraktných teórií na konkrétnych príkladoch a dokazovať takým spôsobom ich užitočnosť. To sa výrazne prejavuje aj v jeho vedeckej činnosti za posledné roky.

Do všeobecnej teórie pologrúp patrí práca [84]. Označme L^* prienik všetkých maximálnych ľavých ideálov pologrupy S (ak také existujú). Podobný význam nech majú R^* a M^* vzhľadom na pravé resp. obojstranné ideálny. (Pre široké triedy okruhov je M^* Jacobsonov radikál.) V práci sa vyšetrujú podmienky, kedy je napríklad $L^* = M^*$, kedy L^* existuje a M^* neexistuje, kedy je $L^* \neq R^*$ a podobné otázky.

Otázky riešené v [84] hrajú istú úlohu aj v práci [81]. Tu sa študuje trieda pologrúp, ktoré dostaneme prirodzeným spôsobom pri štúdiu tzv. malých kategórií, ak parcialny asociatívny grupoid morfizmov doplníme nulovým prvkom (a súčiny, ktoré pôvodne neboli definované, položíme rovne nule). Takéto pologrupy sa dajú definovať abstraktne. Cieľom práce je popísať štruktúru a podať konštrukciu takých pologrúp.

Nájsť konštrukciu všetkých pologrúp, ktoré majú vopred dané vlastnosti, je vo všeobecnosti mimoriadne obťažné. Medzi také úlohy patrí napríklad problém, ktorým sa zaoberá práca [94]: Nech $\{S_i : i \in J\}$ je systém disjunktných pologrúp. Za akých podmienok možno na množine $S = \cup(S_i : i \in J)$ definovať asociatívne násobenie tak, aby S_i boli podpologrupy v pologrupe S a aby platilo $S_i \cdot S_j \subset S_k$. Riešenie tejto úlohy, pochádzajuce od R. Yosidu a M. Petricha z rokov 1965—1969, nedáva metodu efektívnej konštrukcie takej pologrupy S. Š. Schwarz [94] našiel niekoľko „rozumných" postačujúcich podmienok a príslušné konštrukcie.

Od začiatku svojej vedeckej činnosti sa Schwarz neustále vracia k rozmanitym aspektom teorie matíc. (Práce [62], [67] a [68] sú veľmi často citované v literatúre.) V práci [88] sa zaobera otázkou existencie nekonečných súčinov dvojmo stochastických matíc. Práca [93] sa týka pologrupy $n \times n$ matíc nad konečným poľom $GF(q)$, $q = p^r$. Označme $\lambda(l, q) = p^t \cdot \mathrm{NSN}[q^l - 1, q^{l-1} - 1, \ldots, q - 1]$, kde t je najmenšie celé číslo, pre ktoré $p^t \geq l$. Je známe (v podstate od J. Nivena z roku 1948), že pre každu $n \times n$ regulárnu maticu A platí $A^{\lambda(n, q)+1} = A$. Typicky pologrupovou metódou dokázal Schwarz: Ak A má hodnosť $\leq h$ a $1 \leq h \leq n - 1$, potom vždy platí $A^{h+1} = A^{h+1+\lambda(h, q)}$ a tento výsledok sa neda zlepšiť.

Vo viacerých otázkach týkajúcich sa nezáporných $n \times n$ matíc hrá úlohu postupnosť mocnin $A, A^2, A^3, \ldots$. Pritom nie je podstatné, aké sú nenulové hodnoty prvkov matíc, iba rozdelenie nul a kladných prvkov. Tak sa dostaneme k štúdiu tzv. Booleových matíc, t. j. matíc, ktorých prvky su prvkami dvojprvkovej Booleovej algebry $\{0, 1\}$ a sčitanie a násobenie je dané prirodzeným spôsobom. Takéto matice sa dajú interpretovať aj ako binárne relácie na množine s n prvkami. Množina všetkých $n \times n$ Booleových matíc tvorí vzhľadom na násobenie pologrupu S_n. Štúdiu pologrupy S_n a jej podpologrúp venoval Schwarz mnoho pozornosti (pozri práce [72], [73], [74], [77], [79]). Dôvodom je skutočnosť, že tieto pologrupy hrajú dôležitú úlohu v kombinatorike, v teórii automatov a v mnohých nových partiách diskrétnej matematiky. V prácach [82], [83], [87] vyšetril detailne štruktúru pologrupy tzv. cirkulantných Booleových matíc.

Celý rad Schwarzových výsledkov týkajúci sa Booleových matíc je podrobne reprodukovaný v nedávno vyšlej monografii K. H. Kima [D3]. (Desiatky autorov citujú prácu [72].)

Nech A je konečný akceptor s počtom stavov n, $L(A)$ množina ním akceptovanych slov. Je známe, že $L(A)$ je nekonečná práve vtedy, keď existuje slovo dĺžky l, $n \leq l \leq 2n - 1$, ktoré A akceptuje. Použijúc aparát konečných grúp našiel Schwarz [86] nový priehľadný dôkaz tohto tvrdenia, ale predovšetkým niekoľko nových výsledkov o dĺžkach slov patriacich do $L(A)$.

Ďalšou oblasťou, v ktorej Schwarz použil metódy teórie pologrúp, je elementárna teória čisel. Práca [89] je prehĺbením starších prác [43] a [51]. Nech $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ je rozklad celeho čísla $m > 0$ na súcin prvočísel. Nech Z_m je okruh zvyškových tried mod m. V práci je podrobne popisaná multiplikatívna štruktúra okruhu Z_m. Ak $a \in Z_m$, existuje v postupnosti $a, a^2, a^3, \ldots$ jediný idempotent e. Budeme hovoriť, že a patrí k idempotentu e. Z_m obsahuje 2^r rôznych idempotentov, ktoré (pri prirodzených operáciách) tvoria Booleovu algebru. Množina všetkých prvkov zo Z_m, ktoré patria k idempotentu e, tvorí multiplikatívnu pologrupu $P(e)$, teda

$$Z_m = \bigcup_e P(e).$$

Pologrupa $P(e)$ obsahuje jedinú maximálnu grupu $G(e)$ — najväčšiu podgrupu multiplikatívnej pologrupy Z_m, ktorá má e za jednotkový prvok. V práci je popísaná konštrukcia idempotentov, konštrukcia grúp $G(e)$ a pologrúp $P(e)$, priame rozklady pologrúp Z_m a $P(e)$, určené sú počty prvkov pologrupy Z_m s určitými vlastnosťami a iné. Výsledky tejto práce umožňujú z jednotneho hľadiska dokázať prakticky všetky zovšeobecnenia tzv. Eulerovej—Fermatovej vety z teórie kongruencií, ktoré sa v literatúre opätovne objavujú.

Systematické používanie idempotentov (rôznych od 0 a 1) umožňuje riešiť niektoré nekonvenčné úlohy. V práci [90] je (okrem iného) riešená táto úloha. Nech $(a, m)=1$, m je nepárne, $\varphi(m)$ je Eulerova funkcia. Nájsť formulu pre súčet (v Z_m) $\sigma = a + a^2 + \ldots + a^{\varphi(m)}$. Dokazuje sa: Ak $a-1$ patrí k idempotentu e, tak $\sigma=(1-e)\varphi(m)$. Poznamenajme, že vety, v ktorých vystupujú idempotenty pologrupy Z_m, rôzne od 1, sa v literatúre doteraz explicitne nevyskytli.

V práci [91] je (okrem iného) riešený takýto problém. Vyčísliť v Z_m súčiny

$$\prod_{v \in G(e)} (x-v) \quad \text{a} \quad \prod_{v \in P(e)} (x-v).$$

Pre $e=1$ riešili túto úlohu Bauer (1902) a Vandiver (1917) a dostali tak zovšeobecnenie Lagrangeovej identity pre prvočíselné moduly p: $(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)\equiv x^{p-1}-1 \pmod{p}$. Elegantnosť výsledkov v práci [91], ktoré sú zovšeobecneniami týchto výsledkov, je umožnená práve používaním idempotentov pologrupy Z_m.

Posledná práca [92], o ktorej chceme hovoriť, je kombinatorického charakteru. Uvažujme o orientovanom grafe s množinou vrcholov $V=\{a_1, \ldots, a_n\}$, bez viacnásobných hrán. Tomuto grafu je známym spôsobom priradená binárne relácia ϱ na množine V. Označme $a_i\varrho=\{x \in V\colon (a_i, x) \in \varrho\}$. Hovoríme, že dva vrcholy a_i, a_j majú spoločného nasledovníka dĺžky $l>0$, ak $a_i\varrho^l \cap a_j\varrho^l \neq \emptyset$. $(*)$ Ak také l existuje, označme najmenšie l splňujúce $(*)$ znakom $L(a_i, a_j)$. Nie je ťažké dokázať, že $L(a_i, a_j) \leq \frac{1}{2}n(n-1)$. Presný odhad bol doteraz neznámy. Schwarz [92] dokázal, že

$$L(a_i, a_j) \leq \frac{n^2}{2} - n + \varepsilon_n,$$

kde $\varepsilon_n=1$ pre n párne a $\varepsilon_n=3/2$ pre n nepárne, a tento výsledok sa nedá zlepšiť. Dôkaz tohto tvrdenia vyžaduje značnú zbehlosť v teórii booleovských matíc.

Schwarzove práce z teórie pologrúp sú zčasti reprodukované v dnes už klasických knihách E. S. Ljapina [D2] a A. H. Clifforda a G. B. Prestona [D1] ako aj v ďalších knihách z teórie pologrúp. Jeho výsledky sa uvádzajú asi v 400 prácach iných matematikov z mnohých krajín sveta. Z toho je 26 monografií alebo učebníc. V posledných rokoch sa v monografiách aj prehľadových prácach často citujú jeho práce z lineárnej algebry.

Profesor Schwarz je znamenitým pedagógom. Vedúce zásady jeho prednášok sú: dostatočná motivácia preberaných partií, náležité objasnenie významu výsledkov, ich formulácia v explicitnom tvare a dôraz na konštruktívne postupy a algoritmy. Tieto zásady sú dobre viditeľné aj v jeho knihách [B1]—[B5]. Riadi sa nimi aj v prezentovaní svojich vedeckých výsledkov vo vedeckých prácach a referátoch na konferenciách. Okrem prednášok na vlastnom pracovisku — Slovenskej vysokej škole technickej prednášal viac rokov aj na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave. Prispel tak k výchove odborného a vedeckého dorastu v matematike v období, keď to bolo najpotrebnejšie — v prvom desaťročí existencie tejto fakulty. Okrem prednášok pre študentov konal dlhé roky pravidelné prednášky postgraduálneho charakteru pre pracovníkov vysokých škôl a výskumných ústavov. Vychoval vyše 20 ašpirantov a celý rad ďalších matematikov mu vďačí za cenné rady v začiatkoch ich vedeckej činnosti. Snaha pomáhať začínajúcim matematikom je viditeľná vo všetkých úsekoch jeho činnosti.

Jeho pedagogický talen a záujem o spoločenské dianie našli odraz aj v jeho bohatej vedecko-popularizačnej činnosti (pozri publikácie [C1]—[C57]). Jeho spoločenská angažovanosť sa vypukle prejavila v aktívnej účasti na riadení našej vedy a kultúry. Okrem organizačnej činnosti v oblasti školstva (prorektor SVŠT 1951—1953, prodekan fakulty špeciálnych náuk SVŠT 1950—1951, člen predsedníctva Slovenského výboru pre vysoké školy 1956—1962 a i.) vykonával dlhé roky rad funkcií v SAV a ČSAV (predseda SAV 1965—1970, podpredseda ČSAV 1965—1970, činnosť v rozličných komisiách SAV a ČSAV) a v iných inštitúciách, ako Štátna komisia pre udeľovanie vedeckých hodností (podpredseda 1960—1965), Výbor pre štátne ceny Klementa Gottwalda (1956—1963, 1970—1972) a rad ďalších. V období 1966—1971 bol členom ÚV KSČ a v rokoch 1966—1968 členom UV KSS.

V [D4] sme zdôraznili, že akademik Schwarz nestál nikdy bokom spoločenského vývinu a neuhýbal pred problémami. To platí aj dnes.

Má značný dar zdravého humoru; pritom je ale vecný so snahou odhadnúť vždy dopad prijatých opatrení. Teší sa dôvere a priateľskej úcte ďaleko za hranicami matematickej obce.

Snaží sa sledovať — nakoľko je to dnes vôbec možné — vývin matematiky a jej aplikácií ako celku. Z vlastnej skúsenosti vieme, že sleduje pozorne aj diskusie okolo spoločenského postavenia matematiky, ktoré dnes prebiehajú vo všetkých dôležitých krajinách sveta. Kvas, ktorý vznikol okolo reformných snáh vo vyučovaní matematiky na všetkých stupňoch výuky, ho nenechal chladným. O tom svedčia napríklad jeho príspevky [C51], [C54], [C55], [C57] ako aj články v dennej a týždennej tlači. V prednáške [C57] sa taktne ale veľmi jasne vyjadril proti preformalizovaniu matematiky na úkor názornosti, proti neadekvátnym abstrakciám a prehnanej presnosti.

Aj v uplynulom desaťročí sa dostalo Š. Schwarzovi viacero spoločenských uznaní. Pri príležitosti 30. výročia založenia ČSAV bol mu 17. novembra 1982 udelený po druhýkrát Rad práce (za mimoriadne zásluhy o rozvoj československej vedy). V roku 1980 dostal Národnú cenu SSR. Za pedagogickú prácu mu bola udelená prezidentom republiky v r. 1979 medaila J. A. Komenskeho. Ďalšie vyznamenania dostal od ČSAV, SAV, vysokých škôl a Socialistického zväzu mládeže.

Želáme mu a celej našej vede, aby jeho tvorivý elán a pracovná energia dlho vydržali.

Ján Jakubík a *Milan Kolibiar*

ZOZNAM PUBLIKÁCIÍ Š. SCHWARZA

A. Pôvodné práce

[1] Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzen algebraischen Koeffizienten nach einem Primideal. Časopis pěst. mat. fys. 68, 1939, 112—127.

[2] Contribution à la réductibilité des polynômes dans la théorie des congruences. Věstník Kral. české spol. nauk 1939, č. 7, 1—9.

[3] Sur le nombre des racines et des facteurs irréductibles d'une congruence donnée. Časopis pěst. mat. fys., 69, 1949, 128—146.

[4] Über einen Satz von S. Lubelski. Časopis pěst. mat. fys. 69, 1940, 147—150.

[5] Príspevok k číselnej teórii konečných telies. Prírodovedecká príloha Technického obzoru slovenského, I, No 8, 1940, 75—82.

[6] Príspevok k teórii kongruencií. Ibid. II, No 8, 9, 1941, 89—92, 95—100.

[7] Príspevok k teórii Galoisových telies. Ibid. III, No 6, 1942, 1—4.

[8] Teória pologrúp. Sborník prác Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity, č. VI, Bratislava 1943, pp. 64.

[9] A hyperkomplex proof of the Jordan—Kronecker's Principle of reduction Časopis pěst. mat. fys. 71, 1946, 17—21.

[10] Příspěvek k reducibilite binomických kongruencí. Časopis pěst. mat. fys. 71, 1946, 21—32.

[11] On the extension of the Jordan—Kronecker's Principle of reduction for inseparable polynomials. Časopis pěst. mat. fys. 73, 1947, 61—64.

[12] On Waring's Problem for finite fields. Quart. J. Math. Oxford Ser. 19, 1948, 123—128.

[13] On Generalization of Jordan—Kronecker's Principle of reduction. Věstník Král. české spol. nauk 1948, č. 2, 1—29.

[14] On the equation $a_1x_1^k + \ldots + a_kx_k^k + b = 0$ in finite fields. Quart. J. Math. Oxford Ser. 19, 1948, 160—164.
[15] Príspevok k teórii cyklických telies. Sborník prác SVŠT, Bratislava, 1948 pp. 7.
[16] On the reducibility of binomial congruences and the least bound of an integer belonging to a given exponent (mod p). Časopis pěst. mat. fys. 74, 1949, 1—17.
[17] On universal forms in finite fields. Časopis pěst. mat. fys. 75, 1950, 45—50.
[18] O zovšeobecneniach pojmu grupy. Časopis pěst. mat. fys. 74, 1949, 95—113.
[19] O rovniciach tvaru $c_1x_1^k + \ldots + c_sx_s^k = c$ v konečných telesiach. Časopis pěst. mat. fys. 74, 1949, 175—176.
[20] Структура простых полугрупп без нуля. Чехослов. мат. ж. 1 (76), 1951, 51-65.
[20a] On the structure of simple semigroups without zero. Czechoslovak Math. J. 1 (76), 1951, 41–53.
[21] О полугруппах имеющих ядро. Чехослов. Мат. ж. 1 (76), 1951, 259–301.
[21a] On semigroups having a kernel. Czechoslovak Math. J. 1 (76), 1951, 229—264.
[22] К теории периодических полугрупп. Чехослов Мат. ж. 3 (78), 1953, 7–21.
[23] О максимальных идеалах в теории полугрупп I. Чехослов. мат. ж. 3 (78), 1953, 139–153.
[24] Maximálne ideály a štruktúra pologrúp. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 3, 1953, 17—39.
[25] О максимальных идеалах в теории полугрупп II. Чехослов. мат. ж. 3 (78), 1953, 365–383.
[26] Теория характеров коммутативных полугрупп. Чехослов. мат. ж. 4 (79), 1954, 219-247.
[27] Характеры коммутативных полугрупп как функции классов. Чехослов. мат. ж. 4 (79), 1954, 291-295.
[28] О некоторой связы Галуа в теории характеров полугрупп. Чехослов. мат. ж. 4 (79), 1954, 296–313.
[29] Characters of commutative semigroups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954, Vol. I, Amsterdam 1957, 438.
[30] К теории Хаусдорффовых бикомпактных полугрупп. Чехослов. мат. ж. 5 (80), 1955, 1–23.
[31] О топологических полугруппах с односторонными единицами. Чехослов. мат. ж. 5 (80), 1955, 153-163.
[32] Характеры бикомпактных полугрупп. Чехослов. мат. ж. 5 (80), 1955, 24–28.
[33] Poznámky k teórii bikompaktných pologrúp. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 5, 1955, 86–89.
[34] Об увеличительных элементах в теории полугрупп. Доклады Акад. Наук СССР, 102, Но 4, 1955, 697-698.
[35] On a type of universal forms in discretely valued fields. Acta Sci. Math. (Szeged) XVII, No 1—2, 1956, 5—29.
[36] The theory of characters of commutative Hausdorff bicompact semigroups. Чехослов. мат. ж. 6 (81), 1956, 330–364.
[37] Ještě o kvadratických polynomech nabývajících mnoha prvočíselných hodnot. Časopis pěst. mat. 81, 1956, 241—243. (Spolu s J. Maříkom.)
[38] On the reducibility of polynomials over a finite field. Quart. J. Math. Oxford Ser. 7, 1956, 110—124.
[39] O pologrupách splňujúcich zoslabené pravidlá krátenia. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 6, 1956, 149—158.
[40] О существовании инвариантных мер на некоторых типах бикомпактных полугрупп. Чехослов. мат. ж. 7 (82), 1957, 165-182.
[41] On the structure of the semigroup of measures on finite semigroups. Чехослов. мат. ж. 7 (82), 1957, 358—373.
[42] An elementary semigroup theorem and congruence relation of Rédei. Acta Sci. Math. (Szeged) XIX, No 1—2, 1958, 1—4.
[43] O multiplikatívnej pologrupe zvyškových tried modulo m. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 8, 1958, 136—150. (Spolu s B. Parízkom.)

[44] Remarks on compact semigroups. Colloq. Math. VI, 1958, 265—270. (Spolu s J. Łosom.)
[45] O totálne nekomutatívnych pologrupách. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 9, 1959, 92—100. (Spolu s D. Krajňákovou.)
[46] On dual semigroups. Czechoslovak Math. J. 10 (85), 1960, 201—230.
[47] A theorem on normal semigroups. Czechoslovak Math. J. 10 (85), 1960, 197—200.
[48] Semigroups, in which every proper subideal is a group. Acta Sci. Math. (Szeged) XXI, No 3—4, 1960, 125—134.
[49] Об одном классе полиномов над конечным полем. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 10, 1960, 68—80.
[50] О числе неприводимых множителей многочлена над конечным полем. Чехослов. мат. ж. 11 (86), 1961, 213–225.
[51] Semicharakters of the multiplicative semigroup of integers modulo m. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 11, 1961, 63—74. (Spolu s B. Parízkom.)
[52] Subsemigroups of simple semigroups. Czechoslovak Math. J. 13 (88), 1963, 226—239.
[53] Probabilities on non-commutative semigroups. Czechoslovak Math. J. 13 (88), 1963, 372—426.
[54] Probability measures on non-commutative semigroups. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. Proceedings of the Symposium held in Prague in September 1961, 312—315.
[55] Циклические матрицы и алгебраические уравнения над конечным полем. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 12, 1962, 38—48. (Spolu s K. Horákovou.)
[56] Заметка об алгебраических уравнениях над конечным полем. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 12, 1962, 224—229.
[57] Convolution semigroup of measures on compact non-commutative semigroups. Czechoslovak Math. J. 14 (89), 1964, 95—115.
[58] Product decomposition of idempotent measures on compact semigroups. Czechoslovak Math. J. 14 (89), 1964, 121—124.
[59] Homomorphisms of completely simple semigroups onto a group. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 12, 1962, 293—300.
[60] O jednej sústave kongruencií. Poznámka k predchádzajúcemu článku J. Sedláčka. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 13, 1963, 103—104.
[61] A semigroup treatment of some theorems on non-negative matrices. Czechoslovak Math. J. 15 (90), 1965, 212—229.
[62] On the structure of the semigroup of stochastic matrices. Publ. of the Math. Inst. Hungarian Acad. Vol. IX, Series A, Fasc. 3, 1955, 297—311.
[63] On powers of non-negative matrices. Mat.-fyz. čas. Slovenskej akad. vied 15, 1965, 215—228.
[64] Заметка к теории неотрицательных матриц. Сибир. мат. ж. 6, 1955, 207–211.
[65] A new approach to some problems in the theory of non-negative matrices. Czechoslovak Math. J. 16 (91), 1966, 274—284.
[66] New kinds of theorems on non-negative matrices. Czechoslovak Math. J. 16 (91), 1966, 285—295.
[67] Some estimates in the theory of non-negative matrices. Czechoslovak Math. J. 17 (92), 1967, 399—407.
[68] A note on the structure of the semigroup of doubly stochastic matrices. Mat. čas. 16, 1967, 308—316.
[69] On the index of imprimitivity of a non-negative matrix. Acta Sci. Math. (Szeged) 28, 1967, 185—189.
[70] Algebraic considerations on powers of stochastic matrices. Mat. čas. 18, 1968, 218—228.
[71] Prime ideals and maximal ideals in semigroups. Czechoslovak Math. J. 19 (94). 1969, 72—79.
[72] On the semigroup of binary relations on a finite set. Czechoslovak Math. J. 20 (95), 1970, 632—679.

[73] On a sharp estimate in the theory of binary relations on a finite set. Czechoslovak Math. J. 20 (95), 1970, 703—714.
[74] On idempotent relations on a finite set. Czechoslovak Math. J. 20 (95), 1970, 696—702.
[75] Any 0-simple dual semigroup is completely 0-simple. Semigroup Forum 2, 1971, 90—92.
[76] On the structure of dual semigroups. Czechoslovak Math. J. 21 (96), 1971, 461—483.
[77] The semigroup of fully indecomposable relations and Hall relations. Czechoslovak Math. J. 23 (98), 1973, 151—163.
[78] A note on small categories with zero. Acta Sci. Math. (Szeged) 35, 1973, 161—164.
[79] Суммы степеней бинарных отношений. Mat. čas. 24, 1974, 161—171.
[80] Circulant Boolean relation matrices. Czechoslovak Math. J. 24 (99), 1974, 252—253.
[81] The ideal structure of C-semigroups. Czechoslovak Math. J. 27 (102), 1977, 313—338.
[82] The semigroup of circulant Boolean matrices. Czechoslovak Math. J. 26 (101), 1976, 632—635. (Spolu s Kim H. Butlerom.)
[83] A counting theorem in the semigroup of circulant Boolean matrices. Czechoslovak Math. J. 27 (102), 1977, 504—510.
[84] Semigroups containing maximal ideals. Math. Slovaca 28, 1978, 157—168.
[85] Intersections of maximal ideals in semigroups. Semigroup Forum 12, 1976, 367—372.
[86] A theorem on binary relations and infinite regular languages. Semigroup Forum 17, 1979, 307—316.
[87] The Euler—Fermat Theorem for the semigroup of circulant Boolean matrices. Czechoslovak Math. J. 30 (105), 1980, 135—141.
[88] Infinite products of doubly stochastic matrices. Acta Math. Univ. Comenian. 39, 1980, 131—150.
[89] The role of semigroups in the elementary theory of numbers. Math. Slovaca 31, 1981, 369—395.
[90] An unconventional problem in the elementary theory of numbers. Czechoslovak Math. J. 31 (106), 1981, 159—169.
[91] Extensions of Bauer's identical congruences. Math. Slovaca 33, 1983, 209—224.
[92] Common consequents in directed graphs. Czechoslovak Math. J. (v tlači).
[93] Fermat's Theorem for matrices revisited. Math. Slovaca (v tlači).
[94] Right composition of semigroups. Math. Slovaca (v tlači).

B. Knižné publikácie

[1] O rovnicích. Cesta k vědění č. 1. Nákladem JČMF. Prvé vydanie, Praha 1940, strán 96.
[2] O rovnicích. Tretie vydanie, Praha 1947, strán 160.
[3] Algebraické čísla. Přírodovědecké nakl., Edícia Kruh, Praha 1950, strán 292.
[4] Základy náuky o riešení rovníc. Nakl. ČSAV, Praha 1958, strán 348.
[5] Základy náuky o riešení rovníc. Vydavateľstvo SAV. Vydanie prvé 1967, strán 440; vydanie druhé 1968, strán 456.

C. Iné publikácie[1]
(Referáty, recenzie, popularizačné články a iné)

[51] Matematika a inžinierske štúdium. Zborník konferencie „Vedeckotechnická revolúcia a inžinierske štúdium", SVŠT, 1974, 179—196.

[1]) Publikácie [1]—[50] sú uvedené v článku [D4]. Do zoznamu sme zaradili len vybrané publikácie.

[52] On the ideal structure of C-semigroups. Abstract of short communication, Internat. Congress of Math. Vancouver 1974, 185.
[53] Circulant binary relations (spolu s K. K. Hang Butlerom). Notices AMS, Vol. 22, 1975, A-720 (Abstrakt z konferencie Blacksburg).
[54] Matematická príprava poslucháčov pre štúdium automatizácie a počítačov. Pokroky mat., fyz. a astronómie, 22, 1977, č. 2, 61—72.
[55] O výuke aplikácií matematiky. Zborník z konferencie o vyučovaní matematiky v období ved. techn. revolúcie, Brno 28.—30. 9. 1976. Vydala JČMF, 1977, 30—38.
[56] Fermat's theorem for some finite semigroups. Abstract of short communication ICM Helsinki 1978, p. 26.
[57] Vyučovanie a vývin matematiky ako vedy. Zborník z celoslovenského seminára o vyučovaní matematiky v základných a stredných školách. Slov. pedag. nakladateľstvo, 1981, 135—147.

D. Citovaná literatúra

[1] Clifford, A. H.—Preston, G. P.: The algebraic theory of semigroups. Vol. I, 1964; Vol. II, 1967. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (Ruský preklad vyšiel v Izd. Mir, 1972.)
[2] Ляпин, Е. С.: Полугруппы. Физматгиз, Москва 1960. (Anglický preklad: Amer. Math. Soc., 2. vydanie 1968.)
[3] Ki Hang Kim: Boolean matrix theory and applications. Marcel Dekker, Inc., New York 1982.
[4] Jakubík, J.—Kolibiar, M.: K šesťdesiatke akademika Štefana Schwarza. Mat. čas. 24, 1974, 99—111.