Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Otomar Hájek

Tři principy indukce v matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 4, 385--394

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137018

které se hodí pro jeho případ nejlépe. Praktické užití tohoto postupu je ovšem různě složité podle povahy problému. Má-li výběrový prostor a prostor rozhodnutí konečný počet prvků, existuje konečný počet možných rozhodovacích pravidel a je tedy zásadně možno prozkoumat prováděcí charakteristiky každého z těchto pravidel. I v tomto případě bývají praktické nesnáze, které se zmnohonásobí, když je výběrový prostor nekonečný a zvláště když je také prostor rozhodnutí nekonečný. Zkoumání prováděcích charakteristik po jedné se stává nesnadným a nemožným; proto se pokusíme řešit problém v jistém smyslu obráceně. Specifikujeme předem vlastnosti žádoucí prováděcí charakteristiky a pokusíme se určit rozhodovací funkci, existuje-li taková, jejíž prováděcí charakteristiky mají naznačené vlastnosti. Z tohoto řešení vyplynulo odvození mnohých dnes běžných pojmů matematické statistiky, jako např. stejnoměrně nejsilnější testy statistických hypotéz nebo systémy nejkratších intervalů spolehlivosti.

Obrátil jsem zde pozornost k některým prakticky důležitým problémům matematické statistiky, které mohou vést i k novým problémům matematickým. Doufám však, že z uvedeného je patrno, že naléhavé a obtížné úkoly matematické statistiky jsou povahy logické a dále, že je třeba řešit problémy spadající do filosofie vědy.

Literatura:

[1] B. V. Gněděnko: *Kurs těorii verojatnostěj,* 1954, 2. vyd.
[2] L. J. Savage: *The foundations of statistics* (1954).
[3] Haldane: *On a method of estimating frequencies,* Biometrika 33, str. 222.

TŘI PRINCIPY INDUKCE V MATEMATICE

O. Hájek, *katedra mat. a deskr. geom. el. fak. ČVUT* v Praze

V matematice je běžně používán známý princip úplné indukce; v některých partiích moderní matematiky se střetáváme v analogických situacích s tzv. principem transfinitní indukce; konečně v jednom článku o základech analysy A. Ja. Chinčin uvádí „spojitý princip indukce“.

Snad bude zajímavé si tato tvrzení porovnat, a promluvit o jejich významu.

I. Úplná indukce

Tzv. princip úplné (matematické) indukce lze formulovat takto:

A'. *Nechť V je množina (některých) přirozených čísel, která splňuje podmínky*
(a) *obsahuje číslo* 1;
(b) *je-li pro některé přirozené číslo n splněno $n \in V$, je též $n + 1 \in V$.*
Potom V obsahuje všechna přirozená čísla.

Formulace bývá i jiná — např. se mluví o tvrzení T_n závislém na přirozeném čísle n, pravdivém pro $n = 1$, atd., a usuzuje se na pravdivost všech T_n. Jiný tvar, ekvivalentní, formálně však poněkud silnější (má slabší předpoklady), je

A. *Nechť V je množina (některých) přirozených čísel, která splňuje podmínky*

(a) $1 \in V$;

(b) *je-li pro přirozené n splněno $k \in V$ pro všechna přirozená k s $k \leqq n$, pak je též $n + 1 \in V$.*

Potom V obsahuje všechna přirozená čísla.

Užití tvrzení **A**' je snad natolik známé, že nepotřebuje objasnění. Uveďme jen jeden příklad.

Důkaz rovnosti

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n = \cos nx + \mathrm{i} \sin nx \tag{*}$$

pro všechna přirozená n lze snadno provést úplnou indukcí: pro $n = 1$ není co dokazovat, a při „indukčním kroku" stačí užít známých trigonometrických rovností

$$\cos nx \cos x - \sin nx \sin x = \cos (n + 1) x\,,$$
$$\cos nx \sin x + \sin nx \cos x = \sin (n + 1) x\,.$$

Pro aplikaci tvrzení **A** bychom provedli „přípravu": označme V množinu všech přirozených čísel n takových, že (*) je správná pro všechna reálná x; při užití druhé formulace by „příprava" byla: označme T_n tvrzení (závislé na n) — rovnost (*) platí pro všechna reálná x.

Připadá-li tento příklad příliš jednoduchý, stačí si rozvážit, zda (*) platí i pro komplexní x (je nutno něco dokazovat?).

Na první pohled by se zdálo, že při **A** jde o běžné matematické tvrzení typu „když ..., pak ..."[1]); a očekáváme tedy nějaký důkaz. Co je to však důkaz? Zhruba řečeno, důkazem matematického tvrzení rozumíme odvození tohoto tvrzení přesně stanoveným aparátem (formální logikou) z přesně stanovených základních tvrzení (soustavy axiomů dané partie); tj. řetězec, jehož články jsou matematická tvrzení, jehož poslední článek je dokazované tvrzení, a jehož spojky jsou formálně-logické kroky. V případě tvrzení **A** jde patrně o teorii přirozených čísel; hledali bychom tedy možnost odvodit **A** z elementárních vlastností přirozených čísel.

Lze snadno ukázat, že **A** plyne z tvrzení: každá neprázdná část množiny přirozených čísel obsahuje nejmenší (první) číslo; naopak, tuto poučku lze odvodit z **A**. (Důkaz sporem, není-li **A** pravdivé, existují přirozená čísla, která nepatří do V; budiž m první z nich; ovšem $m \neq 1$, neboť $1 \in V$; $m - 1 \in V$, neboť m je první $\bar{\in} V$[2]); tedy přece jen $m \in V$, podle (b); spor). Ovšem, je otázka, které z těchto tvrzení, uvedené a **A**, je „více základní". Obecné mínění spíše preferuje **A** — zdá se dokonce, že **A** je jednou z nejzákladnějších vlastností přirozených čísel. Např. v nejznámější axiomatice elementární aritmetiky pocházející od G. Peana (1891), tvrzení **A**' vystupuje jako pátý axiom.[3])

II. Transfinitní indukce

B. *Nechť V je množina, jejíž prvky jsou některá ordinální čísla $< \alpha_0$, taková, že*

(a) $1 \in V$;

[1]) Naproti tomu u druhé formulace — pomocí T_n — jde o důkazové schéma nebo o metamatematické tvrzení.

[2]) $\bar{\in}$ znamená: není prvkem, nepatří do .

[3]) viz např. [1] str. 133 a další.

(b) *je-li pro některé ordinální číslo* $\alpha < \alpha_0$ *splněno* $\beta \in V$ *kdykoli* $\beta < \alpha$, *pak též* $\alpha \in V$.

Potom V *obsahuje všechna ordinální čísla* $< \alpha_0$.[4])

Je ihned zřejmá podobnost tvrzení **B** a **A**. Omezíme-li se zde na tzv. konečná ordinální čísla 1, 2, 3, ..., tj. volíme-li za α_0 právě první nekonečné ordinální číslo, redukuje se **B** na **A**′. Tedy **B** je zobecněním **A**.

Patrně tedy používáme tvrzení **B** tam, kde bychom sice rádi použili **A**, kde nám však **A** — a přirozená čísla — nestačí. Přitom je někdy nepříjemné, že potřebujeme zavádět do úvah i nekonečná ordinální čísla, čímž se celá věc prodlužuje a stává se méně přehlednou. Na štěstí lze formulovat **B** v ekvivalentním tvaru — tzv. Zornovo lemma — kde ordinální čísla explicitně nevystupují; to je do jisté míry vykoupeno tím, že v Zornově lemmatu se vyskytují nejen množiny, ale dokonce systémy množin.

Nechť je dána množina A, a též soustava $\mathcal{S}$ některých podmnožin množiny A (tedy prvky množiny $\mathcal{S}$ jsou některé množiny $X \subset A$).[5]) Řekněme, že $\mathcal{S}$ je *monotonní*, jestliže v každé dvojici množin z $\mathcal{S}$ je jedna částí druhé, tj. z

$$X, Y \in \mathcal{S} \quad \text{plyne} \quad X \subset Y \quad \text{nebo} \quad Y \subset X .$$

Dále, řekneme, že množina Y je *saturovaná* v $\mathcal{S}$, jestliže žádná množina z $\mathcal{S}$ není vlastní nadmnožinou množiny Y, tj. jestliže z

$$X \in \mathcal{S},\ X \supset Y \quad \text{plyne} \quad X = Y .$$

(Poznámky: Soustavy množin často nejsou monotonní — např. soustava všech částí množiny o dvou nebo více prvcích. U monotonních soustav $\mathcal{S}$, saturovaná množina je prostě největší množina, patří-li do $\mathcal{S}$; u soustav nikoli monotonních může být i více saturovaných množin, ale také nemusí existovat žádná — např. soustava všech konečných částí množiny všech přirozených čísel neobsahuje žádnou saturovanou množinu. Místo „saturovaná“ se často vyskytuje méně vhodný název „maximální“.) Nyní vyslovíme Zornovo lemma:

Z. *Nechť* $\mathcal{S}$ *je soustava (některých) podmnožin množiny* A *splňující podmínku — ke každé monotonní podsoustavě* $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ *existuje množina* $Y \in \mathcal{S}$ *tak, že* $X \subset Y$ *pro všechny* $X \in \mathcal{S}'$.

Potom existuje množina $Z \in \mathcal{S}$, *která je saturovaná v* $\mathcal{S}$.[6])

Podmínku tvrzení **Z** lze vyslovit — každá monotonní podsoustava je shora omezena (ve smyslu množinové inkluse) některou množinou patřící do $\mathcal{S}$; název: $\mathcal{S}$ je *induktivní*.

Nyní uvedeme jeden příklad užití tvrzení **Z**, který je sám o sobě dost důležitý.

Budiž F libovolná množina funkcí definovaných na $\langle 0, 1 \rangle$; po F požadujeme jen toto:

je-li $f, g \in F$, pak $f + g \in F$,

je-li $f \in F$, α libovolné číslo, pak $\alpha f \in F$.

---

[4]) O ordinálních číslech pojednává velmi přístupně [2]. Pro porozumění další části tohoto článku není nutné být obeznámen s ordinálními čísly. Pak je ovšem nutno **B** vynechat.

[5]) Budeme dále předpokládat, že A i $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ jsou neprázdné.

[6]) Důsledek lze zesílit: ke každé $X \in \mathcal{S}$ existuje saturovaná $Z \in \mathcal{S}$, která splňuje $Z \supset X$.

Takovou množinu F nazýváme *lineárním prostorem funkcí.* Např. F může sestávat ze všech řešení dané lineární diferenciální rovnice bez pravé strany (obyčejné nebo parciální, případně s proměnnými koeficienty); nebo ze všech mnohočlenů; nebo ze všech mnohočlenů stupně $\leqq n$ pro některé dané n; nebo ze všech funkcí po úsecích konstantních v $\langle 0, 1\rangle$; atp. Naproti tomu např. množina všech mnohočlenů sudých stupňů tyto požadavky nesplňuje.

Z předpokladů ihned plyne: je-li $f, g \in F$, pak též

$$f - g = f + (-1)\, g \in F\,; \quad 0 = f - f \in F\,;$$

atd.

Řekneme, že funkce $f_1, f_2, \ldots, f_p$ jsou *lineárně nezávislé* v $\langle 0, 1\rangle$ jestliže

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p = 0$$

v $\langle 0, 1\rangle$ jen když

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$$

(tj. když jediná jejich lineární kombinace identicky nulová je právě tzv. triviální, s nulovými koeficienty). Nenastává-li toho, pak říkáme, že jsou *lineárně závislé*; to nastane právě když existují konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ takové, že

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p = 0$$

ač některé z $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ jsou $\neq 0$.

Zejména, jsou-li $f_1, f_2, \ldots, f_p$ lineárně nezávislé, pak též $f_2, f_3, \ldots, f_p$ jsou lineárně nezávislé. Naproti tomu, přidáme-li některou f, pak $f_1, f_2, \ldots, f_p, f$ mohou a nemusí být lineárně nezávislé, podle okolností a volby funkce f (např. $f_1, \ldots, f_p$, 0 jsou vždy lineárně závislé:

$$0 \,.\, f_1 + 0 \,.\, f_2 + \ldots + 0 \,.\, f_p + 1 \,.\, 0 = 0\ ).$$

Užitím Zornova lemmatu nyní dokážeme toto tvrzení: *V každé množině F popsaného typu vždy existuje tzv. base*, tj. množina $B \subset F$ taková, že každou $f \in F$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků base,

$$f = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_p b_p\,, \quad b_k \in B\,,$$

a to jediným způsobem (až na pořadí sčítanců).[7])

Taková base tedy dokonale určuje celou množinu F. V uvedených příkladech lineárních prostorů lze často basi snadno sestrojit. Např. je-li F množina všech řešení obyčejné lineární diferenciální rovnice bez pravé strany, pak basi tvoří každý tzv. fundamentální systém řešení; je dobře známo, že fundamentární systémy existují. Naproti tomu u parciálních rovnic již situace není tak průzračná. Pointa naší věty tedy je, že v každé množině F uvedeného typu base vždy existují.

Přistupme nyní k důkazu. Proveďme „přípravu" k užití **Z**: Nechť $\mathscr{S}$ je soustava všech množin $X \subset F$, které sestávají z lineárně nezávislých funkcí (tj. je-li $f_1, f_2, \ldots, f_p \in X$, pak tyto funkce jsou lineárně nezávislé). Tato soustava $\mathscr{S}$ splňuje předpoklady v **Z**, jak nyní ukážeme.

Budiž $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$ libovolná monotonní podsoustava. Označme

$$Y = \bigcup_{X \in \mathscr{S}'} X \quad (= \text{sjednocení všech } X \in \mathscr{S}')\,.$$

[7]) Množina B sama nemusí být konečná.

Patrně $X \subset Y$ pro všechny $X \subset \mathcal{S}'$; máme ještě ukázat, že $Y \in \mathcal{S}$, tj., že Y sestává z lineárně nezávislých funkcí. Nechť tedy $f_1, f_2, \ldots, f_p \in Y$. Protože $Y = \mathbf{U}X$, existuje $X_1 \in \mathcal{S}'$ tak, že $f_1 \in X_1$; podobně, existuje $X_k \in \mathcal{S}'$ tak, že $f_k \in X_k$ pro ostatní $k = 2, 3, \ldots, p$. Protože $\mathcal{S}'$ je monotonní, mezi množinami

$$X_1, X_2, \ldots, X_p$$

existuje největší — označme ji X_0; pak

$$f_k \in X_k \subset X_0, \quad \text{tj.} \quad f_k \in X_0 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, p\,.$$

Jest $X_0 \in \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, tedy X_0 sestává z lineárně nezávislých funkcí, takže i $f_1, f_2, \ldots, f_p$ jsou lineárně nezávislé, jak jsme měli ukázat. Tedy skutečně naše $\mathcal{S}$ splňuje předpoklady v **Z**.

Potom tedy existuje saturovaná množina $B \in \mathcal{S}$. Ukažme, že B je hledaná base. Nechť f je libovolná funkce z F; je tedy buď $f \in B$ nebo $f \bar{\in} B$. V prvém případě

$$f = 1\,.\,f + 0\,,$$

f je lineární kombinací prvků z B. V druhém případě je $f \bar{\in} B$, takže $B' = B \cup (f)$ je vlastní nadmnožinou k B,

$$B' \underset{\neq}{\supset} B\,.$$

Protože však B je saturované, nemůže být $B' \in \mathcal{S}$, takže $B' = B \cup (f)$ nesestává z lineárně nezávislých prvků. Tedy existují čísla $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, funkce $b_1, b_2, \ldots, b_p \in B$ tak, že

$$\alpha f + \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_p b_p = 0\,, \quad \text{není} \quad \alpha = \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0\,.$$

Nemůže ale být $\alpha = 0$, neboť pak by $b_1, b_2, \ldots, b_p$ byly lineárně závislé, ač $B \in \mathcal{S}$. Tedy je $\alpha \neq 0$, načež

$$f = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p$$

($\beta_k = -\alpha_k/\alpha$). V obou případech, $f \in B$ i $f \bar{\in} B$, je tedy f lineární kombinací některých prvků z B (to je důsledek saturovanosti množiny B). Ještě máme ukázat, že takové vyjádření je jednoznačné. Kdyby bylo např. [8])

$$f = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_p b_p\,,$$
$$f = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_p b_p\,,$$

pak odečtením dostáváme

$$(\alpha_1 - \beta_1)\, b_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, b_2 + \ldots + (\alpha_p - \beta_p)\, b_p = 0,$$

takže z lineární nezávislosti plyne

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \quad \alpha_p - \beta_p = 9,$$

tedy $\alpha_k = \beta_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, p$; skutečně tedy máme jednoznačnost. Tím je důkaz ukončen.

Zornova lemmatu se užívá zejména v moderní algebře, a pak v disciplinách, které z moderní algebry čerpají — kombinatorická topologie, funkcionální analysa (Hahnova-Banachova věta).

[8]) Jestliže např. b_1 vystupuje v prvém vyjádření a ne v druhém, pak doplníme sčítancem $0\,.\,b_1$; tím dosáhneme toho, aby v obou vyjádřeních byly tytéž funkce.

Někdy místo **Z** užíváme ekvivalentní věty Teichmüllerovy,

T. *Nechť $\mathscr{S}$ je soustava (některých) podmnožin množiny A, splňující podmínku — jest $X \in \mathscr{S}$ když a jen když každá konečná podmnožina $Y \subset X$ patří do $\mathscr{S}$. Potom existuje v $\mathscr{S}$ množina saturovaná v $\mathscr{S}$.*

Řekneme, že vlastnost P (podmnožin dané množiny A) je *konečného charakteru*, jestliže pro každou množinu X platí: X má vlastnost P právě když každá konečná podmnožina množiny X má vlastnost P. Potom tvrzení **T** lze vyslovit: ke každé vlastnosti P konečného charakteru existuje množina saturovaná vlastnosti P (tj. taková, že má P, avšak žádná vlastní nadmnožina nemá P).

Je snad nyní vidět, proč **Z** má poměrně častou aplikaci v algebře: mnohé pojmy algebry bezprostředně souvisí s vlastnostmi konečného charakteru. Tak v probraném příkladě, množina X patří do $\mathscr{S}$ (tj. X sestává z lineárně nezávislých funkcí) právě když totéž platí o každé její konečné podmnožině.[9]) Kdybychom tedy v tomto příkladě užili **T** místo **Z**, ušetřili bychom si celou úvahu začínající „Budiž $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$ libovolná…“ až po „… splňuje předpoklady v **Z**“.

V tomto odstavci jsme prohlásili, že tvrzení **B**, **Z**, **T** jsou ekvivalentní, že jsou jen různými vyjádřeními téže skutečnosti. Dokažme alespoň ekvivalenci **Z** $\Leftrightarrow$ **T**.

1. Nechť **T** platí; dokazujme **Z**. Nechť $\mathscr{S}$ je soustava splňující předpoklady v **Z**. Označme P tuto vlastnost podsoustav $\mathscr{S}'$ soustavy $\mathscr{S}$: soustava $\mathscr{S}'$ je monotonní. Zřejmě P je konečného charakteru. Ježto **T** platí, existuje tedy saturovaná podsoustava $\mathscr{S}'$ soustavy $\mathscr{S}$, kterou pak nelze rozšířit se zachováním monotonie. Podle předpokladu o tom, že $\mathscr{S}$ splňuje podmínku ze **Z**, k této monotonní podsoustavě $\mathscr{S}'$ existuje množina $Y \in \mathscr{S}$ taková, že

$$Y \supset \text{všechny } X \in \mathscr{S}' .$$

Ukažme, že tato množina Y je hledaná množina saturovaná v $\mathscr{S}$. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by vlastní nadmnožina Z,

$$Z \in \mathscr{S}, \quad Z \underset{\neq}{\supset} Y .$$

Pak $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}' \cup (Z)$ je monotonní podsoustava soustavy $\mathscr{S}$ (pro $X \in \mathscr{S}'$ je $X \supset Y \supset Z$; pro $X_1, X_2 \in \mathscr{S}'$ je $X_1 \supset X_2$ nebo $X_2 \supset X_1$ ježto sama $\mathscr{S}'$ je monotonní). Avšak $\mathscr{S}'$ je saturovaná monotonní; tedy ji nelze zvětšit. Nemůže tedy existovat taková množina Z; tedy skutečně Y je saturovaná v $\mathscr{S}$.

2. Naopak, nechť **Z** platí, a dokazujme **T**. Nechť soustava $\mathscr{S}$ splňuje předpoklady v **T**. Nechť $\mathscr{S}'$ je monotonní podsoustava. Označme

$$Y = \bigcup_{X \in \mathscr{S}'} X .$$

Je-li $Z \subset Y$ libovolná konečná podmnožina, pak $Z \subset$ některá $X \in \mathscr{S}'$ (je-li $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$, je $z_k \in$ některá $X_k \in \mathscr{S}'$, pro každé k; ježto $\mathscr{S}'$ je monotonní, jsou všechna $z_k \in$ největší X_k, tedy $Z \subset$ největší X_k). Tedy $Z \in \mathscr{S}$ podle předpokladu v **T**, pro každou konečnou $Z \subset Y$. Tedy $Y \in \mathscr{S}$, opět podle předpokladu v **T** (tam je „když a jen když“). Množina $Y \in \mathscr{S}$ je tedy společnou horní mezí

---

[9]) Podobně, v teorii grup, „býti komutativní podgrupou“ je vlastnost konečného charakteru; „míti konečný systém generátorů“ není.

množin $X \in \mathcal{S}'$, takže je splněn i předpoklad v **Z**. Podle předpokladu, **Z** platí; existuje tedy saturovaná množina v $\mathcal{S}$; tedy platí **T**, cbd.

Ani důkazy **Z** $\Leftrightarrow$ **B** nejsou obtížné — viz [3]. Trochu je překvapující, že na první pohled není patrna žádná analogie mezi **Z** a indukčním postupem v **B**, **A**. To je však jen otázka formulace: zcela zřejmě **Z** je ekvivalentní s tvrzením

Z'. *Nechť $\mathcal{S}$ je soustava (některých) podmnožin množiny A, a nechť $\mathcal{S}$ splňuje podmínky*

(a) *je-li $X \in \mathcal{S}$, $X \neq A$, pak existuje $Y \in \mathcal{S}$ s $Y \underset{\neq}{\supset} X$;*

(b) *je-li $\mathcal{S}'$ monotonní podsoustava soustavy $\mathcal{S}$, pak existuje množina $Y \in \mathcal{S}$ splňující*

$$Y \supset \text{ každá } X \in \mathcal{S}'$$

Potom $A \in \mathcal{S}$.

Tak jako v odstavci I, vzniká otázka po důkaze tvrzení **B**. Opět se ukazuje, že princip transfinitní indukce **B** spočívá v samých základech matematiky — je možné jej vyjádřit v ekvivalentních tvarech, více či méně názorných (viz níže), ale o důkaze nelze mluvit.

Uveďme tři tvrzení ekvivalentní s **B**; jsou to tzv. axiom výběru **AV**, Zermelova věta o dobrém uspořádání **O** a Tychonovova věta o kompakticitě topologického součinu kompaktních prostorů **K**.

AV. *Nechť A je množina, $\mathcal{S}$ libovolný neprázdný systém neprázdných podmnožin množiny A. Pak existuje zobrazení φ, které zobrazuje systém $\mathcal{S}$ do množiny $\bigcup_{X \in \mathcal{S}} X$ tak, že*

$$\textit{pro} \quad X \in \mathcal{S} \quad \textit{je} \quad \varphi(X) \in X\,.$$[10]

(Jinými slovy, k soustavě $\mathcal{S}$ existuje přiřazení φ, které každé množině $X \in \mathcal{S}$ přiřazuje některý její prvek $\varphi(X) \in X$; říkáme zkrátka, že φ vybírá prvek $\varphi(X)$ z každé X.)

O. *V každé množině A lze definovat vztah $\leqq$ mezi dvojicemi jejích prvků tak, že*

(a) *vždy $x \leqq x$;*
(b) *z $x \leqq y$, $y \leqq x$ plyne $x = y$;*
(c) *z $x \leqq y$, $y \leqq z$ plyne $x \leqq z$;*
(d) *vždy buď $x \leqq y$ nebo $y \leqq x$;*
(e) *v každé neprázdné $X \subset A$ existuje („první") prvek $y \in X$ takový, že*
$$y \leqq \textit{ všechna } x \in X\,.$$[11]

(Poznámka: (a, b, c) definují tzv. uspořádanou množinu — říká se též polouspořádanou nebo částečně uspořádanou; (a, b, c, d) definují plně uspořádanou množinu; (a, b, c, d, e) definují tzv. dobře uspořádanou množinu. Věta **O** tedy tvrdí, že „každou množinu lze dobře uspořádat").

K. *Je-li $\mathcal{S}$ soustava kompaktních topologických prostorů, pak jejich topologický součin je též kompaktní prostor.*[12]

---

[10]) viz [2], str. 80.

[11]) viz [2], str. 79.

[12]) viz [4], str. 285. Pro porozumění dalším částem tohoto článku je **K** zcela nepodstatné.

Z **AV** je patrné, jak fundamentální je tvrzení **B** — tolik, jako jemu ekvivalentní **AV**, a toto je přece zřejmé! Vždyť jistě u každé neprázdné množiny X umíme zvolit některý její prvek $\varphi(X)$!

Nicméně předchozí vykřičníky jsou typickým případem zvyšování hlasu na místě zesílení argumentů. Tvrzení **AV** vůbec není zřejmé — zřejmé ve smyslu je zřejmý postup důkazu — je pouze názorné, snadno představitelné; a to je již zcela jiná záležitost.

Na druhé straně, **O** a **K** ukazují, jak ostré je tvrzení **B**; jsou to přece jenom dost speciální výsledky, a **O** je dokonce poněkud překvapující.

III. Princip spojité indukce

C. *Nechť V je množina (některých) reálných čísel, která splňuje podmínky*

(a) *existuje číslo x takové, že $t \in V$ pro všechna $t < x$;*

(b) *je-li x libovolné číslo takové, že $t \in V$ pro $t < x$, pak existuje $y > x$ splňující $t \in V$ pro $t < y$.*

Potom V obsahuje všechna reálná čísla.[13])

Opět, ihned je zřejmá analogie **C** s **B** a **A**. Vyslovme ještě **C** tak, aby vynikla příbuznost se **Z'**:

Nechť $\mathcal{S}$ je soustava některých intervalů na reálné ose typu $(-\infty, x)$. Jestliže $\mathcal{S}$ je neprázdná a neobsahuje interval saturovaný v $\mathcal{S}$, pak každé reálné číslo leží v některém intervalu z $\mathcal{S}$.

Kdyby soustava $\mathcal{S}$ navíc splňovala předpoklad (b) v **Z'**, bylo by pak dokonce $(-\infty, +\infty) \in \mathcal{S}$. Tedy **C** má v podstatě slabší předpoklady i slabší důsledek než **Z**.

Ukazuje se, že tvrzení **C** má zcela jiný význam než **A** či **B**. Týká se jedné speciální, i když základní, vlastnotsi reálných čísel, axiomu spojitosti; vlastnosti, která je do jisté míry specifická právě pro osu reálných čísel, a kterou již nemá např. množina racionálních čísel, nebo množina iracionálních čísel. Již Chinčin, loc. cit., ukázal, že **C** ke ekvivalentní[14]) jedné formě axiomu spojitosti, totiž Dedekindově větě. Je tedy ekvivalentní i ostatním tvrzením, o nichž víme, že jsou ekvivalentní Dedekindově větě.[15]) Ukažme si to na jednom zajímavém příkladě, tzv. Fordově větě.

Nechť soustava $\mathcal{S}$ sestává z (některých) nedegenerovaných intervalů libovolného typu — tedy mohou a nemusí být uzavřené, omezené, atd., ale musí obsahovat více než jeden bod. Řekneme, že $\mathcal{S}$ je *intervalově aditivní*, jestliže je splněna podmínka

— jestliže intervaly $J, K \in \mathcal{S}$ mají společný vnitřní bod, pak $J \cup K \in \mathcal{S}$.

Dále řekneme, že soustava $\mathcal{S}$ *pokrývá* interval $\langle a, b\rangle$ když

(a) každý bod x, $a < x < b$, je vnitřním bodem některého $J \in \mathcal{S}$;

(b) bod a je levým krajním bodem některého zleva uzavřeného intervalu $J \in \mathcal{S}$, a b pravým koncovým bodem některého zprava uzavřeného $K \in \mathcal{S}$.

Potom Fordovu větu lze vyslovit takto:[16])

F *Nechť soustava $\mathcal{S}$ je intervalově aditivní a pokrývá interval $\langle a, b\rangle$. Potom jest $\langle a, b\rangle \in \mathcal{S}$.*

13) viz [5], str. 165.

14) v plně uspořádané množině, husté, bez koncových prvků.

15) viz [6], [7].

16) viz [8].

Nejdříve ukažme, jak snadno se aplikuje **F** na odvození základních vět analysy. Předpokládejme tedy, že tvrzení **F** je správné. Dokažme nejprve Weierstrassovu větu: *Funkce spojitá v omezeném uzavřeném intervalu je omezená.*

Nechť tedy funkce f je spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť $\mathscr{S}$ je soustava všech těch intervalů ležících v $\langle a, b\rangle$, v nichž je f omezená. Nyní, tato soustava je intervalově aditivní: je-li $J, K \in \mathscr{S}$, tj.

$$\alpha \leqq f(x) \leqq \beta \quad \text{pro} \quad x \in J\,,$$
$$\gamma \leqq f(x) \leqq \delta \quad \text{pro} \quad x \in K\,,$$

pak je

$$\min(\alpha, \gamma) \leqq f(x) \leqq \max(\beta, \delta) \quad \text{pro} \quad x \in J \cup K\,,$$

a tedy skutečně je též $J \cup K \in \mathscr{S}$ (pokud $J \cup K$ je interval). Dále, $\mathscr{S}$ pokrývá $\langle a, b\rangle$: je-li $x \in (a, b)$, pak f je spojitá v bodě x; a tedy k číslu $\varepsilon = 1$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $|y - x| < \delta$ je $|f(y) - f(x)| < 1$, tj.

$$f(x) - 1 < f(y) < f(x) + 1 \quad \text{pro} \quad y \in (x - \delta, x + \delta)\,,$$

takže f je omezená v $(x - \delta, x + \delta)$ a tedy tento interval patří do $\mathscr{S}$. (Podobně v koncových bodech a, b.) Podle tvrzení **F** je pak $\langle a, b\rangle \in \mathscr{S}$, jinými slovy, funkce f je omezená v $\langle a, b\rangle$.

Za druhé, dokažme si Bolzanovu-Weierstrassovu větu: *Je-li X nekonečná omezená množina na reálné ose, pak má alespoň jeden hromadný bod* (tj. bod, v jehož každém okolí[17]) leží nekonečně mnoho bodů z X).

Nechť tedy množina X je nekonečná a celá leží v některém omezeném intervalu, $X \subset \langle a, b\rangle$. Nechť $\mathscr{S}$ je soustava všech intervalů $J \subset \langle a, b\rangle$, které obsahují jen konečný počet bodů z množiny X. Patrně $\mathscr{S}$ je intervalově aditivní. Nemůže však pokrývat interval $\langle a, b\rangle$, neboť pak by podle **F** bylo $\langle a, b\rangle \in \mathscr{S}$ ač $\langle a, b\rangle$ obsahuje celou nekonečnou množinu X. Tedy $\mathscr{S}$ nepokrývá $\langle a, b\rangle$. To však znamená, že buď některý bod $x \in (a, b)$ není vnitřním bodem žádného intervalu ze soustavy $\mathscr{S}$, tj. že každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů z X, což je právě definice hromadného bodu; anebo podobné důsledky o krajních bodech a, b intervalu $\langle a, b\rangle$. Cbd.

Konečně ukažme, že skutečně tvrzení **C** a **F** jsou ekvivalentní.

1. Předpokládejme, že platí **C**, a dokazujme **F**. Nechť tedy soustava intervalů $\mathscr{S}$ splňuje předpoklady z **F**. Označme V množinu všech čísel x takových, že

buď $x < a$,

nebo $x \geqq a$, $\langle a, \min(x, b)\rangle \in \mathscr{S}$.

Snadno se pak ověří, že V splňuje předpoklady v **C**. Tedy V obsahuje všechna reálná čísla, a zejména obsahuje $b + 1$; podle konstrukce množiny V, je $\mathscr{S} \ni \langle a, \min(b + 1, b)\rangle = \langle a, b\rangle$; tj. platí **F**.

2. Důkaz druhé části tvrzení je trochu delší. Nechť tedy platí tvrzení **F**, a nechť množina V splňuje předpoklady v **C**. Označme nejprve V_0 množinu všech čísel x takových, že $t \in V$ pro všechna $t < x$ (všimněte si, že v **C** se v podstatě mluví o V_0, i když formulace užívá V). Podle předpokladu (a) v **C**, existuje číslo $a \in V_0$. Zvolme ještě $b > a$ zcela libovolně.

[17]) okolím bodu x rozumíme kterýkoli otevřený interval obsahující x.

Nyní, definujme soustavu $\mathscr{S}$ takto: nechť $(\alpha, \beta) \in \mathscr{S}$ právě když

$$\text{buď} \quad \alpha \bar{\in} V_0 \quad \text{nebo} \quad \beta \in V_0 .$$

Pak, podle předpokladu (b) v **C**, je $\langle a, a + \varepsilon \rangle \in \mathscr{S}$ pro vhodné $\varepsilon > 0$ (neboť $a + \varepsilon \in V_0$). Pro každé $x > a$ je buď $x \in V_0$, načež z podobných důvodů je $x + \varepsilon \in V_0$, $\langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle \in V_0$; anebo $x \bar{\in} V_0$, podle definice V_0 je tedy $t \bar{\in} V$ pro některé $t < x$, načež též $x - \varepsilon \in V_0$ pro $t < x - \varepsilon < x$, a pak $\langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle \in \mathscr{S}$. Tedy $\mathscr{S}$ pokrývá $\langle a, b \rangle$ (pro libovolné $b > a$). Dále, $\mathscr{S}$ je intervalově aditivní: je-li např.

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathscr{S} , \quad \langle \gamma, \delta \rangle \in \mathscr{S} ,$$
$$\alpha \leqq \gamma < \beta \leqq \delta ,$$

(tj. mají-li tyto intervaly společné vnitřní body), pak nutně jejich sjednocení $\langle \alpha, \delta \rangle \in \mathscr{S}$; neboť v opačném případě by bylo — podle konstrukce soustavy $\mathscr{S}$ — $\alpha \in V_0$ i $\delta \bar{\in} V_0$, tedy $\beta \in V_0$ a $\gamma \bar{\in} V_0$ (neboť dané intervaly jsou v $\mathscr{S}$), ve sporu s $\gamma < \beta$.

Jsou tedy splněny předpoklady v **F**. Tudíž $\langle a, b \rangle \in \mathscr{S}$. Protože však $a \in V_0$, musí být $b \in V_0$, a to pro libovolné $b > a$. Tedy každé reálné $t \in V$ ($t < b$ pro vhodné $b > a$; $b \in V_0$, tedy $t \in V$). Tím je dokázáno **C**.

Závěr

Známe tři věty indukčního typu **A**, **B**, **C**. Společný rys snad lze popsat takto: jestliže množinu předepsaného typu zvětšujeme předepsaným způsobem, pak vyčerpáme celou danou množinu.

Všechny tyto věty mají základní význam. Přitom **A** je speciální případ **B**; tato dvě tvrzení jsou celkem obecná. **C** vyjadřuje jednu speciální vlastnost osy reálných čísel (axiom spojitosti, lokální kompaktnost). Často je pohodlnější užívat místo nich jiných ekvivalentních formulací; zejména Zornova lemmatu a Fordovy věty.

Literatura:

[1] *Encyklopedija elementarnoj matěmatiki I — Arifmetika,* Gostěchizdat, Moskva 1951.

[2] P. S. Alexandrov, *Úvod do obecné teorie množin a funkcí,* NČSAV, Praha 1954 (překlad z ruského *Vvedenije v obščuju těoriju množestv i funkcij.* Gostěchizdat, Moskva 1948).

[3] G. Birkhoff, *Těorija struktur,* IIL, Moskva 1952 (překlad z anglického *Lattice Theory,* New York, 1948, 2. vyd.).

[4] D. W. Hall, G. L. Spencer, *Elementar Topology,* New York, 1955.

[5] A. Ja. Chinčin, *Nejjednodušší lineární kontinuum,* Čas. pěst. mat. 76 (1951), č. 3, str. 158 (překlad z Uspěchi mat. nauk, IV, 2(30) (1949), str. 180).

[6] F. Nožička, *Věta o suprému a věty s ní ekvivalentní,* Čas. pěst. mat. 76 (1951), č. 2., str. 121.

[7] J. Fábera, *Poznámka k vzájemné souvislosti základních vět matematické analysy,* Sb. prací fak. elektrot. inž. za rok 1955, str. 9.

[8] L. R. Ford, *Interval additive propositions,* Bull. Amer. Math. Soc., 62 (1956), str. 158.