Karel Havlíček

Sté výročí smrti Jánose Bolyaie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 3, 345--357

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136990

Mnohostrannou vědeckou a organisátorskou práci v Akademii věd SSSR spojuje A. N. Něsmejanov s rozsáhlou veřejně-politickou a pedagogickou prací. Byl nejednou zvolen poslancem Nejvyššího sovětu SSSR, je předsedou Výboru pro udělování Leninovy ceny za vědu a vynálezy, aktivně pracuje v Sovětském výboru obránců míru a ve Světové radě míru.

Za své zásluhy ve vědě byl A. N. Něsmejanov vyznamenán třikrát Leninovým řádem, Řádem rudého praporu práce, je laureátem Stalinovy ceny. O širokém uznání zásluh A. N. Něsmejanova za hranicemi svědčí jeho členství v řadě zahraničních akademií věd.

Přejeme jubilantu mnohá léta zdraví a další úspěchy v práci pro rozvoj sovětské vědy.

Zkráceně přeložil Jiří Gregor

STÉ VÝROČÍ SMRTI JÁNOSE BOLYAIE

Doc. Dr. Karel Havlíček, Praha

1. Životopisná data J. Bolyaie

Význačné osobnosti světové kultury oslavuje Světová rada míru a s ní i všechen pokrokový lid akcí světových kulturních výročí. Pro letošní rok zařadila Světová rada míru do této akce také oslavy maďarského matematika Jánose Bolyaie. Byla to volba velmi vhodná, neboť práce i život J. Bolyaie nám v mnohém připomíná naše dnešní snažení. I on usiloval o reálné chápání přírody, i on bojoval proti předsudkům. Jeho vědecká práce zasáhla daleko za hranice matematiky, znamenala důležitý přínos k teorii poznání a přímo otřásla chybnou a tehdy módní filosofií. Bolyaiův příklad jasně ukazuje, že věda je nedílnou součástí celé kultury a že ji tedy nelze isolovat od ostatního života.

Životopisná data J. Bolyaie lze sepsat velmi stručně. Narodil se 15. prosince 1802 v Kluži v Sedmihradsku. Jeho mimořádné matematické nadání se projevovalo už na gymnasiu. V létech 1818—1823 studoval na vojenské inženýrské akademii ve Vídni a stal se tak důstojníkem rakouské armády. Nebyl tedy profesionálním matematikem, třebaže se matematikou téměř celý život náruživě zabýval. Přibližně v roce 1823, tedy ke konci jeho pobytu na vídeňské akademii, dozrálo v něm řešení 2000 let starého klasického problému rovnoběžek, jež vedlo k jeho geniálnímu objevu neeuklidovské geometrie. Své výsledky uveřejnil v roce 1832, jak se o tom podrobněji zmíníme v odstavci 5. Nedostatek porozumění, na které se svými objevy všude narazil, stupňoval u něho chorobnou nedůvěru k lidem. V této zatrpklosti pomalu duševně i tělesně upadal, byl po deseti letech vojenské služby předčasně pensiován, znovu se pak vždycky pokoušel zmoci veliké matematické problémy, až konečně 27. ledna 1860 úplně osamocen a v nouzi zemřel v Maros-Vásárhely v rodném Sedmihradsku. Patří tedy János Bolyai mezi ten druh hrdinů, které lidstvo dovede ocenit až po jejich smrti.

K tomuto holému výčtu dat patří ovšem celá řada podrobností. Všimneme si zde v hlavních rysech všech důležitých okolností Bolyaiova života.

K matematice byl János Bolyai přiveden zřejmě svým otcem Farkasem Bolyaiem.

Farkas (v německem přepise Wolfgang) Bolyai (9. 2. 1775—20. 11. 1856) pocházel ze starého maďarského šlechtického rodu. Studoval v Kluži, v Anglii a v létech 1796—1799 v Jeně a v Göttingen, kde se spřátelil s K. F. Gaussem. Od roku 1804 byl profesorem matematiky, fysiky a chemie na evangelickém reformovaném gymnasiu v Maros-Vásárhely, kde působil až do svého pensionování v roce 1849. I on se dlouho zabýval problémem rovnoběžek. Farkasem Bolyaiem se prakticky začínají dějiny matematiky v Maďarsku.

Otec poznal záhy matematické nadání svého syna Jánose a podporoval jeho snahy. Nepodařilo se mu však dostat ho na studie ke Gaussovi, ačkoli o to usiloval. Sám neměl prostředky na to, aby poslal syna na studie s vychovatelem, jak tehdy bylo zvykem. To vedlo k tomu, že János Bolyai nastoupil dráhu vojenskou.

2. Vznik problému rovnoběžek

S problémem rovnoběžek seznámil J. Bolyaie zřejmě jeho otec, který o této otázce hovořil už s mladým Gaussem v dobách jejich společných studií. Otec netušil, s jakým zápalem a s jakou houževnatostí se do této problematiky ponoří jeho syn.

Pro informaci všech čtenářů zrekapitulujeme vývoj této otázky. Poskytuje nám to zároveň příležitost ukázat, jak vědecká problematika vyrůstá zcela přirozeně ze života lidské společnosti, a jak stejně přirozeně vznikla v matematice axiomatická metoda.

První axiomatické vybudování geometrie pochází, jak je všeobecně známo, od Euklida (kolem r. 300 před n. l.). Jeho „Základy" (*Elementa*) staly se na dlouhá staletí hlavním a vlastně jediným vzorem geometrické literatury. Tak se dostaly i do škol, kde nahrazovaly učebnice. Leckde tomu tak bylo ještě v minulém století. Nedbalo se ani toho, že Euklidova práce byla vyvrcholením starořecké geometrie a nikoli jejím začátkem. Při vyučování se nemá zapomínat na to, že lidé obvykle daleko dříve užívali svých zkušeností a poznatků, než je skloubili v rámec vědy. Také geometrie vyrostla z praktických potřeb lidské společnosti. I když matematika byla první vědou, která velmi předstihla vznik a vývoj jiných věd, přece jejímu nenáhlému zrodu předcházela dlouhá a namáhavá cesta. Jednotlivé naše matematické poučky chápali lidé původně jako isolovaná fakta a ani necítili potřebu jejich důkazu. Ověřovali si je prostě praxí. Nikterak nepřekvapuje, že z našeho dnešního hlediska se při tom dopouštěli i chyb. Historikové zjistili, že dlouhou dobu se např. ve staré Babylonii udržovaly nepřesné předpisy pro výpočet obsahů rovinných útvarů. Obsah rovnoramenného trojúhelníka počítali tehdy jako poloviční součin základny a ramene (místo výšky) trojúhelníka; trojúhelníky, které skutečně měřili, vyskytovaly se totiž jen při rozměřování polností v terénu a měly malý vrcholový úhel, takže odchylka od správného výsledku nebyla tak velká, aby tehdejším poměrům vadila. Podobně obsah kruhu vyjadřovali tehdy trojnásobkem čtverce poloměru[1]). Praxe ověřovala správnosti matematických pouček pomalu a dlouho trvalo, než synthesou poznání jednotlivých matematických vět se objevila jejich vzájemná souvislost a matematická zákonitost. Pak teprve si odborníci uvědomili význam důkazů v matematice v dnešním slova smyslu.

---

[1]) Viz např. A. Rényi [6], str. 152, nebo L. Nový [7]. — Seznam literatury je připojen na konci článku.

Zjistili také, že logické pochody značně usnadňují práci v matematice, protože často jednoduše docházejí k výsledkům, které se jinak získávaly zdlouhavou a někdy i namáhavou cestou z praxe. Tak vznikla potřeba systematického zvládnutí látky, při čemž se přirozeně uplatnila snaha, co nejméně pouček přijmout z praxe za základ stavby geometrie.

Našim čtenářům je jistě známo, že Euklid tak vybudoval celou geometrii pouze z pěti axiomů (základních vět). které nedokazoval, ale jejichž platnost prostě předpokládal. Méně však si už uvědomujeme správný význam toho, že pravdivost těchto vět byla opřena o zkušenost a souhlas se skutečností; jinými slovy výběr těchto axiomů se řídil požadavky praxe.

Velmi vhodně nazval tedy Euklid tyto základní poučky postuláty (tj. požadavky). Uvědomit si tyto skutečnosti je stejně důležité jako pochopit geometrický obsah pěti Euklidových postulátů. — Euklid nemohl ovšem tušit, že přijde jednou doba, kdy se prakticky uplatní i jiné geometrie než jeho, a že to budou dokonce takové systémy, které budou popírat některé jeho postuláty. Vznik a uplatnění takových neeuklidovských geometrií šel ruku v ruce s novými úkoly a problémy vědy a tedy i s novými jejími aplikacemi čili s novou praxí. Práce J. Bolyaie, jak uvidíme, měla při tom vysoce významnou úlohu.

Vraťme se k Euklidovým postulátům. Jsou to tyto věty:

1. *Každé dva body lze vždy spojit jedinou přímkou.*
2. *Přímou čáru omezenou (úsečku) lze vždycky bez přerušení prodloužiti v přímce.*
3. *Z libovolného středu a poloměru lze vždycky sestrojit kružnici.*
4. *Všechny pravé úhly jsou shodné.*
5. *Protíná-li přímka dvě jiné přímky a tvoří-li s nimi na téže straně dva vnitřní úhly, jejichž součet je menší než dva pravé úhly, pak tyto dvě přímky patřičně prodlouženy protínají se na té straně od první přímky, na které součet zmíněných vnitřních úhlů je menší než dva pravé úhly.*[2])

Pátý postulát je nejsložitější. V něm je skryt klasický problém rovnoběžek, který si blíže objasníme. Pátý postulát je totiž rovnocenný s tímto požadavkem:

5′. *Každým bodem prochází vždycky právě jedna přímka rovnoběžná s jinou přímkou.*

Tato formulace pochází od D. Hilberta (1862—1943), který ve své knize *Grundlagen der Geometrie* (Základy geometrie) zpřesnil Euklidovu práci a vytvořil základy geometrie, odpovídající požadavkům 20. století. Z dnešního hlediska obsahuje totiž Euklidovo geniální dílo určité nedokonalosti, které bylo třeba odstranit. V pátém postulátu např. Euklid mluví o tom, že přímka rozděluje rovinu na dvě části, aniž to před tím uvádí. V jeho postulátu je tedy implicitně skryt ještě další postulát. Jeho soustava axiomů nebyla tedy úplná, tj. Euklid nevyslovil všechny postuláty. Některé věci buď mlčky předpokládal a nebo je uváděl později v textu jako definice. Přitom některé definice jsou kombinovány už i s dokazovanými poučkami. Dnešní soustava axiomů je tedy širší než u Euklida; to se týká např. axiomů uspořádání, na nichž závisí i existence rovnoběžek. Pro informativní účely tohoto článku však postačí, přidržíme-li se formulací Euklidových.

Abychom správně pochopili rovnocennost postulátů 5 a 5′, z níž vyrostl problém rovnoběžek, objasněme si blíže, co Euklid svým 5. postulátem mínil.

---

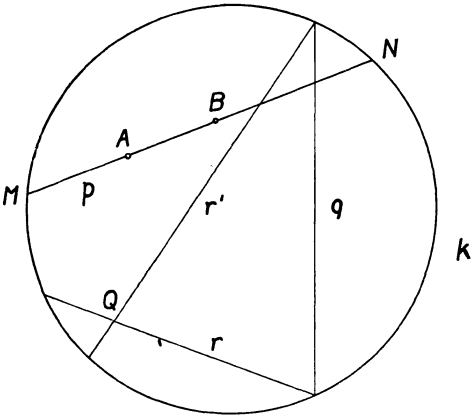
[2]) Postuláty 3 a 5 jsou zřejmě míněny pro geometrii roviny. Prostorová geometrie začíná až XI. knihou Euklidových Základů.

Především si uvědomíme, že Euklid nazývá dvě přímky v rovině rovnoběžnými, když se neprotínají, ať jsou jakkoli daleko prodlouženy. Existence rovnoběžek je dále nezávislá na Euklidově pátém postulátu. Logickým důsledkem ostatních postulátů jeho geometrie je mimo jiné právě i tvrzení o tom, že daným bodem prochází aspoň jedna přímka rovnoběžná s jinou danou přímkou.[3]) Co k tomu přidává pátý postulát? Užijme označení z obr. 1, kde přímka p protíná přímky a, a' v bodech M, N a svírá s nimi po jedné straně vnitřní úhly α, α' a po druhé straně β, β'. Z prvních čtyř postulátů plyne mimo jiné

$$\alpha + \beta = \pi\,, \quad \alpha' + \beta' = \pi\,,$$

kde $\frac{1}{2}\pi$ značí podle našich zvyklostí velikost pravého úhlu. Dále odtud plyne, že v případě $\alpha + \alpha' = \pi$ přímky a, a' se neprotínají, čili že jsou spolu rovnoběžné[4]). Žádnými logickými dedukcemi však z prvních čtyř postulátů neplyne tvrzení obrácené, že totiž když přímky a, a' jsou rovnoběžné, je nutně $\alpha + \alpha' = \pi$. A to je právě úkol pátého postulátu. Ten totiž říká, že když $\alpha + \alpha' < \pi$, přímky a, a' se protínají na té straně od přímky p, kde leží úhly α, α'; je-li $\alpha + \alpha' > \pi$, je $\beta + \beta' < \pi$ a podle téhož postulátu se přímky a, a' protínají na té straně od přímky p, kde leží úhly β, β'. Tím jsou vyčerpány všechny možnosti až na jednu, kdy totiž je $\alpha + \alpha' = \pi$; to je tedy jediný případ, kdy jsou přímky a, a' rovnoběžné. Pátý postulát omezuje tudíž bez důkazu počet rovnoběžek, vedených daným bodem k dané přímce, na rovnoběžku jedinou.

Za těchto okolností vznikla zcela přirozeně domněnka, že z prvních čtyř postulátů lze odvodit i tvrzení, obsažené v pátém postulátu. Nepodařilo-li se to Euklidovi samému, neznamená to, že by takový důkaz nebyl možný; tak se na tuto věc dívali už ve starověku. Přitom je zajímavé, že žádný Euklidův pokus o důkaz pátého postulátu se nám nedochoval. Tato skepse o pátém postulátu byla nepřímo podporována dvěmi okolnostmi: za prvé Euklid ve svém díle užívá tohoto postulátu poměrně málo, jako by se mu vyhýbal; za druhé odvozuje některé věty, jejichž obsah se na první pohled jeví jednodušší než obsah pátého postulátu, takže vznikla otázka, proč nezvolil Euklid některou z nich na místě pátého postulátu. Hlavní příčinou této skepse byla však zdánlivá samozřejmost tvrzení pátého postulátu. Tato samozřejmost vyvěrala především z toho, že až do devatenáctého století se geometrie omezovala jen na studium prostoru fysikálních měření a nezabývala se prostory obecnějšími. Konečně vrozený názor vnucoval téměř každému dojem, že jiné možnosti není. Tento dojem přecházel podvědomě v přesvědčení posilované právě tím, že lidé dlouho nedovedli vytvořit jiný geometrický model než jediný model, který jim poskytoval klasický fysikální prostor. Tak se stalo, že víra



Obr. 1.

[4]) Tím začínají svůj výklad R. Bonola - H. Liebmann [1], str. 1.

[3]) Srovnej: J. B. Pavlíček [4], str. 88 a dál nebo R. Baldus [2] str. 47.

v jedinečnost Euklidovy geometrie ovládala všechny matematiky až do začátku 19. století. Otázku, kterou v této souvislosti řešili, nazýváme problémem rovnoběžek a můžeme ji stručně formulovat takto: Je Euklidův pátý postulát logickým důsledkem ostatních jeho postulátů nebo je na nich nezávislý?

Historie 2000 let byla pak vyplněna pokusy o důkaz pátého postulátu; matematikové všech těchto dob se prostě snažili dokázat, že pátý postulát Euklidův je logickým důsledkem prvních čtyř jeho postulátů. Dnes víme, mimo jiné právě zásluhou J. Bolyaie, že tyto pokusy byly marné.

3. Bolyaiovi předchůdci

Nedivme se, že pokusy o důkaz pátého postllátu se přes svoji neúspěšnost tak dlouho udržovaly. Nebyly totiž úplně neplodné. Mnoho matematiků se domnívalo, že se jim důkaz podařil. Ale při bedlivém zkoumání se pak vždycky ukázalo, že při svém důkazu mlčky předpokládali platnost nějaké jiné věty, která byla s pátým postulátem ekvivalentní. Nevědomky nahrazovali prostě ve svých úvahách pátý postulát jiným rovnocenným tvrzením. Vedlo to k novým objevům a k tomu, že rovnocennost nových pouček s pátým postulátem rozšiřovala možnost kritérií pro Euklidovu geometrii. Tak např. věta, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven dvěma prvým úhlům, nahrazovala plně pátý postulát. Přišlo se i na to, že jakmile jeden trojúhelník má tuto vlastnost, pak ji mají všechny trojúhelníky v rovině. To věděl také J. Bolyai. V 19. století to nakonec umožnilo i experimentální zkoumání prostoru (K. F. Gauss, N. I. Lobačevskij), stačilo prostě proměřit jeden takový trojúhelník, aby bylo možno z něho soudit na celkovou strukturu prostoru. Ale to už vyžadovalo značný pokrok a objevilo se to až v závěrečné fázi historie problému rovnoběžek. Tento pokrok byl do značné míry ztěžován i bojem proti předsudkům na poli filosofickém. Všimneme si toho v 5. odstavci. Prozatím nechť si čtenář uvědomí, že až do doby Bolyaiovy všichni matematikové spontánně dokazovali pátý postulát s úmyslem opravdu ho dokázat a žili dokonce v nezvratné víře, že důkaz se jednou podařit musí. Byla by to dlouhá řada jmen, kdybychom je měli všechna vyjmenovat, mnohá z nich jistě ani neznáme. Ve starověku to byl např. Possidonios (1. století př. n. l.) a Proklos (410—485 n. l.). V období středověkého úpadku vědy v Evropě přejali i na tomto poli vedoucí úlohu matematikové zemí arabské kultury, z nichž k problému rovnoběžek nejvíc přispěl Nasîr-Eddîn (1201—1274). Z novověkých matematiků zde nejvýznaměji zasáhli Angličan John Wallis (1616—1703), italský jesuita Girolamo Saccheri (1667—1733), Švýcar Johann Heinrich Lambert (1728 až 1777), Francouz Adrien Marie Legendre (1752—1833) a citovaný už Farkas Bolyai.

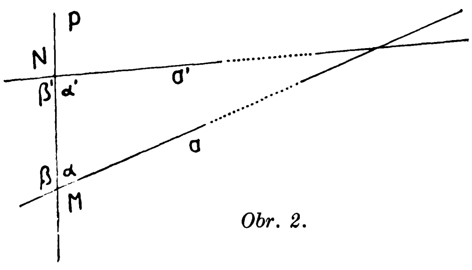
Nejzajímavější je případ Saccheriho. Euklidův pátý postulát se snažil dokázat nepřímo. Ptal se, populárně řečeno, jak by to vypadalo, kdyby Euklidův pátý postulát neplatil. Zkoumal soustavu axiomů, v níž byly první čtyři Euklidovy postuláty a kde na místě pátého postulátu zvolil tvrzení, odporující Euklidovu pátému postulátu. V Euklidově axiomatice nahradil tedy pátý postulát axiomem, který byl rovnocenný s logickou negací Euklidova pátého postulátu. Z takto zvolené soustavy vyvozoval logické dedukce. Odvodil tak řadu důsledků, tedy geometrických pouček, které ovšem byly v rozporu s Euklidovou geometrií. Saccheri doufal že dojde k vnitřnímu sporu v této své soustavě; doufal, že některý z důsledků jím takto odvozených bude odporovat jinému z nich. K tomu však stále nedocházel a nikdy nedošel. Sám si toho byl dobře vědom, třebaže jeho logické dedukce vedly ke geometrickým poučkám, které se jevily velmi nepřirozené. V tomto stadiu zaujal Saccheri nevědecké stanovisko; ani on se nedovedl vymanit ze zajetí víry v jedinečnost Euklidovy geometrie a opřel se o vrozený názor. I u něho bylo tedy přání otcem myšlenky, když nakonec prohlásil, že jeho hypothesa (odporující Euklidovu pátému postulátu) je veskrze falešná, neboť odporuje přirozenosti přímky. Dnes víme, že Saccheri ve skutečnosti objevil několik vět z neeuklidovské geometrie, jenže o tom nevěděl.

Tím více vyniká jasné stanovisko J. Bolyaie i ostatních tvůrců neeuklidovské geometrie.

4. Model neeuklidovské geometrie

Objevem neeuklidovské geometrie byl definitivně rozřešen problém rovnoběžek. Vedle Jánose Bolyaie došli k neeuklidovské geometrii ještě Karl Friedrich Gauss (1777—1855) a Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793—1856). Dnes je tato geometrie po zásluze nazývána geometrií Bolyaie-Lobačevského, neboť Gauss se stranil veřejného vystoupení se svými objevy na tomto poli (viz odst. 5.).

Sledovat logickou cestu ve výzkumech těchto géniů je zvláště pro začátečníka značně namáhavé. Ale dnes si jejich výsledky můžeme přiblížit na některém názorném modelu neeuklidovské geometrie. Tyto modely byly sestrojeny až po objevu neeuklidovské geometrie, dokonce až po smrti J. Bolyaie a N. I. Lobačevského. Uveďme zde pro úplnost jeden z nich, ostatní najde čtenář v citované literatuře. Je to tzv. model Beltramiho-Kleinův. Čtenář nechť na něm sleduje, že slova bod, přímka, vzdálenost, úhel apod. připouštějí zde poněkud jiné pojmy než v Euklidově geometrii, ale že tyto pojmy přesto splňují první čtyři Euklidovy postuláty.



Obr. 2.

Náš model si sestrojíme v obyčejné (tedy euklidovské) rovině. Označme tuto rovinu π. V této základní rovině zvolme kružnici k; uvnitř této kružnice sestrojíme náš model. To znamená, že slovem „bod“ budeme rozumět jen bod ležící uvnitř kružnice k. Jsou-li A, B dva „body“ našeho modelu, tedy dva body ležící uvnitř kružnice k, pak „přímka“ je spojující je ta tětiva MN kružnice k, která prochází body A, B (obr. 2.). I měření zavedeme v tomto modelu uměle.

„Vzdáleností“ dvou „bodů“ A, B budeme tu rozumět číslo $c \,.\, \lg (MNAB)$, kde $(MNAB)$ znamená obyčejný dvojpoměr vypsaných čtyř bodů, lg značí přirozený logaritmus a c je volitelná konstanta.

Také úhly budeme na našem modelu měřit poněkud nezvykle. Všimněme si na našem obr. 2 „přímek“ p, q a představme si polokouli, která je sestrojena nad naší základní rovinou π tak, že ji protíná právě v kružnici k; střed celé této koule je tedy ve středu kružnice k. Svislé roviny procházející tětivami p, q kolmo k rovině π protínají povrch této polokoule ve dvou půlkružnicích; ty se protínají v bodě, jehož kolmým průmětem do roviny π je průsečík obou tětiv

p, q. Úhel tečen sestrojených k oběma těmto půlkružnicím v jejich průsečíku nazveme „úhlem" obou daných „přímek" p, q. Čtenář odtud např. snadno zjistí, že „přímky" q, r z obr. 2 svírají „úhel" velikosti nula, čili že „přímky" protínající se na kružnici k mají v našem modelu podobnou vlastnost jako rovnoběžky v geometrii euklidovské. Mají dokonce ještě další obdobu. „Přímky" q, r se "neprotínají", neboť nemají společný „bod", totiž bod uvnitř kružnice k. Není tedy divu, že při této interpretaci procházejí „bodem" Q dvě „rovnoběžky" s „přímkou" q, totiž „přímky" r, r', jak je to v našem obrázku zakresleno. Je zřejmé, že to není geometrie euklidovská. Proto jsme zde jednotlivé pojmy psali v uvozovkách. Pro lepší porozumění může si začátečník příslušné partie přečíst znovu a přidat ke každému pojmu, psanému v uvozovkách, přídavné jméno neeuklidovský (bod, úhel atd.).

Zásadní odchylky od geometrie euklidovské je vidět na první pohled. Tak např. v euklidovské geometrii se dvě přímky v rovině buď protínají, nebo jsou rovnoběžné. V Bolyaiově-Lobačevského geometrii může nastat ještě třetí případ, že totiž dvě „přímky" v rovině nemají žádný společný „bod" a přitom se neprotínají ani na kružnici k. V našem obr. 2 jsou to např. „přímky" p, r. Tak máme v Bolyaiově-Lobačevského rovině tři druhy dvojic „přímek": „přímky" různoběžné (to jsou „přímky", které mají společný „bod"), dále „přímky" souběžné (ty tvoří analogii rovnoběžek z euklidovské geometrie) a konečně „přímky" rozběžné (jejichž analogii bychom v rovinné geometrii euklidovské marně hledali). Na našem modelu vidíme všechny tyto tři případy. „Přímky" p, q jsou různoběžné, neboť jejich průsečík leží uvnitř kružnice k. „Přímky" q, r, popřípadě q, r', jsou souběžné, protože, jak už jsme poznali, svírají „úhel" velikosti nula a tak jsou analogií rovnoběžek z euklidovské geometrie. Souběžné „přímky" jsou prostě na tomto modelu charakterisovány tím, že se protínají na kružnici k. Konečně „přímky" p, r jsou rozběžné, neboť nemají žádný společný „bod", ani nejsou souběžné; o velikosti jejich úhlu nemůžeme zde mluvit.

Jiný nápadný rozdíl od geometrie euklidovské je v součtu úhlů trojúhelníka. Na našem modelu sledujme např. trojúhelník o stranách q, r, r'. Velikost „úhlu" „přímek" q, r stejně jako „přímek" q, r' je rovna nule; třetí „úhel", který svírají „přímky" r, r', je zřejmě dutý. Je tedy součet „úhlů" v tomto trojúhelníku menší než dva pravé úhly, kdežto v euklidovské geometrii je tento součet vždycky roven dvěma pravým úhlům.

Chceme-li na tomto modelu sledovat první čtyři Euklidovy axiomy, musíme přibrat na pomoc některé věci z matematiky. Tak např. nekonečnost „přímky" vychází tu ze známých vlastností dvojpoměru a logaritmu. Blíží-li se některý z bodů A, B na našem obrázku 2 k některému z bodů M, N, je buď $\lim (MNAB) = 0$ nebo $\lim (MNAB) = +\infty$ a přitom

$$\lim_{x \to 0+} \lg x = -\infty \, , \quad \lim_{x \to +\infty} \lg x = +\infty \, .$$

„Kružnice" je zde křivkou, která protíná „kolmo" svazek různoběžek. „Kolmice" jsou takové dvě tětivy kružnice k, které jsou vzhledem k ní polárně sdruženy. Podrobnější věci najde zájemce v citované literatuře.

Existence modelu právě popsaného sama už potvrzuje bezespornost systému axiomů této neeuklidovské geometrie Bolyaie-Lobačevského; od Euklidovy axiomatiky liší se tento systém v pátém postulátu. Euklidův pátý postulát v geometrii Bolyaie-Lobačevského ovšem neplatí; lze ho zde nahradit tvrzením, že v rovině daným bodem procházejí aspoň dvě vzájemně různé přímky, které neprotínají danou přímku, jež tímto bodem neprochází. Objevem neeuklidovské geometrie byl také vysvětlen nezdar všech předchozích pokusů o důkaz Euklidova pátého postulátu. Dnes je jasné, že tyto pokusy se zdařit nemohly.

5. Objev a význam neeuklidovské geometrie

Bolyaiův a Lobačevského revoluční zásah do tradičního myšlení geometrického byl tehdy nutný, mělo-li vůbec dojít k pokroku v bádání o Euklidově pátém postulátu. Je nutno uvážit, že pod tíhou dlouhé řady nezdařených pokusů o jeho důkaz začali už mnozí matematikové propadat v této otázce resignaci. Na druhé straně není náhodou, že se v této situaci našli průbojní géniové, kteří se konečně odvážili prozkoumat otázku nedokazatelnosti Euklidova pátého postulátu; těch bylo ovšem málo. János Bolyai byl jedním z nich. Řadí se tak důstojně vedle slavného ruského matematika Nikolaje Ivanoviče Lobačevského, rektora kazaňské university, který zvláště neohroženě bojoval za uplatnění nové geometrie. Třetí objevitel neeuklidovské geometrie, tehdejší král matematiků Karl Friedrich Gauss, nehrál v této historii úlohu právě nejšťastnější. O jeho záhadném postoji k nové geometrii se ještě zmíníme, protože to úzce souvisí s hlavním thematem tohoto pojednání. Historikové potvrdili, že všichni tito tři matematikové došli k objevu neeuklidovské geometrie samostatně, pracovali naprosto nezávisle na sobě a během těchto výzkumů se o své práci navzájem neinformovali. Nemohli se informovat, protože o sobě nevěděli.

J. Bolyai sledoval nejdřív ty partie Euklidovy geometrie, které jsou nezávislé na jeho pátém postulátu. Geometrii, která vychází z prvních čtyř Euklidových postulátů, jež byly už v jeho době lépe propracovány než za časů Euklidových, nazval a b s o l u t n í g e o m e t r i í; dodnes tohoto názvu používáme. Absolutní geometrie je tedy souhrn těch pouček, které lze logicky odvodit z prvních čtyř Euklidových postulátů. Přidáním pátého postulátu dostáváme další možnosti. Zvolíme-li pátý postulát podle Euklida, dostaneme tak běžně známou euklidovskou geometrii. Zvolíme-li za pátý postulát negaci Euklidova pátého postulátu nebo tvrzení, které je s touto negací ekvivalentní, dostaneme podobně neeuklidovskou geometrii Bolyaie-Lobačevského. Absolutní geometrie je tedy společným základem obou těchto geometrií.

J. Bolyai sledoval také geometrii na ploše kulové a zjistil, že celá sférická trigonometrie se dá vybudovat nezávisle na Euklidově pátém postulátu.

Dále propracoval trigonometrii své neeuklidovské geometrie a základní rovnice analytické a diferenciální geometrie neeuklidovské. Uměl vypočítat délku kružnice a obsah kruhu v této své nové geometrii a zjistil mimo jiné také pozoruhodnou věc, že pro některé kružnice lze tu provést kvadraturu kruhu kružítkem a pravítkem, což v Euklidově geometrii není vůbec možné. Věděl také mnohem víc než to, co obsahují všeobecné základy neeuklidovské geometrie. Zjistil nejen, že součet úhlů v trojúhelníku je zde menší než dva pravé úhly, ale že také tento rozdíl od dvou pravých úhlů je přímo úměrný obsahu tohoto trojúhelníka. Z detailů vzpomeňme ještě jedné věty, která se dodnes spojuje s jeho jménem (věta Bolyaiova)[5]: *Délky kružnic, jejichž poloměry jsou rovny stranám trojúhelníka, jsou v poměru sinů jeho protějších úhlů.* V euklidovské

[5]) Viz V. H l a v a t ý [3] str. 140 nebo R. B a l d u s [2] str. 111.

geometrii platí tato věta také, jak snadno zjistíte na základě sinové věty v trojúhelníku.

Důležitým tu byl objev zvláštních křivek v neeuklidovské rovině, které jsou jakýmsi mezným případem kružnice, když střed kružnice se vzdaluje po přímce do nekonečna, takže poloměr roste nade všechny meze. V euklidovské geometrii takovým mezným případem kružnice je přímka (s rostoucím poloměrem klesá křivost kružnice k nule a kružnice přejde tedy v přímku). V neeuklidovské geometrii je však tímto limitním případem kružnice křivka odlišná od přímky. J. Bolyai ji nazval stručně L-křivka (často se pro ni v literatuře užívá také názvu horocykl nebo paracykl). V prostorové geometrii obdobně limitním případem plochy kulové je jistá plocha, kterou J. Bolyai nazval F-plocha (jinak opět horosféra nebo parasféra). V euklidovské geometrii ja tato F-plocha vždycky rovina (rovina je koule s nekonečně velkým poloměrem), v neeuklidovské geometrii nikoli. Všichni tři uvedení objevitelé neeuklidovské geometrie zjistili zajímavou věc, že totiž na této F-ploše platí euklidovská geometrie. Interpretujeme-li totiž L-křivky, ležící na takové F-ploše, jako přímky, splňuje geometrie na této F-ploše Euklidovy postuláty včetně jeho pátého postulátu. To mělo značnou heuristickou cenu při objevu neeuklidovské geometrie, neboť skutečnost, že na některé ploše, vnořené do neeuklidovského prostoru, se indukuje euklidovská geometrie, podporovala domněnku, že i systém axiomů neeuklidovské geometrie je bezesporný.

Práce J. Bolyaie a K. F. Gausse v neeuklidovské geometrii jsou přibližně stejné; N. I. Lobačevskij dosáhl týchž výsledků, ale s tím rozdílem, že hlavní výsledky odvozuje ve svých pojednáních metodou analytické geometrie; analytickou metodu propracoval v této neeuklidovské geometrii právě tak úplně jako metodu syntetickou a všímal si dále souvislosti nové geometrie s jinými partiemi matematiky. Užitím neeuklidovské geometrie vypočítal také řadu integrálů, z nichž některé znal už A. M. Legendre, jiné byly nové (Legendre k nim došel ovšem jinou cestou). N. I. Lobačevskij tím objevil užitečnost neeuklidovské geometrie pro aplikace uvnitř matematiky samé. Uveřejnil o neeuklidovské geometrii více prací než J. Bolyai; příčinou byly především jeho lepší pracovní podmínky; byl přece jen profesorem matematiky, kdežto J. Bolyai nebyl matematikem z povolání. Za druhé je nutno hledat tyto příčiny i v důvodech soukromého rázu a v povahových rozdílech obou těchto géniů.

K. F. Gauss své objevy v neeuklidovské geometrii neuveřejnil, ačkoli příslušné výsledky znal pravděpodobně už v roce 1816; stopy toho nacházíme např. v Gaussových recensích prací jiných autorů „důkazů" pátého postulátu Euklidova. Tyto recense vytiskl však Gauss anonymně, nepodepsal je svým jménem. Další doklady o jeho výsledcích v neeuklidovské geometrii nacházíme v různých jeho dopisech soukromým osobám a v jeho pozůstalosti. Gaussovi chyběla odvaha k uveřejnění svých výsledků na tomto poli a důvody toho byly do značné míry ideologické. Je třeba si uvědomit, že tehdy byla na vrcholu svého rozkvětu spekulativní filosofie, jejímž bezděčným otcem byl I. Kant (1724 až 1804) se svým apriorním nazíráním na prostor. Podle něho naše představy o prostoru jsou nezávislé na zkušenosti, jsou to vrozené apriorní formy našeho nazírání. Odtud vycházelo přesvědčení, že Euklidova geometrie je jedině možná a že znamená vrozené a tím i neměnné zákony našeho myšlení geometrického. Tato filosofie úplně pomíjela to, co zde bylo řečeno už na začátku o vzniku Euklidovy geometrie, že totiž i ona vyrostla ze zkušeností a z nutných potřeb praxe. K. F. Gauss nesouhlasil s Kantovými názory, jak víme mimo jiné i z jeho dopisů zaslaných F. Bolyaiovi[6]), ale obával se postavit se veřejně proti všeobecně panující koncepci, aby nevznikl pokřik polovzdělanců proti němu. K. F. Gauss ovšem v jiných záležitostech, jako např. v otázce „záhad" komplexních čísel, velmi aktivně bojoval proti nesprávným a tehdy módním názorům, ale jeho opatrnost v případě neeuklidovské geometrie byla podepřena ještě jinými důvody. Nezapomeňme, že zde by byl musil zápasit nejen s filosofy, ale i s matematiky, v nichž byly přes 2000 let zakořeněny předsudky proti nedokazatelnosti Euklidova pátého postulátu. To se právě ukázalo dobře u N. I. Lobačevského, kterého nemilosrdně zkritisoval a přímo zesměšňoval i tak vynikající matematik, jakým byl proslulý akademik M. V. Ostrogradskij (1801 až 1861). Konečně celý nešťastný život J. Bolyaie, vehnaného takřka tehdejší společností do osamocenosti, ukazuje, že Gaussovy obavy nebyly neopodstatněné. Tato slova neznamenají ovšem obhajobu ani kritiku K. F. Gausse, jehož mimořádné zásluhy o matematiku jsou všeobecně uznávány. Nemá ostatně dnes smysl vytýkat Gaussovi, že se tehdy nepostavil účinně na obranu Bolyaie a Lobačevského. Co však můžeme učinit, je to, že v tomto ohledu si z Gausse příklad nevezmeme.

Zároveň vidíme na této historii i praktickou důležitost filosofie. Kantovo učení o tom, že prostor je jen naše apriorní nazírací forma, brzdilo jakékoli zkoumání prostoru. Proměřoval-li Gauss právě tak jako Lobačevskij trojúhelník, aby zjistil součet jeho úhlů, znamenalo to vpravdě revoluční krok v tehdejší práci. Třebaže tento pokus nepřinesl kýžený výsledek (odchylka od 180° byla v mezích pozorovacích chyb aparatury), přece znamenal pokrok, protože přinášel i metodu experimentální do oblasti, kde ji Kantova filosofie téměř znemožňovala.

Všimněme si nyní postoje J. Bolyaie a N. I. Lobačevského k novému objevu. Oba došli k přesvědčení o nedokazatelnosti Euklidova pátého postulátu přibližně v roce 1823, tedy ke konci Bolyaiových studií ve Vídni. Tam měl Bolyai zpočátku ještě možnost hovořit o problému rovnoběžek se svým přítelem K. Szászem (1798—1853), který však přibližně na rozhraní let 1820—1821 opustil Vídeň. J. Bolyai zůstal pak osamocen, dokonce ani jeho otec nevěnoval už pozornost jeho práci. Farkas Bolyai dokonce naléhal, aby se jeho mladý syn přestal zabývat tímto problémem, jakoby v tomto fanatickém zaujetí svého syna tušil přímo nemoc a neštěstí. Když se však dozvěděl konečně o úspěšném synově řešení starého problému, byl nadšen a žádal ho, aby věc co nejdříve publikoval. J. Bolyai připravil rukopis své práce a poslal ho roku 1826 svému bývalému učiteli na vojenské akademii J. Walterovi v. Eckwehr (1789—1857), který mu rukopis po třech letech vrátil. Zajímavé je, že téhož roku 1826 předložil kazaňské universitě první rukopis své práce o neeuklidovské geometrii také N. I. Lobačevskij; tento rukopis se však ztratil.

První tištěnou prací o neeuklidovské geometrii je Lobačevského pojednání *O načalach geometrii*, které vycházelo po částech v časopise „Kazaňskij věstnik" v letech 1829—1830. Práce J. Bolyaie o neeuklidovské geometrii vyšla tiskem roku 1832 jako dodatek k prvnímu dílu knihy jeho otce, jež byla učebnicí matematiky. Byla psána latinsky. Kniha F. Bolyaie měla název „Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae..." a práce jeho syna byla k ní připojena pod titulem „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens.".

---

[6]) Viz A. Rényi [6], zvláště str. 151.

Téhož roku 1832 pořídil J. Bolyai ještě německý překlad své práce, doplnil jej a sám ohodnotil, když v závěru napsal: ,,Autor je přesvědčen o tom, že objasněním daného thematu byl proveden jeden z nejdůležitějších a nejvýznamějších kroků k opravdovému obohacení vědy a vzdělání a tedy i k zlepšení lidského osudu.“ V této větě vidí A. Rényi rys pokrokovosti J. Bolyaie, protože vědeckou pravdou bojoval za pokrok všeho lidstva, při čemž vlastní prospěch mu byl záležitostí vedlejší.[7])

Na naléhání svého syna zaslal F. Bolyai jeho práci ještě roku 1832 Gaussovi k posouzení. Gaussova odpověď, v níž tuto práci chválí a poznamenává, že jemu osobně jsou tyto věci už dávno známé, ale že je nechce za svého života publikovat, působila jinak na otce a jinak na syna. F. Bolyai byl velmi potěšen a psal svému synu: ,,Gaussova odpověď o Tvé práci je velmi krásná a je naší vlasti a národu ke cti.“ Naproti tomu pro J. Bolyaie znamenalo Gaussovo stanovisko těžkou ránu. Nemohl pochopit, proč Gauss nechce veřejně publikovat takový objev. Pokládal Gausse za povrchního člověka, který pro vlastní pohodlí ponechává vědu v letargii a v zastaralém stavu, místo aby bojoval za vědeckou pravdu tak, jak je povinností každého řádného vědce. Nedostatek veřejného ocenění jeho práce působil neblaze na J. Bolyaie, od těch dob datoval se jeho celkový úpadek.

Mezitím N. I. Lobačevskij přes všechny překážky doma pokračoval ve své práci. V létech 1835—1838 vydal několik dalších pojednání o své geometrii. Dvě z nich vyšla v Německu v ,,Crellově žurnálu“. Nevadilo mu příliš, že tyto práce nenašly ve veřejnosti náležitého pochopení. Zdá se, že ho to spíše podnítilo k novému, přístupnějšímu a soustavnému výkladu celé látky. Tak došlo k jeho spisu ,,Geometrische Untersuchungen“, vydaném v Berlíně 1840. Teprve tato práce dostala se do rukou Gaussovi a J. Bolyaiovi. Gauss cenil Lobačevského práci stejně vysoko jako práci Bolyaiovu, ale opět jen v soukromých dopisech. V roce 1842 byl sice Lobačevskij na Gaussův popud zvolen dopisujícím členem Göttinské učené společnosti, ale bez bližšího odůvodnění. J. Bolyai, který Lobačevského jméno neznal, se na základě svých zkušeností celkem přirozeně domníval, že jde o pseudonym a že autorem je Gauss. Ve skutečnosti stál Gauss stále jenom v pozadí; nemohl nijak ovlivňovat Lobačevského a ten se na druhé straně zase nespoléhal na mínění autorit, ale jen na své síly.

Ale ať už byly povahové rozdíly mezi nimi jakékoli, je důležité si všimnout, že jak J. Bolyai tak N. I. Lobačevskij si dobře uvědomovali noetický význam svých objevů. Uveďme zde nejdřív Bolyaiova slova: ,,.... přírodu nelze vykládat podle vybájených výmyslů, nýbrž je třeba zkoumat pravdu i samu přírodu rozumem ve své přirozenosti“. K tomu se druží stručný výrok Lobačevského: ,,Vrozeným pojmům nemáme důvěřovat“. Obojí neznamená nic menšího než jasné stanovisko proti apriornosti ve vědecké práci, tedy opět nesouhlas s Kantem, který jsme viděli už u Gausse.

Práce všech tří objevitelů neeuklidovslé geometrie byla ovšem mnohem obtížnější, než si dnes dovedeme představit. Dnes máme názorné modely neeuklidovské geometrie, které oni neměli, modely, které slouží dobře i k popularisaci neeuklidovské geometrie. Tyto modely byly sestrojeny až na základě prací Itala E. Beltramiho (1835—1900), který užitím geodetického zobrazení ploch zjistil, že Bolyaiova-Lobačevského geometrie se dá interpretovat na plochách

[7]) A. Rényi [6] str. 150—151.

vnořených do euklidovského prostoru, které mají konstantní zápornou míru křivosti. E. Beltrami byl jeden z prvních, kdož upozornili veřejnost na práce Bolyaiovy a Lobačevského. Ve Francii měl stejný význam J. Hoüel (1823 až 1866), který pořídil první překlady prací J. Bolyaie a N. I. Lobačevského do francouzštiny; vyšly v létech 1866—1867.

Budiž ještě připomenuto, že ve spojení s pracemi německého matematika B. Riemanna (1849—1866) byl později sestrojen a prakticky uplatněn i další typ neeuklidovské geometrie, lišící se od Euklidovy geometrie i v jiných elementech než v axiomu o rovnoběžkách. Ucelenou teorii všech těchto typů geometrie podal pak německý matematik F. Klein (1849—1925). Pojednání o tom přesahuje už rámec tohoto článku, připomeňme jen, že sférická trigonometrie je modelem Riemannovy geometrie. V této souvislosti je zajímavé si všimnout toho, že srovnání rovinné geometrie s geometrií na kouli vyniklo teprve až po objevu Bolyaiovy-Lobačevského geometrie, ačkoli sférickou trigonometrii znali a prakticky užívali už Babyloňané ve starověku. Je vidět, že bylo nutno vyčkat ve vývoji matematiky onoho stadia, kdy matematikové začali zevšeobecňovat pojmy, s nimiž pracovali až do 17. a 18. století. Tak jako od studia číselných veličin se došlo abstrakcí k obecným množinám, tak také v geometrii se zobecňoval pomalu pojem prostoru a tím se měnil a rozšiřoval i obsah geometrie. Je-li rysem moderní matematiky vysoký stupeň abstrakce, je to mimo jiné také zásluhou objevu neeuklidovské geometrie. Už v tom je nutno spatřovat velký význam N. I. Lobačevského i J. Bolyaie pro celou dnešní matematiku.

6. Závěr

Dokresleme nejdřív životní profil Jánose Bolyaie. Reálný postoj k vědě projevil tento génius i mimo rámec geometrie, když se zabýval kolem roku 1826 myšlenkou vybudování teorie komplexních čísel. I zde stál nesmlouvavě proti mystice, kterou pojem imaginárních čísel byl tehdy opředen. Hluboká je zvláště jeho odpověď v anketě, kterou o tomto thematu vyhlásila v roce 1837 lipská Společnost Jablonovského.

Vedle toho všeho zabýval se J. Bolyai až do konce svého života, pokud mu to nemoc neznemožnila, i jinými problémy matematiky. Ale jeho osamocenost způsobila, že už nestačil tehdejšímu tempu vývoje matematiky. Kromě toho se zabýval problémy nejobtížnějšími, a to horečně, usilovně a téměř bez oddechu. Protože už mu chyběl styk s ostatním matematickým světem, stavěl se k příslušným problémům někdy i špatně. Tak se např. pokoušel o důkaz algebraické řešitelnosti každé algebraické rovnice, což, jak dnes víme, muselo ztroskotat. To ovšem nikterak nezmenšuje velikost a význam jeho práce. Zvláště věcný obsah neeuklidovské geometrie bude třeba ještě čtenářům přiblížit, pro učitele je stejně důležitý jako pro ostatní odborníky.[8])

Budiž znovu zdůrazněno, že připomínáme-li si letos výročí Jánose Bolyaie, uvědomujeme si jeho nejširší význam. Uvědomujeme si Bolyaiovo pokrokové stanovisko v otázkách povinnosti vědce k lidské společnosti a Bolyai je nám vzorem pracovní píle v boji za tento pokrok. Nepřinesla-li tato píle ovoce jemu, přinesla ovoce jiným, celé lidské společnosti. Uvědomíme-li si tak jako on, že věda musí sbližovat veleduchy národů a ne je isolovat, pochopíme zařazení jeho výročí do akce světových kulturních výročí.

---

[8]) B. V. Kutuzov [5] výstižně praví, že pro učitele matematiky je znalost neeuklidovské geometrie asi tak potřebná, jako pro učitele mateřštiny znalost skladby cizího jazyka.

Literatura:

[1] R. Bonola-H. Liebmann: *Die nichteuklidische Geometrie.* (Nakl. B. G. Teuner, Lipsko—Berlín 1908).
[2] R. Baldus: *Nichteuklidische Geometrie.* (Sammlung Göschen, nakl. Walter de Gruyter et Co, Berlín, II. vydání 1944.)
[3] V. Hlavatý: *Úvod do neeuklidovské geometrie.* (Nakl. JČMF, Praha, II. vydání 1949.)
[4] J. B. Pavlíček: *Základy neeuklidovské geometrie Lobačevského.* (Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953.)
[5] B. V. Kutuzov: *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie.* (Z ruštiny přeložili R. Zelinka a Vl. Macháček, nakl. ČSAV, Praha 1953.)
[6] A. Rényi: *Ideologický význam geometrie Bolyaie-Lobačevského.* (Z ruštiny přeložil K. Winkelbauer, Časopis pro pěst. matematiky, roč. 78, č. 2, str. 149—167, ČSAV, Praha 1953.)
[7] L. Nový: *Matematika včera a dnes.* (XII. kapitola v knize K. Havlíček a kolektiv: *Cesty moderní matematiky.* Malá moderní encyklopedie, nakl. Orbis, Praha 1960.)