Ján Mozer

Простые числа и "блуждание" нулей некоторых частей формулы Римана-Зигеля относительно решетки

Mathematica Slovaca, Vol. 48 (1998), No. 1, 1--26

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136718`

Math. Slovaca, **48** (1998), No. 1, 1–26

Mathematica Slovaca

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА И «БЛУЖДАНИЕ» НУЛЕЙ НЕКОТОРЫХ ЧАСТЕЙ ФОРМУЛЫ РИМАНА-ЗИГЕЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНО РЕШЕТКИ

Ян Мозер

(*Communicated by Stanislav Jakubec*)

ABSTRACT. In this paper, the distribution of the zero points of some parts of the Riemann-Siegel formula is studied.

Введение
Обобщение последовательности $\left\{t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

Формулу Римана-Зигеля

$$Z(t)=2\cdot\sum_{n\leqq\bar{t}}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\vartheta(t)-t\ln n\}+O(t^{-1/4})\,,\qquad \bar{t}=\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\,,$$

где

$$\begin{aligned}\vartheta(t)&=-\frac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\left\{\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\mathrm{i}\,\frac{t}{2}\right)\right\}\\&=\frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+O\left(\frac{1}{t}\right),\\ \vartheta'(t)&=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi}+O\left(\frac{1}{t}\right),\\ \vartheta''(t)&\sim\frac{1}{2t}\,,\qquad t\to\infty\,,\end{aligned}\tag{1}$$

AMS Subject Classification (1991): Primary 11M06.
Key words: Riemann-Siegel formula, zero point, distance of consecutive zero points, irregularity of the distribution of the zero points.

напишем в следующей форме

$$Z(t) = 2 \cdot \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta(t) - t\ln n\} + O(t^{-1/4}), \tag{2}$$
$$P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \quad t \in \langle T, T+H\rangle, \quad H \leqq \sqrt[4]{T}$$

(условие $H \leqq \sqrt[4]{T}$ выражает то обстоятельство, что исследование касается прежде всего очень коротких отрезков $\langle T, T+H\rangle$).

Напомним, что в работе [1], обобщая последовательность Грама $\{t_\nu\}$ мы ввели семейство последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$ следующим образом

$$\vartheta[t_\nu(\tau)] = \pi\nu + \tau, \qquad \nu = 1, 2, \dots, \quad \tau \in \langle -\pi, \pi\rangle; \tag{3}$$
$$\vartheta\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi\nu + \frac{\pi}{2}.$$

При этом последовательность $\left\{t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ обладает специфическим свойством – члены этой последовательности являются простыми корнями уравнения

$$2 \cdot \cos\{\vartheta(t)\} = 0, \tag{4}$$

т.е., нулями первого члена правой стороны формулы Римана-Зиигеля (2), (конечно, $t_{\nu+1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$). Для расстояния последовательных нулей и числа нулей функции $2\cos\{\vartheta(t)\}$, $t \in \langle T, T+H\rangle$ имеют место следующие формулы (ср. [1], (40))

$$t_{\nu+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\ln P_0} + O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right), \tag{5}$$
$$Q = \sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} 1 = \frac{1}{\pi} H \ln P_0 + O(1).$$

В теперь предлагаемой работе мы обобщим последовательность $\left\{t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ следующим образом. Вместо первого члена $2\cos\{\vartheta(t)\}$ мы используем следующую часть суммы входящей в (2)

$$Z_1(t; P) = 2 \cdot \sum_{n<P_0,\, p \leqq P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta(t) - t\ln n\}, \tag{6}$$

содержащую неограниченное при $T \to \infty$ количество членов, где p – простое число и

$$p \in \langle 2, P\rangle\,, \qquad n = \prod_{p \leqq P} p^{\alpha(p)}\,, \qquad 1 \leqq \alpha(p) \leqq \beta(P)\,,$$
$$P = P(T) \to \infty\,, \qquad T \to \infty\,,$$

при условии

$$\prod_{p \leqq P} p^{\beta} < P_0\,. \tag{7}$$

Далее, вместо условия (4), ставим следующее условие

$$Z_1(t;P) = 0\,, \qquad t \in \langle T, T+H\rangle\,, \tag{8}$$

которое, как мы увидим, сводится к условию

$$\vartheta\big[\gamma_\nu(P)\big] - C\big[\gamma_\nu(P);P\big] = \pi\nu + \frac{\pi}{2}\,, \tag{9}$$

где

$$C(t;P) = \sum_{p \leqq P} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} + \sum_{p \leqq P} \frac{\sin(2t\ln p)}{2p} + O(1) \tag{10}$$

для корней $\gamma_\nu(P)$ уравнения (8), ($C(t;P)$ зависит только от простых чисел входящих в отрезок $\langle 2, P\rangle$).

1. Результаты
Локальная регулярность распределения нулей $\gamma_\nu(P)$ и «блуждание» этих нулей относительно линейной решетки

В вопросе о распределении нулей $\gamma_\nu(P)$ функции $Z_1(t;P)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$ получены следующие результаты.

(A) Для последовательных нулей $\gamma_\nu(P)$, $\gamma_{\nu+1}(P) \in \langle T, T+H\rangle$ имеет место следующая асимптотическая формула

$$\begin{gathered}\gamma_{\nu+1}(P) - \gamma_\nu(P) = \frac{\pi}{\ln P_0} + O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^{3/2}}\right\}, \qquad T \to \infty\,, \\ H \in \left\langle \frac{1{,}1\pi}{\ln P_0}\,, \sqrt[4]{T}\right\rangle.\end{gathered} \tag{11}$$

Соотношение (9) (см. (3)) определяет взаимно однозначное соответствие $\gamma_\nu(P) \leftrightarrow t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$, т.е., величина

$$\gamma_\nu(P) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad \gamma_\nu(P) \in \langle T, T+H\rangle,$$

однозначно определена; в соответствующем месте работы показано, что

$$t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \left\langle T - \frac{A}{\sqrt{\ln P_0}}, T + H + \frac{A}{\sqrt{\ln P_0}}\right\rangle. \tag{12}$$

Поскольку остаточный член первой формулы в (5) оценивается как $O\left(\frac{1}{T^{3/4}\ln^2 T}\right)$, то с огромной точностью можно считать, что точки $t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ удовлетворяющие условию (12) составляют линейную решетку с расстоянием $\frac{\pi}{\ln P_0}$ между соседними узлами.

Далее, для любого фиксированного нуля $\gamma_{\nu_0}(P) \in \langle T, T+H\rangle$ имеет место (см. (5), (11))

$$\gamma_{\nu_0+k}(P) = \gamma_{\nu_0}(P) + \frac{\pi}{\ln P_0}k + O\left\{\frac{k}{(\ln P_0)^{3/2}}\right\},$$

$$t_{\nu_0+k}\left(\frac{\pi}{2}\right) = t_{\nu_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{\ln P_0}k + O\left(\frac{k}{T^{3/4}\ln^2 T}\right),$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K,$$

т.е.,

$$\left[\gamma_{\nu_0+k}(P) - t_{\nu_0+k}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot \ln P_0 = \left[\gamma_{\nu_0}(P) - t_{\nu_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot \ln P_0 + O\left(\frac{K}{\sqrt{\ln P_0}}\right),$$

$$\frac{\gamma_{\nu_0+k}(P) - t_{\nu_0+k}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t_{\nu_0+k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - t_{\nu_0+k}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sim \frac{\gamma_{\nu_0}(P) - t_{\nu_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t_{\nu_0+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - t_{\nu_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \qquad T \to \infty, \tag{13}$$

$$K = \frac{\sqrt{\ln P_0}}{\omega(T)},$$

где $0 < \omega(T)$ – функция, сколь угодно медленно возрастающая к ∞ при $T \to \infty$.

Асимптотическое равенство (13) выражает регулярность распределения нулей $\gamma_\nu(P)$ лежащих в очень коротком отрезке

$$\left\langle \gamma_{\nu_0}(P) - \frac{1,1\pi}{\omega(T)\sqrt{\ln P_0}}, \gamma_{\nu_0}(P) + \frac{1,1\pi}{\omega(T)\sqrt{\ln P_0}} \right\rangle \cap \langle T, T+H\rangle,$$
$$H \in \left\langle \frac{A}{\sqrt{\ln P_0}}, \sqrt[4]{T} \right\rangle,$$

оносительно решетки $t_{\nu_0+k}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \langle -K, K\rangle$; использованная оценка

$$K \cdot \left\{ t_{\nu+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} < \frac{1,1\pi}{\omega(T)\sqrt{\ln P_0}}.$$

В вопросе о колебании величины $\gamma_\nu(P) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\gamma_\nu(P) \in \langle T, T+H\rangle$ в работе получены следующие результаты.

(Б) Имеет место теорема о среднем квадратическом для величины $\left|\gamma_\nu(P) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$:

$$\frac{1}{Q} \cdot \sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} \left[\gamma_\nu(P) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^2 \sim \frac{1}{2} \frac{\ln\ln\ln P_0}{\ln^2 P_0}, \qquad T \to \infty, \tag{14}$$

где $H \in \langle P^2, \sqrt[4]{T}\rangle$. Отсюда получается следствие: существует $\overset{*}{\gamma}_\nu(P) \in \langle T, T+H\rangle$ такого рода, что

$$\frac{\left|\overset{*}{\gamma}_\nu(P) - \overset{*}{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}{\overset{*}{t}_{\nu+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \overset{*}{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)} > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\ln\ln\ln P_0} \to +\infty \tag{15}$$

при $T \to \infty$.

Более тонкие черты колебания величины $\left\{\gamma_\nu(P) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ выражают следующие результаты.

(В) Существует по меньшей мере $\frac{1}{3}H(\ln\ln P_0)^{1/3-\eta}$ значений $\bar{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ такого рода, что

$$\frac{\bar{\gamma}_\nu(P) - \bar{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\bar{t}_{\nu+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \bar{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)} = O\left(\frac{1}{\ln\ln P_0}\right) \to 0 \tag{16}$$

при $T \to \infty$, $H \in \langle P^4, \sqrt[4]{T}\rangle$ и η – сколь угодно малое положительное число, где например

$$P^4 = \ln^2 P_0 \, . \tag{17}$$

(Г) Существуют два множества значений $\tilde{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\tilde{\tilde{t}}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ – количество каждого из них по меньшей мере $\frac{1}{3}H(\ln\ln P_0)^{1/3-\eta}$ – такого рода, что

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{\gamma}_\nu(P) - \tilde{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\tilde{t}_{\nu+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \tilde{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sim -\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\ln\ln\ln P_0}{\ln\ln\ln\ln P_0}} \to -\infty \, , \\ &\frac{\tilde{\tilde{\gamma}}_\nu(P) - \tilde{\tilde{t}}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\tilde{\tilde{t}}_{\nu+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \tilde{\tilde{t}}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\ln\ln\ln P_0}{\ln\ln\ln\ln P_0}} \to +\infty \end{aligned} \tag{18}$$

при $T \to \infty$, $H \in \langle P^4, \sqrt[4]{T}\rangle$.

Соотношения (14) – (18) свидетельствуют о полной иррегулярности расположения нулей $\gamma_\nu(P) \in \langle T, T+H\rangle$ относительно решетки $\left\{t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$. Под иррегулярностью мы подрозумеваем следующее: если зафиксированно положение нуля $\gamma_{\nu_0}(P) \in \langle T, T+H\rangle$ (ср. (А)), то положение нуля γ_{ν_0+k} относительно решетки при больших $|k|$ является совершенно неопределенным. Явно отметим, что явление это имеет место и для очень короткого промежутка $\langle T, T+\ln^2 P_0\rangle$ (см. (17)).

Упоминавшуюся иррегулярность мы назовем блужданием нулей $\gamma_\nu(P) \in \langle T, T+H\rangle$ относительно решетки $\left\{t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$. Блуждание это можно считать результатом «азартной игры», которую играют простые числа отрезка $\langle 2, P\rangle$ через посредство формул (9), (10).

2. Интерференция колебаний определяющих функцию $Z_1(t;P)$

По условию (7) имеем

$$\beta \cdot \sum_{p \leqq P} \ln P < \ln P_0 \, . \tag{19}$$

Так как для функции Чебышева $\Theta(x)$ имеет место формула

$$\Theta(x) = \sum_{p \leqq x} \ln P \sim x \, , \qquad x \to \infty \, , \tag{20}$$

то вместо (19) используем условие

$$2P\cdot\beta(P)<\ln P_0\,.$$

Замечание 1. Значения P, $\beta(P)$ фиксируем например следующим образом

$$P=(\ln P_0)^{1-\varepsilon}\,,\quad \beta=\beta(P)=(\ln P_0)^{\varepsilon/2}\,,\qquad \varepsilon\in\left(0,\tfrac{1}{2}\right\rangle. \tag{21}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *При условиях* (21) *имеет место формула*

$$\begin{gathered} Z_1(t;\varepsilon,P_0)=2\cdot B(t;\varepsilon,P_0)\cdot\cos\{\vartheta(t)-C(t;\varepsilon,P_0)\}\,,\\ t\in\langle T,T+H\rangle\,,\quad H\leqq\sqrt[4]{T}\,, \end{gathered} \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered} B(t)=\prod_{p\leqq P}|M(t;p,\varepsilon,P_0)|>0\,,\\ M(t)=\frac{1-\{Q(t;p)\}^{\beta+1}}{1-Q(t;p)}\,,\qquad Q(t;p)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\ln p}}{\sqrt{p}}\,,\ \ |Q|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \end{gathered} \tag{23}$$

и далее

$$\begin{aligned} C(t)&=\sum_{p\leqq P}\arg\{M(t;p)\}\\ &=\sum_{p\leqq P}\frac{\sin(t\ln p)}{\sqrt{p}}+\sum_{p\leqq P}\frac{\sin(2t\ln p)}{2p}+O(1)\,, \end{aligned} \tag{24}$$

при этом оценка остаточного члена справедлива равномерно относительно ε.

Доказательство. Очевидно имеет место

$$Z_1(t)=Z_1(t;\varepsilon,P_0)=2\cdot\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta(t)}Z_2(t)\}\,,$$

где

$$Z_2(t)=Z_2(t;\varepsilon,P_0)=\prod_{p\leqq P}\sum_{k=0}^{\beta}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\ln p}}{\sqrt{p}}\right)^k \tag{25}$$

для $t\in\langle T,T+H\rangle$. Далее (см. (23))

$$\arg M=\arg(1-Q^{\beta+1})-\arg(1-Q)=\arg M_1-\arg M_2\,. \tag{26}$$

Пусть

$$M_1 = a_1 - \mathrm{i}\, b_1\,, \tag{27}$$

$$a_1 = 1 - \frac{\cos\{(\beta+1)\varphi\}}{p^{(\beta+1)/2}} = 1 - c_1 = 1 - o(1)\,, \qquad \varphi = t\ln p\,.$$

$$b_1 = \frac{\sin\{(\beta+1)\varphi\}}{p^{(\beta+1)/2}}\,,$$

По формуле Тейлора имеем

$$\arg M_1 = -\operatorname{arctg}\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_1}{a_1} + O(|b_1|^3)\,,$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_1}{1-c_1} = b_1 + b_1c_1 + O(|b_1|c_1^2) = O\left(\frac{1}{p^{(\beta+1)/2}}\right)$$

и, следовательно,

$$\arg M_1 = O\left(\frac{1}{p^{(\beta+1)/2}}\right) \tag{28}$$

равномерно относительно ε. В случае же

$$M_2 = a_2 - \mathrm{i}\, b_2\,, \qquad a_2 = 1 - \frac{\cos\varphi}{\sqrt{p}} = 1 - c_2 \geqq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad b_2 = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{p}}\,,$$

аналогичным образом получаем

$$\arg M_2 = -\operatorname{arctg}\frac{b_2}{a_2} = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{p}} - \frac{\sin(2\varphi)}{2p} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right). \tag{29}$$

Следовательно, в силу (26) – (29) получается (24). Так как (см. (23), (25))

$$Z_2(t) = \prod_{p\leqq P} M(t;p) = \prod_{p\leqq P} |M(t;p)| \cdot \prod_{p\leqq P} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg M(t;p)} = B(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,C(t)}\,,$$

то отсюда следует (22). Доказательство Леммы 1 закончено. □

Замечание 2. Тот факт, что оценки встречающихся остаточных членов справедливы равномерно относительно ε (ср. (28)), мы уже не будем упоминать явным образом.

Из Леммы 1 в силу (6) получаем:

Следствие 1.

$$\sum_{n<P_0,\ p\leqq P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta(t) - t\ln n\} = B(t)\cdot\cos\{\vartheta(t) - C(t)\}, \qquad (30)$$
$$B(t) > 0, \quad t\in\langle T, T+H\rangle.$$

Замечание 3. С точки зрения оптики и теории сигналов формула (30) выражает в замкнутой форме результат интерференции колебаний неограниченного (при $T\to\infty$) количества осцилляторов. При этом $B(t)$, $C(t)$ зависят лишь от простых чисел $p\in\langle 2, p\rangle$.

3. Лемма о производной функции $C(t)$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *При условиях* (21) *имеет место*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(t;\varepsilon,P_0) = O\{(\ln P_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\}, \qquad t\in\langle T, T+H\rangle. \qquad (31)$$

Доказательство. В обозначениях Леммы 1 имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arg M(t) = -\frac{a_1b_1' + c_1'b_1}{a_1^2+b_1^2} + \frac{a_2b_2' + c_2'b_2}{a_2^2+b_2^2} = -M_3(p) + M_4(p).$$

Так как

$$a_1b_1' + c_1'b_1 = (\beta+1)\ln p\frac{\cos\{(\beta+1)\varphi\}}{p^{(\beta+1)/2}} - (\beta+1)\frac{\ln p}{p^{\beta+1}} = O\left\{\frac{\beta\ln P}{p^{(\beta+1)/2}}\right\},$$
$$\frac{1}{a_1^2+b_1^2} = 1 + O\left\{\frac{1}{p^{(\beta+1)/2}}\right\},$$

то

$$M_3(p) = O\left\{\frac{\beta\ln P}{p^{(\beta+1)/2}}\right\},$$
$$\prod_{p\leqq P} M_3(p) = O\left\{\beta\ln P\cdot\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p^{(\beta+1)/2}}\right\} = O\left\{\frac{\beta\ln P}{2^{(\beta+1)/2}}\right\} = o(1).$$

Аналогичным образом получаем соотношение

$$M_4(p) = \frac{\ln p}{\sqrt{p}} \cos\varphi + O\left(\frac{\ln p}{p}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} C(t;\varepsilon,P_0) &= \sum_{p\leqq P} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \arg M(t;\varepsilon,P_0) \\ &= \sum_{p\leqq P} \frac{\ln p}{\sqrt{p}} \cos(t\ln p) + O\left(\sum_{p\leqq P} \frac{\ln p}{p}\right) \\ &= \sum_{p\leqq P} \frac{\ln p}{\sqrt{p}} \cos(t\ln p) + O(\ln P), \end{aligned} \tag{32}$$

где использована формула Мертенса

$$\sum_{p\leqq x} \frac{\ln p}{p} = O(\ln x).$$

Для главного члена в (32), по лемме Абеля

$$\sum_{n=3}^{P} c(n) f(n) = -\int_2^P C(x) f'(x)\,\mathrm{d}x + C(P)\cdot f(P), \tag{33}$$

в случае (см (20))

$$\begin{aligned} c(n) &= \begin{cases} \ln p, & n = p, \\ 0, & n \neq p, \end{cases} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ C(x) &= \sum_{p\leqq x} \ln p = O(x) \end{aligned}$$

получается оценка

$$O\left(\sum_{p\leqq P} \frac{\ln p}{\sqrt{p}}\right) = O(\sqrt{P}) = O\{(\ln P_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\}.$$

Теперь из (32) следует (31). □

4. Теорема о нулях функции $Z_1(t;\varepsilon,P_0)$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\gamma'(\varepsilon,P_0)$, $\gamma''(\varepsilon,P_0)$ – последовательные нули функции*

$$Z_1(t;\varepsilon,P_0)\,, \qquad t\in\langle T,T+H\rangle\,,\ \ H\in\left\langle\frac{1,1\pi}{\ln P_0}\,,\,\sqrt[4]{T}\right\rangle. \tag{34}$$

При условиях (21) *имеет место асимптотическая формула*

$$\gamma''(\varepsilon,P_0)-\gamma'(\varepsilon,P_0)=\frac{\pi}{\ln P_0}+O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^{\frac{3+\varepsilon}{2}}}\right\},\qquad T\to\infty \tag{35}$$

(*ср.* (11)) *и все нули функции* (34) *– простые.*

Доказательство. Так как (см. (22), (23))

$$\begin{gathered}Z_1(t;\varepsilon,P_0)=2B(t;\varepsilon,P_0)\cdot\cos\{\Phi(t;\varepsilon,P_0)\}\,,\\ B(t)>0\,,\quad \Phi(t)=\vartheta(t)-C(t)\,,\quad t\in\langle T,T+H\rangle\,,\end{gathered} \tag{36}$$

то функции

$$Z_1(t;\varepsilon,P_0)\,,\quad \cos\{\Phi(t;\varepsilon,P_0)\}\,;\qquad t\in\langle T,T+H\rangle\,,$$

имеют совпадающие множества нулей. Нули же второй функции определяются только поведением фазы Φ. Далее (см. (1), (31), (36))

$$\begin{aligned}\Phi'(t)&=\vartheta'(t)-C'(t)\\ &=\frac12\ln\frac{t}{2\pi}+O\left(\frac1t\right)+O\{(\ln P_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\}\\ &=\frac12\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{H}{T}\right)+O\{(\ln P_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\}\\ &=\left(1+O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^{(1+\varepsilon)/2}}\right\}\right)\cdot\ln P_0>0\,,\qquad T\to\infty\,.\end{aligned} \tag{37}$$

□

Замечание 4. Поскольку фаза $\Phi(t;\varepsilon,P_0)$, $t\in\langle T,T+H\rangle$, при допустимом фиксированом значении ε – возрастающая функция, то нули функции $Z_1(t;\varepsilon,P_0)$ (если они существуют) являются простыми нулями. (Кратный нуль связан с корнем уровнения $\Phi'(t)=0$).

Так как, например, для отрезка

$$\left\langle t, t+\frac{1,1\pi}{\ln P_0}\right\rangle \subset \langle T, T+H\rangle$$

имеет место (см. (37))

$$\Phi\left(t+\frac{1,1\pi}{\ln P_0}\right)-\Phi(t)=\Phi'(d_1)\cdot\frac{1,1\pi}{\ln P_0}\sim 1,1\pi\,, \qquad T\to\infty\,,\ \ d_1\in\left(t,t+\frac{1,1\pi}{\ln P_0}\right),$$

то он содержит нуль функции $Z_1(t)$.

Последовательные нули $\gamma'(\varepsilon,P_0)$, $\gamma''(\varepsilon,P_0)$ функции $Z_1(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \Phi\left[\gamma'(\varepsilon,P_0);\varepsilon,P_0\right] &= \pi\cdot\nu(\varepsilon,P_0)+\frac{\pi}{2}\,,\\ \Phi\left[\gamma''(\varepsilon,P_0);\varepsilon,P_0\right] &= \pi\cdot\left\{\nu(\varepsilon,P_0)+1\right\}+\frac{\pi}{2}\,, \end{aligned} \tag{38}$$

где $\nu=\nu(\varepsilon,P_0)$ – целое число, т.е.,

$$\pi=\Phi(\gamma'')-\Phi(\gamma')=\Phi'(d_2)\cdot(\gamma''-\gamma')\,, \qquad d_2\in(\gamma',\gamma'')\,,$$

и отсюда (см. (37)) уже следует асимптотическое соотношение (35).

Замечание 5. В силу (38) можно использовать обозначения $\gamma'=\gamma_\nu$, $\gamma''=\gamma_{\nu+1}$.

Пусть $N_1\left[\langle T,T+H\rangle;Z_1\right]$ – число нулей функции $Z_1(t;\varepsilon,P_0)$, $t\in\langle T,T+H\rangle$.

Следствие 2.

$$N_1=\frac{1}{\pi}H\ln P_0+O\left\{H(\ln P_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\right\}, \qquad T\to\infty\,.$$

5. Структура амплитуды $B(t)$ и ее оценки

Так как (см (23))

$$\begin{aligned} |M(t)|=\left\{\frac{p^{\beta+1}+1}{p^\beta(p+1)}\right\}^{\frac12}\cdot\left(1-\frac{2p^{\frac{\beta+1}{2}}}{p^{\beta+1}+1}\cdot\cos\left\{(\beta+1)\cdot t\ln p\right\}\right)^{\frac12}\\ \cdot\left\{1-\frac{2\sqrt{p}}{p+1}\cdot\cos(t\ln p)\right\}^{-\frac12}, \end{aligned}$$

то

$$\ln|M(t;\varepsilon,P_0)| = \frac{1}{\sqrt{p}}\cos(t\ln p) + O\Big(\frac{1}{p}\Big).$$

Теперь, по формуле (23) для $B(t)$, в силу формулы Мертенса

$$\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p} = \ln\ln x + E_0 + O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big) \tag{39}$$

(E_0 – постоянная Эйлера), имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *При условиях* (21)

$$B(t;\varepsilon,P_0) = \mathrm{e}^{B_1(t;\varepsilon,P_0)+O(\ln\ln\ln P_0)}, \tag{40}$$

где

$$B_1(t;\varepsilon,P_0) = \prod_{p\leqq P}\frac{1}{\sqrt{p}}\cos(t\ln p).$$

Так как

$$|B_1(t)| \leqq \prod_{p\leqq P}\frac{1}{\sqrt{p}}, \tag{41}$$

то, по лемме Абеля (*см* (33)) *в случае*

$$c(n) = \begin{cases} 1, & n=p,\\ 0, & n\neq p,\end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$C(x) = \sum_{p\leqq x}1 = \pi(x)$$

оплучаем оценку

$$B_1(t;\varepsilon,P_0) = O\Big(\frac{\sqrt{P}}{\ln P}\Big) = O\Big\{\frac{(\ln P_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{\ln\ln P_0}\Big\}. \tag{42}$$

Теперь из (40) в силу (42) получается следующее уточнение тривиальной оценки $B(t;\varepsilon,P_0) > 0$ (см. (23)).

Теорема 2. *При условиях* (21) *существует абсолютная постоянная* $A>0$ *такого рода, что*

$$P_0^{-\frac{A}{(\ln P_0)^{(1+\varepsilon)/2}\cdot\ln\ln P_0}} < B(t;\varepsilon,P_0) < P_0^{\frac{A}{(\ln P_0)^{(1+\varepsilon)/2}\cdot\ln\ln P_0}}, \quad t\in\langle T,T+H\rangle,\quad T\to\infty. \tag{43}$$

В силу (23), (43) получается:

Следствие 3.

$$|Z_1(t;\varepsilon,P_0)| < P_0^{\frac{A_1}{(\ln P_0)^{(1+\varepsilon)/2}\cdot\ln\ln P_0}}, \qquad t\in\langle T,T+H\rangle,$$

при $T\to\infty$.

6. Оценка разности $\gamma_\nu - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *При условиях* (21) *имеет место оценка*

$$\gamma_\nu(\varepsilon,P_0) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) = O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^{(1+\varepsilon)/2}\cdot\ln\ln P_0}\right\} \tag{44}$$

для $\gamma_\nu\in\langle T,T+H\rangle$.

Доказательство. Напомним, што нуль $\gamma_\nu(\varepsilon,P_0)$ удовлетворяет условию (см. (24), (36), (38))

$$\begin{gathered}\vartheta[\gamma_\nu(\varepsilon,P_0)] - C[\gamma_\nu(\varepsilon,P_0);\varepsilon,P_0] = \pi\cdot\nu(\varepsilon,P_0)+\frac{\pi}{2},\\ C(t;\varepsilon,P_0) = \sum_{p\leqq P}\frac{\sin(t\ln p)}{\sqrt{p}} + \sum_{p\leqq P}\frac{\sin(2t\ln p)}{2p} + O(1).\end{gathered} \tag{45}$$

Так как (см. (3))

$$\vartheta\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi\nu+\frac{\pi}{2}, \tag{46}$$

то (45) принимает следующий вид

$$\vartheta(\gamma_\nu) - \vartheta\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = C(\gamma_\nu),$$

т.е.,

$$\left[\gamma_\nu - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\vartheta'(d_3) = C(\gamma_\nu), \tag{47}$$

где (см. (1))

$$\vartheta'(d_3) = \frac12\ln\frac{d_3}{2\pi} + O\left(\frac{1}{d_3}\right), \qquad d_3\in\left(\gamma_\nu, t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\ \left(\in\left(t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right),\gamma_\nu\right)\right). \tag{48}$$

Теперь мы должны оценить пасстояние между $t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $\langle T,T+H\rangle$.

Пусть $\bar{\nu}$ удовлетворяет условию

$$\gamma_\nu \in \left\langle t_{\bar{\nu}}\left(\frac{\pi}{2}\right), t_{\bar{\nu}+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle, \qquad \gamma_\nu \in \langle T, T+H\rangle;$$

очевидно (см (5))

$$\gamma_\nu - t_{\bar{\nu}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = O\left(\frac{1}{\ln P_0}\right). \tag{49}$$

Далее из (45), (46) следует

$$\begin{gathered} \vartheta(\gamma_\nu) - \vartheta\left[t_{\bar{\nu}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - C(\gamma_\nu) = \pi(\nu - \bar{\nu}), \\ \left[\gamma_\nu - t_{\bar{\nu}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\vartheta'(d_4) - C(\gamma_\nu) = \pi(\nu-\bar{\nu}), \end{gathered} \tag{50}$$

где d_4 входит в интервал определяемый точками γ_ν, $t_{\bar{\nu}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, т.е.,

$$d_4 \in \left\langle T - \frac{A}{\ln P_0}, T + H + \frac{A}{\ln P_0}\right\rangle, \qquad \vartheta'(d_4) \sim \ln P_0. \tag{51}$$

Еще отметим, что (см. (24), (39), (41), (42))

$$C(t) = O\left\{\frac{(\ln P_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{\ln\ln P_0}\right\}, \qquad t \in \langle T, T+H\rangle. \tag{52}$$

Теперь из (50) в силу (49), (51), (52) получаем оценку

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\ln P_0}(\nu - \bar{\nu}) &= \left[\gamma_\nu - t_{\bar{\nu}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\frac{\vartheta'(d_4)}{\ln P_0} + \frac{C(\gamma_\nu)}{\ln P_0} \\ &= O\left(\frac{1}{\ln P_0}\right) + O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^{(1+\varepsilon)/2}\cdot\ln\ln P_0}\right\}, \end{aligned}$$

т.е. (см. (5)),

$$t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) - t_{\bar{\nu}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^{(1+\varepsilon)/2}\cdot\ln\ln P_0}\right\}. \tag{53}$$

Следовательно (см. (49), (53); $\gamma_\nu \in \langle T, T+H\rangle$)

$$t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \langle T - L, T + H + L\rangle, \qquad L = \frac{A}{(\ln P_0)^{(1+\varepsilon)/2}\cdot\ln\ln P_0} \tag{54}$$

(ср. (12)) и отсюда получаем соотношение (см. (48))

$$\vartheta'(d_3) \sim \ln P_0, \qquad T \to \infty. \tag{55}$$

Теперь из (47) в силу (52), (55) следует оценка (44). □

7. Лемма о среднем значении для $C^2\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right);\varepsilon,P_0\right]$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *При условиях* (21) *имеет место*

$$\sum_{T\leqq t_\nu(\frac{\pi}{2})\leqq T+H} C^2\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right);\varepsilon,P_0\right]=\frac{1}{2\pi}H\ln P_0\cdot\ln\ln P+O\left(H\ln P_0\cdot\sqrt{\ln\ln P}\right), \tag{56}$$

для $H\in\langle P^2,\sqrt[4]{T}\rangle$.

Доказательство. В силу (24)

$$C^2\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=S_1^2+S_2^2+2S_1S_2+O(1)+O(|S_1|)+O(|S_2|), \tag{57}$$

где

$$\begin{aligned}S_1&=\sum_{p\leqq P}\frac{1}{\sqrt{p}}\sin\left\{t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln p\right\},\\ S_2&=\sum_{p\leqq P}\frac{1}{2p}\sin\left\{2t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln p\right\}.\end{aligned} \tag{58}$$

Очевидно

$$\begin{aligned}S_1^2=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\sum_{p\neq q}\sum\frac{1}{\sqrt{pq}}\cos\left\{t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln\frac{p}{2}\right\}\\ -\frac{1}{2}\sum\sum\frac{1}{\sqrt{pq}}\cos\left\{t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln(pq)\right\}=S_{11}+S_{12}-S_{13}.\end{aligned} \tag{59}$$

В силу (5), (39) имеет место

$$\sum_{T\leqq t_\nu(\frac{\pi}{2})\leqq T+H} S_{11}=\frac{1}{2\pi}H\ln P_0\cdot\ln\ln P+O(H\ln P_0)+O\left(\frac{H\ln P_0}{\ln P}\right)+O(\ln\ln P). \tag{60}$$

Далее

$$\sum_{T\leqq t_\nu(\frac{\pi}{2})\leqq T+H} S_{12}=\frac{1}{2}\sum_{p\neq q}\sum\frac{1}{\sqrt{pq}}\cdot\sum_{T\leqq t_\nu(\frac{\pi}{2})\leqq T+H}\cos\{2\pi\psi_{12}(\nu)\},$$

где

$$\psi_{12}(\nu)=\frac{1}{2\pi}t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln\frac{p}{q},$$

$$\psi_{12}'(\nu)=\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{d}\nu}\ln\frac{p}{q}\sim\frac{1}{2\ln P_0}\ln\frac{p}{q},$$

$$\psi_{12}''(\nu)<0,\quad p>q,\qquad (\psi_{12}''(\nu)>0,\quad p<q)$$

(в связи с производной ν пробегает все значения $\nu \geqq 1$) так как (см. (1), (3))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\vartheta'\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]} \sim \frac{1}{2\ln P_0}, \qquad T \to \infty .$$

По методу ван дер Корпута (см. [2; стр. 78, Лемма 1, стр. 73, Лемма 1])

$$\sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} \cos\left\{2\pi\psi_{12}(\nu)\right\} = \int_T^{T+H} \cos\left\{2\pi\psi_{12}(x)\right\} \mathrm{d}x + O(1)$$
$$= O\left(\frac{\ln P_0}{\left|\ln \frac{p}{2}\right|}\right), \qquad p \neq q,$$

что приводит к оценке

$$\sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} S_{12} = O\left(\ln P_0 \cdot \sum_{p \neq q}\sum \frac{1}{\sqrt{pq}\left|\ln \frac{p}{2}\right|}\right)$$
$$= O\left(\ln P_0 \cdot \sum_{p,q \leqq P}\sum \sqrt{\frac{q}{p}}\right) = O(P^2 \cdot \ln P_0). \tag{61}$$

В случае суммы

$$\sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} S_{13} = \frac{1}{2}\sum_{p,q}\sum \frac{1}{\sqrt{pq}} \cdot \sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} \cos\left\{2\pi\psi_{13}(\nu)\right\},$$

где

$$\psi_{13}(\nu) = \frac{1}{2\pi} t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln(pq), \quad \psi'_{13}(\nu) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(pq)}{\ln P_0}, \qquad T \to \infty,$$
$$\psi''_{13}(\nu) < 0,$$

аналогичным образом получаем оценку

$$\sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} S_{13} = O(P \ln P_0). \tag{62}$$

Следовательно (см. (59), (60), (61), (62))

$$\sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} S_1^2 = \frac{1}{2\pi} H \ln P_0 \cdot \ln\ln P + O(H \ln P_0), \tag{63}$$

для $H \in \langle P^2, \sqrt[4]{T} \rangle$.

Поскольку сумме S_2^2 (см. (58)) соответствует главный член (ср. (59))

$$\frac{1}{8} \prod_{p \leqq P} \frac{1}{p^2},$$

то аналогично прежнему случаю получаем оценку

$$\sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} S_2^2 = O(H \ln P_0), \qquad H \in \langle P^2, \sqrt[4]{T} \rangle. \tag{64}$$

Отметим, что по неравенству Коши-Буняковского (см. (5), (63), (64)) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} |S_1 S_2| &= O\left(H \ln P_0 \sqrt{\ln\ln P}\right), \\ \sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} |S_1| &= O\left(H \ln P_0 \sqrt{\ln\ln P}\right), \\ \sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} |S_2| &= O(H \ln P_0). \end{aligned} \tag{65}$$

Теперь из (57) в силу (63) – (65) следует (56). □

8. Теорема о среднем для величины $\left|\gamma_\nu(\varepsilon, P_0) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2$

Справедлива следующая теорема (ср. (14)).

Теорема 3. *При условиях* (21) *имеет место асимптотическая формула*

$$\frac{1}{Q} \cdot \sum_{T \leqq t_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} \left[\gamma_\nu(\varepsilon, P_0) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln\ln\ln P_0}{\ln^2 P_0} + O\left(\frac{\sqrt{\ln\ln\ln P_0}}{\ln^2 P_0}\right), \quad T \to \infty, \tag{66}$$

для $H \in \langle P^2, \sqrt[4]{T} \rangle$.

Отсюда получаем (ср. (15)):

Следствие 4. *Для любого фиксированного* $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$ *существует* $\overset{*}{\gamma}_\nu(\varepsilon, P_0) \in \langle T, T+H \rangle$ *такого рода, что*

$$\left|\overset{*}{\gamma}_\nu(\varepsilon, P_0) - \overset{*}{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| > \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\ln\ln\ln P_0}}{\ln^2 P_0}, \qquad T \to \infty.$$

Доказательство Теоремы 3. Так как (см. (31), (44), (54))

$$\begin{aligned} & C[\gamma_\nu(\varepsilon,P_0);\varepsilon,P_0] - C\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right);\varepsilon,P_0\right] \\ = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C[d_5;\varepsilon,P_0]\cdot\left[\gamma_\nu(\varepsilon,P_0) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ = & O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^\varepsilon \ln\ln P_0}\right\}, \qquad \gamma_\nu\in\langle T,T+H\rangle,\ \ d_5\in(T-L,\,T+H+L), \end{aligned} \tag{67}$$

то из (47) в силу (55), (67) получаем основную (дла последующего) формулу

$$\left[\gamma_\nu(\varepsilon,P_0) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\ln P_0 = C\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right);\varepsilon,P_0\right] + O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^\varepsilon\ln\ln P_0}\right\} \tag{68}$$

для всех $\gamma_\nu\in\langle T,T+H\rangle$. Поскольку (см. (5), (54))

$$\sum_{T-L\leqq t_\nu(\frac{\pi}{2})<T} 1 + \sum_{T+H<t_\nu(\frac{\pi}{2})\leqq T+H+L} 1 = O(L\ln P_0) = O\left\{\frac{(\ln P_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{\ln\ln P_0}\right\},$$

то (см. (52); функцию $C(t)$ в (24) можно считать определенной на отрезке $\langle T-L,\,T+H+L\rangle$)

$$O\left\{C^2\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot L\ln P_0\right\} = O\left\{\frac{(\ln P_0)^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)}}{(\ln\ln P_0)^3}\right\}.$$

Следовательно

$$\sum_{T\leqq\gamma_\nu\leqq T+H} C^2\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \sum_{T\leqq t_\nu(\frac{\pi}{2})\leqq T+H} C^2\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + O\left\{\frac{(\ln P_0)^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)}}{(\ln\ln P_0)^3}\right\}. \tag{69}$$

Еще отметим, что в силу (56) по формуле Коши-Буняковского имеет место

$$\sum_{T\leqq t_\nu(\frac{\pi}{2})\leqq T+H}\left|C\left[t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right| = O\left(H\ln P_0\cdot\sqrt{\ln\ln P}\right). \tag{70}$$

Теперь по формуле (68) в силу (56), (69), (70) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{T\leqq\gamma_\nu\leqq T+H}\left[\gamma_\nu(\varepsilon,P_0) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2\cdot\ln^2 P_0 \\ & \qquad = \frac{1}{2\pi}H\ln P_0\cdot\ln\ln P + O\left(H\ln P_0\cdot\sqrt{\ln\ln P}\right), \end{aligned} \tag{71}$$

так как

$$H\ln P_0\cdot\sqrt{\ln\ln P} > \frac{(\ln P_0)^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)}}{(\ln\ln P_0)^3}\,.$$

Поскольку (см. (21))

$$\ln\ln P = \ln\ln\ln P_0 + \ln(1-\varepsilon)\,,$$

то из (71) в силу (5) получаем (66). □

9. Лемма о нулях главной части функции $C(t;\varepsilon,P_0)$

Пусть (см. (24))

$$C(t;\varepsilon,P_0) = C_0(t;\varepsilon,P_0) + R(t;\varepsilon,P_0)\,,\qquad R(t) = O(1)\,,\tag{72}$$

$$C_0(t) = \sum_{p\leqq P}\frac{\sin(t\ln p)}{\sqrt{p}} + \sum_{p\leqq P}\frac{\sin(2t\ln p)}{2p} = C_1(t) + C_2(t)\,,\qquad t\in\langle T,T+H\rangle\,.$$

Пусть $N_2\big[\langle T,T+H\rangle;C_0\big]$ обозначает число нулей функции $C_0(t)$, $t\in\langle T,T+H\rangle$. Справедливая следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть* $H\in\big\langle P^4,\sqrt[4]{T}\,\big\rangle$, $\eta\in\big(0,\frac{1}{3}\big\rangle$. *Тогда при условиях* (21) *имеет место оценка*

$$N_2 > H(\ln\ln P_0)^{\frac{1}{3}-\eta}\,,\qquad T\to\infty\,,\tag{73}$$

для любых допустимых фиксираванных ε, η.

Доказательство. Оно получается точно по методу А. Сельберга [3; стр. 21–26] доказательства теоремы о числе изменений знака известной (скачкообразной) функции $S(t)$. Напомним, что в [3] используется представление для $S(t)$ верное в предположении справедливости гипотезы Римана – обстоятельство не касающееся нашего случая. Следовательно, достаточно привести лишь основные формулы, соответствующие замене $S(t)\to C_0(t)$.

Поскольку (ср. [3; стр. 13, $k=1$, $x\to P$, стр. 14, (4.2)])

$$\int_T^{T+H}\big\{C_1(t)\big\}^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}H\ln\ln P + O(H)\,,\qquad H\geqq P^2\,,$$

и, аналогичным образом,

$$\int_T^{T+H} \{C_2(t)\}^2 \, \mathrm{d}t = O(H) ; \qquad \int_T^{T+H} C_1(t)C_2(t) \, \mathrm{d}t = O\big(H \ln\ln P\big) ,$$

то

$$\int_T^{T+H} \{C_0(t)\}^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} H \ln\ln P + O\big(H\sqrt{\ln\ln P}\big) , \qquad H \geqq P^2 . \tag{74}$$

Далее (ср. [3; стр. 13, $k=2$, $x \to P$, стр. 14, (4.2)])

$$\int_T^{T+H} \{C_1(t)\}^4 \, \mathrm{d}t = \frac{3}{4} H (\ln\ln P)^2 + O\big\{H(\ln\ln P)\big\} , \qquad H \geqq P^4 ,$$

и, аналогичным образом,

$$\int_T^{T+H} \{C_2(t)\}^4 \, \mathrm{d}t = O(H) .$$

Так как

$$\{C_0(t)\}^4 = C_1^4 + 4C_1^3 C_2 + \dots ,$$

то, используя в надлежащих местах формулу Коши-Буняковского, получаем

$$\int_T^{T+H} \{C_0(t)\}^4 \, \mathrm{d}t = \frac{3}{4} H (\ln\ln P)^2 + O\big\{H(\ln\ln P)^{\frac{3}{2}}\big\} , \qquad H \geqq P^4 . \tag{75}$$

Следовательно, по формуле (74) (75) получаем (ср. [3; стр. 24])

$$\int_T^{T+H} |C_0(t)| \, \mathrm{d}t \geqq \frac{\left\{ \int_T^{T+H} \{C_0(t)\}^2 \, \mathrm{d}t \right\}^{3/2}}{\left\{ \int_T^{T+H} \{C_0(t)\}^4 \, \mathrm{d}t \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} H \sqrt{\ln\ln P} + O(H) , \tag{76}$$

$$H \in \langle P^4, \sqrt[4]{T} \rangle .$$

Пусть

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(t,h) = \int_t^{t+h} C_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad J = J(t,h) = \int_t^{t+h} |C_0(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\,,$$
$$h = \left(\frac{1}{\ln P}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\eta} \tag{77}$$

Так как (ср. [3; стр. 22, (5.3)])

$$\int_T^{T+H} |\mathcal{J}|\,\mathrm{d}t \leqq \sqrt{H}\cdot\left\{\int_T^{T+H}\left|\int_t^{t+h} C_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_t^{t+h} C_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|^2\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}\;;$$

$$\int_T^{T+H}\left|\int_t^{t+h} C_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|^2\mathrm{d}t \leqq \frac{Hh^2}{2}\ln\frac{1}{h} + O(Hh^2)\,,$$

$$\int_T^{T+H}\left|\int_t^{t+h} C_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|^2\mathrm{d}t = O(Hh^2)\,,$$

$$\int_T^{T+H}\left(\int_t^{t+h} C_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_t^{t+h} C_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t = O\left(Hh^2\sqrt{\ln\frac{1}{h}}\right),$$

то (ср. [3; стр. 21, Лемма 7])

$$\int_T^{T+H} |\mathcal{J}|\,\mathrm{d}t < \frac{1-\eta}{\sqrt{6}}Hh\sqrt{\ln\ln P}\,. \tag{78}$$

Далее, из соотношения (ср. [3; стр. 24])

$$\int_T^{T+H} J\,\mathrm{d}t = h\int_T^{T+H} |C_0(t)|\,\mathrm{d}t + O\left(h\frac{\sqrt{P}}{\ln P}\right); \qquad C_0(t) = O\left(\frac{\sqrt{P}}{\ln P}\right),$$

в силу (76), (77) получаем оценку снизу (ср. [3; стр. 24, Лемма 8])

$$\int_T^{T+H} J\,\mathrm{d}t > \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1-\frac{\eta}{2}\right)Hh\sqrt{\ln\ln P}\,. \tag{79}$$

Пусть E – подмножество интервала $(T,T+H)$, на котором $J > |\mathcal{J}|$. В силу (78), (79)

$$\int_E J\,\mathrm{d}t \geqq \int_T^{T+H} (J - |\mathcal{J}|)\,\mathrm{d}t > \frac{\eta}{5} Hh\sqrt{\ln\ln P} \tag{80}$$

и далее (ср. [3; стр. 25])

$$\int_T^{T+H} J^2\,\mathrm{d}t < Hh^2 \ln\ln P. \tag{81}$$

Следовательно, для меры E имеем оценку

$$m(E) \geqq \left\{\int_E J\,\mathrm{d}t\right\}^2 \cdot \left\{\int_T^{T+H} J^2\,\mathrm{d}t\right\}^{-1} > \frac{\eta^2}{25} H. \tag{82}$$

Замечание 6. Соотношения (74)–(82) для $C_0(t)$ – это аналоги соотношений А. Сельберга для $S(t)$.

Доказательство Леммы 6 завершается следуюшчим образом (нам нужны введенные ниже обозначения при доказательстве Теоремы 4). Подразделим интервал $(T,T+H)$ на $\left[\frac{H}{h}\right] = l_0$ интервалов $j_1, j_2, \ldots, j_{l_0}$. Если j_i содержит точку из E, $1 \leqq i \leqq l_0$, то $C_0(t)$ должна изменять знак или в j_i или в j_{i+1}. Так как по меньшей мере $\frac{m}{h} - 2$ этих интервалов содержит точку из E, мы видим, что $C_0(t)$ имеет по меньшей мере (см. (21))

$$\begin{aligned}\frac{m}{2h} - 1 &> \frac{\eta^2}{50} \cdot \frac{H}{h} - 1 \\ &= \frac{\eta^2}{50} H (\ln P)^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\eta} - 1 \\ &= \frac{\eta^2}{50} (1-\varepsilon)^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\eta} \cdot H (\ln\ln P_0)^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\eta} - 1 > H (\ln\ln P_0)^{\frac{1}{3} - \eta}\end{aligned}$$

нулей нечетного порядка в интервале $(T,T+H)$, т.е., имеет место оценка (73). □

Замечание 7. Все основные соотношения (74)–(82) сохраняют силу и в случае замены $C_0(t) \to C_0(t) + F(t)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$, где

$$\frac{F(t)}{\sqrt{\ln\ln P}} = o(1), \qquad T \to \infty,$$

(ср. замечание А. Сельберга [3; стр. 26]).

В случае $F(t) = R(t;\varepsilon,P_0)$ (см. (72)) из Леммы 6 получаем:

Следствие 5. *В условиях Леммы* 6

$$N_3 > H(\ln\ln P_0)^{\frac{1}{3}-\eta}, \qquad T \to \infty, \tag{83}$$

(N_3 *– число нулей функции* $C(t)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$).

10. Теорема о малых уклонениях величины $\left|\gamma_\nu(\varepsilon, P_0) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \cdot \ln P_0$

Справедлива следующая теорема (ср. (16)):

Теорема 4. *В предположениях Леммы* 6 *и при условиях* (21) *существует по меньшей мере* $\frac{1}{3}H(\ln\ln P_0)^{\frac{1}{3}-\eta}$ *значений* $\bar{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *такого рода, что*

$$\left\{\bar{\gamma}_\nu(\varepsilon, P_0) - \bar{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \cdot \ln P_0 = O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^\varepsilon \cdot \ln\ln P_0}\right\}, \qquad T \to \infty. \tag{84}$$

Доказательство. Пусть $\bar{j}_1, \bar{j}_2, \dots, \bar{j}_{l_1}$, $l_1 > \frac{m}{2h} - 1$ – подсистема интервалов $j_1, j_2, \dots, j_{l_0}$, каждой из которых содержит нуль функции $C(t)$ (см. Лемму 6 и Следствие 4). Рассмотрим подсистему $\bar{j}_2, \bar{j}_4, \dots, \bar{j}_{l_2}$, $l_2 = \left[\frac{l_1}{2}\right]$; конечно

$$l_2 > \frac{1}{3}H(\ln\ln P_0)^{\frac{1}{3}-\eta}. \tag{85}$$

Пусть $\bar{t}^{\,2l}$ обозначает нуль функции $C(t; \varepsilon, P_0)$ лежащий в интервале $\bar{j}_{2l}$. Пусть $\bar{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ – ближайший к нулю $\bar{t}^{\,2l}$ член последовательности $\left\{t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$; очевидно (см. (5))

$$\bar{t}^{\,2l} - \bar{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right) = O\left(\frac{1}{\ln P_0}\right). \tag{86}$$

Поскольку

$$h = \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\eta} \cdot \left(\frac{1}{\ln\ln P_0}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\eta},$$

то

$$\bar{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \bar{j}_{2l-1} \cup \bar{j}_{2l} \cup \bar{j}_{2l+1}$$

и (см. (85))

$$\sum_{T\leqq \bar{t}_\nu^{2l}(\frac{\pi}{2})\leqq T+H} 1 > \frac{1}{3}H(\ln\ln P_0)^{\frac{1}{3}-\eta}.$$

Следовательно (см. (31), (86))

$$\begin{aligned} C\left[\bar{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] &= C\left[\bar{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - C(\bar{t}^{\,2l}) \\ &= C'(d_6;\varepsilon,P_0)\cdot\left[\bar{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \bar{t}^{\,2l}\right] = O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^{(1+\varepsilon)/2}}\right\}. \end{aligned} \tag{87}$$

Теперь из (68) в силу (87) получаем

$$\begin{aligned} \left\{\bar{\gamma}_\nu^{2l}(\varepsilon,P_0) - \bar{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}\cdot\ln P_0 &= C\left[\bar{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right);\varepsilon,P_0\right] + O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^\varepsilon\ln\ln P_0}\right\} \\ &= O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^\varepsilon\ln\ln P_0}\right\}, \end{aligned} \tag{88}$$

т.е., (84) □

11. Неограниченные положительные и отрицательные уклонения величины $\left\{\gamma_\nu(\varepsilon,P_0) - t_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}\cdot\ln P_0$

В Замечании 5 положим

$$F(t) = R(t;\varepsilon,P_0) \pm \sqrt{\frac{\ln\ln P}{\ln\ln\ln P}}$$

и пусть (см. (72))

$$\tilde{C}(t) = C(t) + \sqrt{\frac{\ln\ln P}{\ln\ln\ln P}},\quad \tilde{\tilde{C}}(t) = C(t) + \sqrt{\frac{\ln\ln P}{\ln\ln\ln P}}, \tag{89}$$

$t\in\langle T,T+H\rangle$. Пусть далее N_4, N_5 обозначают числа нулей функций (89) соответственно. Очевидно (ср. (83))

$$N_4, N_5 > H(\ln\ln P_0)^{\frac{1}{3}-\eta},\qquad T\to\infty.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *В условиях Теоремы* 4 *существуют значения* $\tilde{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right), \tilde{\tilde{t}}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \langle T, T+H\rangle$, *где*

$$\sum_{T \leqq \tilde{t}_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} 1, \sum_{T \leqq \tilde{\tilde{t}}_\nu(\frac{\pi}{2}) \leqq T+H} 1 > \frac{1}{3} H (\ln \ln P_0)^{\frac{1}{3}-\eta}$$

такого рода, что

$$\left\{\tilde{\gamma}_\nu(\varepsilon, P_0) - \tilde{t}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \cdot \ln P_0 \sim - \sqrt{\frac{\ln\ln\ln P_0}{\ln\ln\ln\ln P_0}},$$

$$\left\{\tilde{\tilde{\gamma}}_\nu(\varepsilon, P_0) - \tilde{\tilde{t}}_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \cdot \ln P_0 \sim \sqrt{\frac{\ln\ln\ln P_0}{\ln\ln\ln\ln P_0}}$$

при $T \to \infty$ (*ср.* (18)).

Доказательство теоремы аналогично доказательству Теоремы 4, только вместо (88) имеем например

$$\begin{aligned} &\left\{\tilde{\gamma}_\nu^{2l}(\varepsilon, P_0) - \tilde{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \cdot \ln P_0 \\ &= \tilde{C}\left[\tilde{t}_\nu^{2l}\left(\frac{\pi}{2}\right); \varepsilon, P_0\right] - \sqrt{\frac{\ln\ln P}{\ln\ln\ln P}} + O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^2 \ln\ln P_0}\right\} \\ &\sim - \sqrt{\frac{\ln\ln P}{\ln\ln\ln P}} \sim - \sqrt{\frac{\ln\ln\ln P_0}{\ln\ln\ln\ln P_0}} \end{aligned}$$

при $T \to \infty$.

Литература

[1] МОЗЕР, Я.: *Новые следствия из формулы Римана-Зигеля*, Acta Arith. **42** (1982), 1-10.

[2] ТИТЧМАРШ, Е. К.: *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, Москва, 1953.

[3] SELBERG, A.: *On thė remainder in the formula for* $N(T)$, *the number of zeros of* $\zeta(s)$ *in the strip* $0 < t < T$, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo **1** (1944), 27.

Received May 16, 1995

Department of Mathematical Analysis
Faculty of Mathematics and Physics
Comenius University
Mlynská dolina
SK-842 15 Bratislava
SLOVAKIA