Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Milan Pišl

Logaritmická spirála

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 4, 416--423

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137020

rozklady bezcenné (v protikladu k v § 1 zmíněném vyjádření kořenů algebraických rovnic pátého a šestého stupně superposicí funkcí dvou proměnných). Otázka vhodného vyjádření např. kořenů algebraické rovnice sedmého stupně zůstává otevřená.

Není rovněž jasné do jaké míry se dá rozklad (6) ještě zlepšit. Není např. řešena otázka jednoznačnosti funkce h. Ani otázka representace hladkých funkcí superposicemi není řešena. V tomto směru zůstávají nejlepšími výsledky záporná tvrzení A. G. Vituškina. Odvození kladných tvrzení by bylo velmi zajímavé.

Zmíníme se ještě o jednom speciálním, poněkud jinak zaměřeném, výsledku A. N. Kolmogorova. Jak A. N. Kolmogorov dokázal, existuje ke každé funkci dvou proměnných definované na čtverci mezi všemi součty $\varphi(x) + \psi(y)$ takový, který danou funkci nejlépe aproximuje. Dá se také dokázat, že ke každé (byť všude nespojité) omezené reálné funkci f, definované na kompaktní množině, a k libovolné na téže množině definované spojité funkci g existuje spojitá funkce φ taková, že funkce $\varphi(g)$ se minimálně liší od funkce f. Speciálně, ke každé omezené funkci $f(x)$, existuje spojitá funkce $\varphi(x)$, která ji (ve smyslu stejnoměrné konvergence) nejlépe aproximuje.

Přeložil Jiří Fábera

LOGARITMICKÁ SPIRÁLA

Milan Pišl, *katedra mat. a deskr. geom. el. fak. ČVUT* v Praze

Logaritmická spirála je definována jako čára, která protíná svazek přímek pod konstantním úhlem ϑ. Zvolíme-li střed svazku v počátku, pak tato podmínka zní

$$\tau - \varphi = \vartheta\,, \tag{1}$$

kde φ je směrový úhel radiusvektoru průběžného bodu a τ tečnový úhel (viz obr. 1).

Vztah (1) definující logaritmickou spirálu je ekvivalentní se vztahem

$$e^{j(\tau-\varphi)} = \varepsilon\,, \quad \varepsilon = e^{j\vartheta}\,, \quad \vartheta = \text{konst}\,. \tag{2}$$

a použijeme-li pro rovnici logaritmické spirály komplexního vyjádření

$$z = f(t)$$

($f(t)$ je komplexní funkce reálného argumentu t),
můžeme rovnici (2) psát ve tvaru

$$\frac{f'(t)}{|f'(t)|} \cdot \frac{|f(t)|}{f(t)} = \varepsilon\,, \quad f'(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{3}$$

Označíme-li $\frac{|f'(t)|}{|f(t)|} = \lambda(t)$ reálnou funkci parametru t, dostáváme pro komplexní funkci $f(t)$, definující logaritmickou spirálu, diferenciální rovnici

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \varepsilon\lambda(t)$$

kde $\lambda(t)$ je libovolná reálná funkce parametru t, $\varepsilon = e^{j\vartheta}$, ϑ reálná konstanta.

Integrací rovnice (4) získáme pro hledanou funkci vyjádření

$$f(t) = a e^{\varepsilon \Lambda(t)} , \tag{5}$$

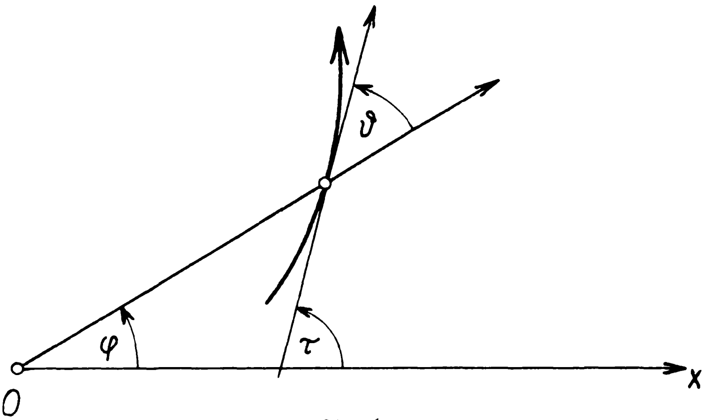
kde $\Lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(x)\, dx$, $a = f(t_0) \neq 0$ je arbitrární komplexní konstanta.

Proveďme rozbor rovnice (5).

1. Nechť $\vartheta = k\pi$ $(k = 0,1)$, pak platí

$$z = f(t) = a e^{\pm \Lambda(t)} = aT \; ; \quad (T \text{ reál. parametr}),$$

což jest rovnice přímky jdoucí počátkem a bodem $z = a$.



Obr. 1.

2. Nechť $\vartheta = k \dfrac{\pi}{2}$ $(k = -1,1)$, pak platí

$$z = a e^{\pm j \Lambda(t)}$$

a rovnice sdružená

$$\bar{z} = \bar{a} e^{\pm j \Lambda(t)} ,$$

odkud dostáváme (vynásobením)

$$z \, . \, \bar{z} = a \, . \, \bar{a} ,$$

což je rovnice kružnice se středem v počátku a procházející bodem $z = a$.

3. Nechť tedy $\vartheta \neq k \dfrac{\pi}{2}$ $(k = -1, 0, 1, 2)$. Pak $z = f(t) = a e^{\varepsilon \Lambda(t)}$ (6)

je rovnicí logaritmické spirály, procházející bodem $z = a$ (pro $t = t_0$) a mající pól v počátku, při čemž reálná funkce

$$\Lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(x)\, dx$$

má vliv jen na parametrisaci.

Důkaz provedeme tak, že nalezneme přirozenou rovnici křivky, určenou rovnicí (6). Nejprve stanovíme oblouk s. Pro jeho diferenciál platí

$$\mathrm{d}s^2 = f' \,.\, \bar{f}' \,\mathrm{d}t^2 = f\bar{f}\varepsilon\bar{\varepsilon}\lambda^2(t)\,\mathrm{d}t^2 = a \,.\, \bar{a} \,.\, \mathrm{e}^{(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\Lambda(t)}\lambda^2(t)\,\mathrm{d}t = a \,.\, \bar{a} \,.\, \mathrm{e}^{2\cos\vartheta\Lambda(t)} \,.\, \lambda^2(t)\,\mathrm{d}t^2 \,,$$

a dále

$$\mathrm{d}s = |a|\,\mathrm{e}^{\cos\vartheta\Lambda(t)} \,.\, \lambda(t)\,\mathrm{d}t \,. \tag{7}$$

Integrací rovnice (7) získáme pro oblouk s vyjádření

$$s(t) = \frac{|a|}{\cos\vartheta}\,\mathrm{e}^{\cos\vartheta\,.\,\Lambda(t)} = s(t_0)\mathrm{e}^{\cos\vartheta\,.\,\Lambda(t)} \tag{8}$$

Diferencováním rovnice (1) vychází $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\varphi$, a protože platí $\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} = \dfrac{f}{\bar{f}}$, dostáváme pro diferenciál $\mathrm{d}\varphi$ vztah

$$2\mathrm{j}\,\mathrm{d}\varphi\,\frac{f}{\bar{f}} = \frac{f'\bar{f} - f\,.\,\bar{f}'}{\bar{f}^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

odkud užitím rovnice (6) získáme

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\varphi = \sin\vartheta \,.\, \lambda(t)\,\mathrm{d}t \,. \tag{9}$$

Pro poloměr křivosti r vychází ze vztahů (7) a (9)

$$r = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = \frac{|a|\,\mathrm{e}^{\cos\vartheta\,.\,\Lambda(t)}\lambda(t)\,\mathrm{d}t}{\sin\vartheta\,.\,\lambda(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{|a|}{\sin\vartheta}\,\mathrm{e}^{\cos\vartheta\Lambda(t)} \,.$$

Použijeme-li ještě rovnice (8), můžeme vyloučit reál. funkci $\Lambda(t)$, čímž získáme

$$r = \frac{|a|}{\sin\vartheta}\,\frac{\cos\vartheta}{|a|}\,s = \operatorname{cotg}\vartheta \,.\, s \,. \tag{10}$$

Poznámka:

Protože reálná funkce $\Lambda(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(x)\,\mathrm{d}x$ má vliv jen na parametrickou stupnici, můžeme rovnici každé spirály s pólem v počátku psát ve tvaru

$$z = a\mathrm{e}^{\mathrm{b}t}\,, \tag{6*}$$

kde a, b jsou arbitrální komplexní konstanty, a obráceně každá rovnice tvaru (6*) představuje logaritmickou spirálu procházející bodem $z = a$ o parametru $t = 0$ a protínající pod konstantním úhlem $\vartheta = \arg b$ svazek přímek se středem v pólu křivky, který splývá s počátkem.

Z rovnice (6) přejdeme též snadno k polární rovnici, neboť ze vztahů $f(t) = a\mathrm{e}^{\varepsilon\Lambda(t)}$, $\bar{f}(t) = \bar{a}\mathrm{e}^{\bar{\varepsilon}\Lambda(t)}$ vychází (násobením a dělením) $\varrho^2 = f(t)\,.\,\bar{f}(t) = a\,.\,\bar{a}\,.\,\mathrm{e}^{2\cos\vartheta\,.\,\Lambda(t)}$, $\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} = \dfrac{f(t)}{\bar{f}(t)} = \dfrac{a}{\bar{a}}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\sin\vartheta\,.\,\Lambda(t)}$, a dále odmocněním

$$\varrho = |f(t)| = |a|\,\mathrm{e}^{\cos\vartheta\,.\,\Lambda(t)}\,, \quad \varphi = \arg f(t) = \arg a + \sin\vartheta\,.\,\Lambda(t)\,. \tag{11) (12}$$

Eliminací $\Lambda(t)$ z rovnic (11), (12) dostáváme polární rovnici logaritmické spirály ve tvaru

$$\varrho = \varrho_0 e^{(\varphi-\varphi_0)\operatorname{cotg}\vartheta}, \tag{13}$$

kde $\varrho_0 = |a| = |f(t_0)|$, $\varphi_0 = \arg a = \arg f(t_0)$

jsou polární souřadnice bodu spirály.

V dalším uvedeme některé vlastnosti logaritmické spirály.

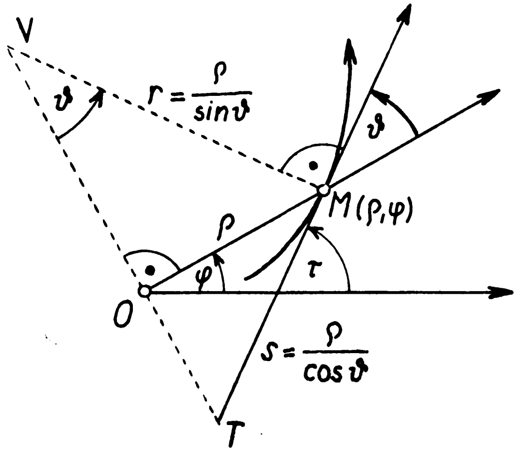
1. Eliminací $\Lambda(t)$ ze vzorců (8), (11) dostáváme pro délku oblouku měřeného od pólu (obr. 2)

$$s = \frac{\varrho}{\cos\vartheta}. \tag{14}$$

2. Užitím vztahu (14) vychází ze vzorce (10) pro poloměr křivosti (obr. 2)

$$r = \frac{\varrho}{\sin\vartheta}. \tag{15}$$

Konstrukce je patrná z obrázku, odkud též čteme: Polární normála $\overline{MN}$ je rovna poloměru křivosti a polární tangenta $\overline{MT}$ je rovna oblouku měřenému od pólu spirály.



Obr. 2.

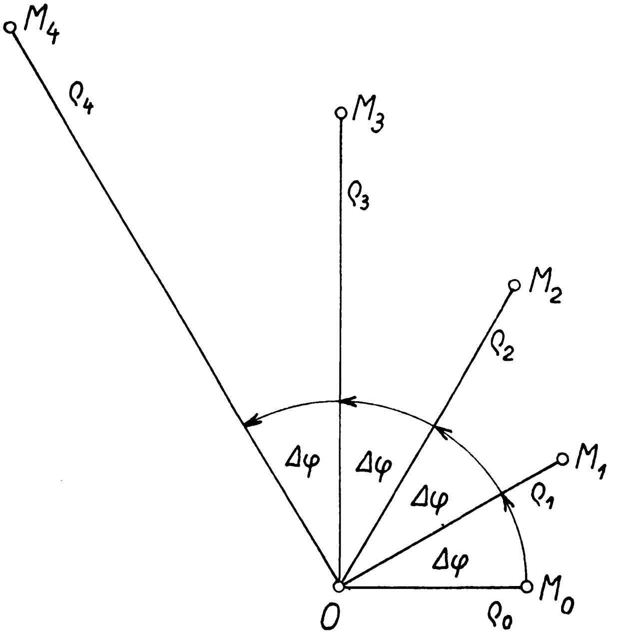
3. Probíhá-li argument φ aritmetickou posloupnost s diferencí $\Delta\varphi$, pak pro podíl q modulů vychází z polární rovnice (13)

$$q = \frac{\varrho_0 e^{(\varphi+\Delta\varphi-\varphi_0)\operatorname{cotg}\vartheta}}{\varrho_0 e^{(\varphi-\varphi_0)\operatorname{cotg}\vartheta}} = e^{\Delta\varphi\,.\,\operatorname{cotg}\vartheta}, \tag{14}$$

tj. moduly probíhají geometrickou posloupnost s kvocientem q (obr. 3).

Konstrukce:

Dány body M_0, M_4; $\varrho_2 = \sqrt{\varrho_0 \cdot \varrho_4}$, $\varrho_1 = \sqrt{\varrho_2 \cdot \varrho_0}$, $\varrho_3 = \sqrt{\varrho_4 \cdot \varrho_2}$.



Obr. 3.

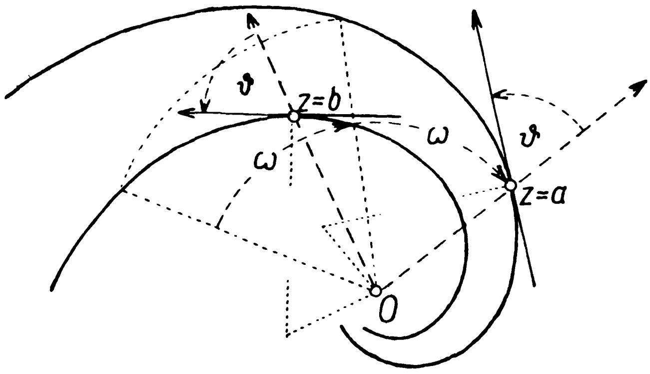
4. Každou stejnolehlost podle pólu s poměrem e^k lze nahradit otočením okolo pólu o úhel $\omega = 2n\pi - k \operatorname{tg}\vartheta$

(n celé takové, že platí $-\pi < \omega \leqq \pi$) a obráceně každé otočení kolem pólu o úhel ω lze nahradit stejnolehlostí se středem v pólu a s poměrem $e^k = e^{-\omega \operatorname{cotg} \vartheta}$.

Důkaz:

Buďtež $z = ae^{\varepsilon t}$, $\varepsilon = e^{j\vartheta}$ rovnice dané logaritmické spirály. Křivka s ní stejnolehlá vzhledem k počátku s poměrem e^k má rovnici

$$z_k = e^k z = ae^k \cdot e^{\varepsilon t} \tag{15}$$



Obr. 4.

Otočíme-li však původní křivku o úhel $\omega = 2n\pi - k \operatorname{tg} \varphi$, dostaneme křivku o rovnici

$$z_\omega = e^{j\omega z} = ae^{\cos \vartheta t + j \sin \vartheta \left(t - \frac{k}{\cos \vartheta}\right)} =$$

$$= ae^k \cdot e^{\varepsilon T}; \quad T = t - \frac{k}{\cos \vartheta}, \tag{16}$$

čímž je důkaz proveden, neboť rovnice (15) a (16) representují dvě různé parametrisace téže křivky (viz rovnici (6)).

Důsledek vlastnosti sub 4:

Logaritmická spirála o rovnici $z_1 = ae^{\varepsilon t}$ vznikne z logaritmické spirály $z_2 = be^{\varepsilon t}$ stejnolehlostí s poměrem $e^k = \left|\frac{b}{a}\right|$ a otočením o úhel rovný $\arg \frac{b}{a}$. Obě tyto transformace lze nahradit jediným otočením o úhel

$$\omega = \arg b - \arg a - \operatorname{tg} \vartheta \cdot \lg \left|\frac{b}{a}\right| + 2n\pi \quad (n \text{ celé takové že } -\pi < \omega \leqq \pi). \tag{17}$$

Jinak řečeno:

Změna komplexní konstanty a v rovnici (6) resp. (6*) značí geometricky rotaci dané spirály kolem jejího pólu (obr. 4).

Poznámka:

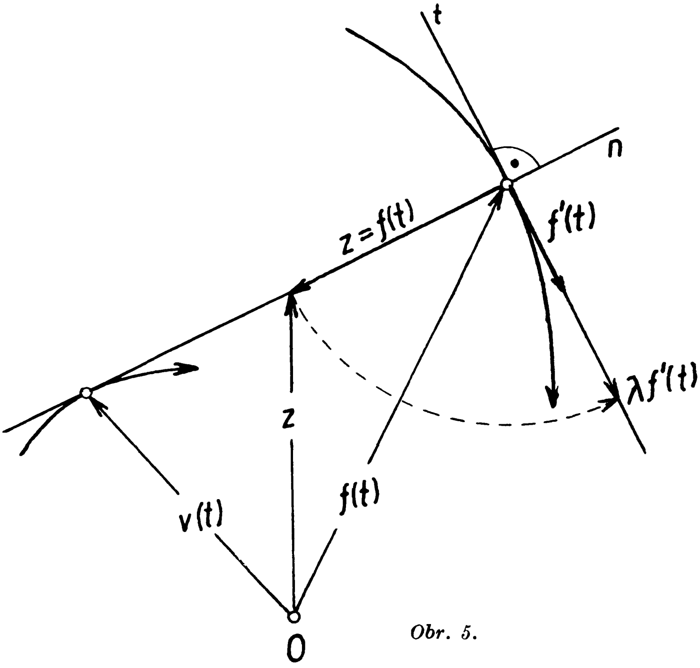
Zvolíme-li za poměr stejnolehlosti hodnotu $e^{m\Pi \operatorname{cotg} \vartheta}$, pak výsledná křivka je s původní totožná, neboť platí

$$z_k = e^{m\pi \operatorname{cotg} \vartheta} z = a e^{\cos\vartheta\left(\frac{m\pi}{\sin\vartheta} + t\right) + \mathrm{j}\sin\vartheta \, . \, t} =$$

$$= a e^{\varepsilon T}; \quad T = t + \frac{m\Pi}{\sin\vartheta} \, .$$

5. Další vlastnosti logaritmické spirály souvisí s její evolutou.

Evolutou dané křivky rozumíme obálku (pokud existuje) jejích normál (obr. 5).



Obr. 5.

Její rovnici odvodíme takto:

Je-li $z = f(t)$ čára, jejíž evolutu počítáme, pak pro normálu v jejím běžném bodě $f(t)$ platí rovnice

$$z - f(t) = \mathrm{j}\lambda f'(t) \, , \quad \bar{z} - \bar{f}(t) = - \mathrm{j}\lambda \bar{f}'(t) \, .$$

Odtud eliminací reálné veličiny λ vychází

$$\bar{f}'(t)(z - f(t)) + f'(t)(\bar{z} - \bar{f}(t)) = 0 \, , \tag{18}$$

což je jednoparametrická soustava normál čáry $z = f(t)$ (parametrem v soustavě (18) je opět běžný parametr původní křivky). Derivováním (18) podle parametru t dostaneme

$$\bar{f}''(t) \, . \, (z - f(t)) + f''(t) \, . \, (\bar{z} - \bar{f}'(t)) = 2f'(t)\bar{f}'(t) \, . \tag{19}$$

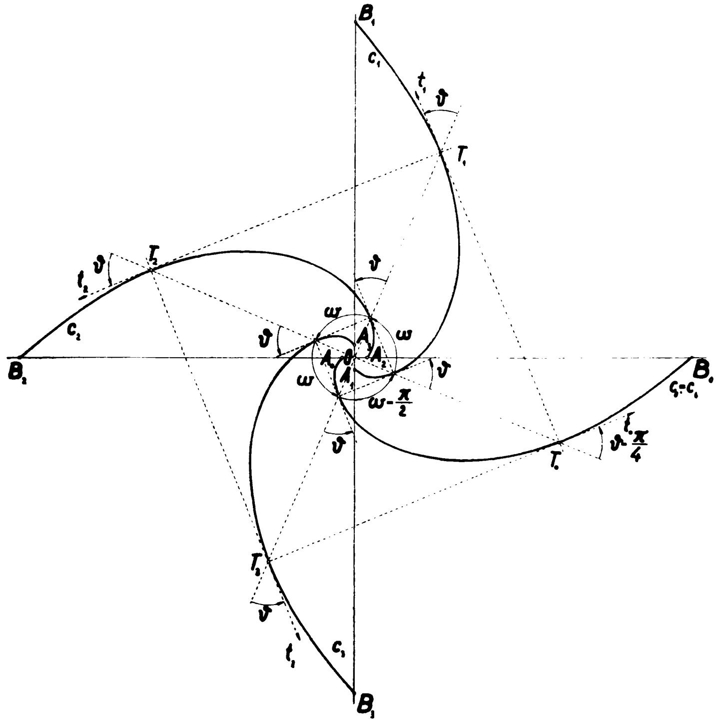
Běžný bod $v(t)$ hledané evoluty dostaneme jako společné řešení soustavy rovnic (18) a (19), tj.

$$\bar{f}'(v - f) + f'(\bar{v} - \bar{f}) = 0 ,$$

$$\bar{f}''(v - f) + f''(\bar{v} - \bar{f}) = 2f'\bar{f}' ,$$

odkud eliminací $\bar{v}(t)$ získáme

$$v(t) = f(t) + \frac{2f'^2(t)\,\bar{f}'(t)}{f'(t)\,\bar{f}''(t) - \bar{f}'(t)\,f''(t)} . \tag{20}$$



Obr. 6.

Rovnice (20) je tedy parametrickým vyjádřením evoluty čáry $f(t)$. Zvolíme-li za původní křivku logaritmickou spirálu, bude pro její derivace platit

$$f'(t) = \varepsilon f(t) , \quad f''(t) = \varepsilon^2 f(t) ,$$

což dosazeno do vzorce (20) dává rovnici evoluty ve tvaru

$$z = f + \frac{2\varepsilon f}{\bar{\varepsilon} - \varepsilon} = - \frac{\varepsilon + \bar{\varepsilon}}{\varepsilon - \bar{\varepsilon}} f = \mathrm{j} \cotg \vartheta \, . f(t) , \tag{21}$$

z něhož je zřejmé, že evoluta vznikne z původní křivky stejnolehlostí s poměrem $|\operatorname{cotg} \vartheta|$ a otočením o arg (j cotg ϑ) $=$ (sign cotg ϑ) $\dfrac{\pi}{2}$, což podle (17) lze nahradit jediným otočením kolem pólu o úhel

$$\omega = (\operatorname{sign} \operatorname{cotg} \vartheta) \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \vartheta \lg |\operatorname{cotg} \vartheta| + 2n\pi .$$

Máme větu:

Evoluta logaritmické spirály je opět logaritmická spirála, vzniklá z původní otočením kolem společného pólu o úhel

$$\omega = (\operatorname{sign} \operatorname{cotg}) \vartheta) \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \vartheta \lg |\operatorname{cotg} \vartheta| + 2n\pi .$$

Na obrázku 6 je zvoleno $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$, takže $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ a křivka c_i je evolutou křivky c_{i-1} $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Nazveme-li evolutu evoluty druhou evolutou původní křivky, pak $\left(\text{pro } \vartheta = \dfrac{\pi}{4}\right)$ čtvrtá evoluta je opět původní křivka.