V. I. Arnol'd

O struktuře funkcí více proměnných

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 4, 399--416

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137021`

O STRUKTUŘE FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH*)

V. I. Arnold, Moskva

V nedávné době se někteří moskevští matematikové zabývali tímto problémem: kdy lze funkci n proměnných ($n > 1$) vyjádřit superposicí (tj. jako složenou funkci) funkcí o menším počtu proměnných. Těmto pracím je věnováno toto pojednání. První paragraf obsahuje definici složené funkce a zabývá se dále tzv. třináctým problémem Hilbertovým, jenž se právě týká superposice funkcí. V druhém paragrafu pojednáme o superposici hladkých funkcí. V třetím paragrafu vyložíme obsah některých prací, které, i když teprve nedávno vzniklé, mají dnes již jenom „historickou" cenu. Probírá se tu dále důležitá koncepce, založená na A. S. Kronrodem zavedeném pojmu „stromu komponent funkcí více proměnných", jejíž popularisace je velmi vhodná (ač souvislost s problematikou zde probíranou se ukázala být méně těsnou, než se původně předpokládalo). Čtenář, jehož zajímá toliko nejvýznačnější výsledek (který však z hlediska důkazu je velmi průhledný), týkající se vyjádření spojitých funkcí více proměnných superposicí o menším počtu proměnných, může vynechat čtení druhého a třetího paragrafu a po úvodním paragrafu hned studovat paragraf čtvrtý. Části tištěné drobným tiskem obsahují materiál doplňující a jejich studium není nutné pro porozumění dalšího.

§ 1

Jedna z úloh ve známé znamenité sbírce úloh G. Pólya, G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* I, Berlin 1925[1]) začíná větou: „Existují vůbec funkce tří proměnných?" Této větě jest rozumět takto: Mějme tři funkce dvou proměnných: $u(x, y)$, $v(y, z)$, $w(u, v)$, a sestrojme složenou funkci $w[u(x, y), v(y, z)]$; získáme tak funkci tří proměnných x, y, z. Dosazujíce tedy za argumenty funkce dvou proměnných w hodnoty funkcí dvou proměnných u a v, dostaneme funkci tří proměnných (stejným způsobem získáme i funkci čtyř proměnných, např. $w[u(x, y), v(z, t)]$), kterou nazýváme jednoduchou superposicí funkcí u, v a w. Vlastnosti této funkce jsou zřejmě určeny vlastnostmi funkcí u, v, w. Pólya a Szegö se tedy ve shora uvedené úloze (která však v citované jejich sbírce není formulována v celé šíři) táží, lze-li každou funkci tří proměnných získat podobnou, případně složitější superposicí funkcí dvou proměnných. Jinými slovy: „existují-li skutečné funkce tří proměnných", tj. neredukovatelné na funkce dvou proměnných.

Uveďme hned, že odpověď na tuto otázku je záporná.[2])

O tom se přesvědčíme např. touto snadnou úvahou:

Ježto množina bodů roviny (čili množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$ reálných čísel) má stejnou mohutnost jako množina všech bodů přímky (čili množina všech reálných čísel u) existuje, sice nespojitá, funkce dvou proměnných $u = \varphi(x, y)$, která definuje vzájemné jednoznačné zobrazení roviny na přímku. Je-li nyní $F(x, y, z)$ libovolná funkce tří proměnných, definujme funkci dvou proměnných $\psi(u, z)$ rovnicí

$$\psi(\varphi(x, y), z) = F(x, y, z) ;$$

*) В. И. Арнольд, *О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиций функций меньшего числа переменных*, Matěmatičeskoje prosveščenije, 3 (1958).

[1]) Jde o úlohu 119 a 119a druhé kapitoly. Viz ruský překlad této knihy: Г. Полиа и Т. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, ч. I, Moskva 1956.

[2]) Srov. řešení úlohy 119 v citované sbírce.

to je možné, neboť ke každému reálnému číslu u existuje právě jedna dvojice $[x, y]$ taková, že $u = \varphi(x, y)$. Vidíme tedy, že funkce F je superposicí funkcí dvou proměnných.

Zajímavá je tedy především otázka, lze-li všechny spojité funkce tří proměnných vyjádřit superposicí spojitých funkcí dvou proměnných.

Některé jednoduché funkce tří proměnných snadno vyjádříme superposicí spojitých funkcí dvou proměnných. Na příklad u funkce

$$F(x, y, z) = xy + yz$$

vidíme hned, že ji můžeme vyjádřit ve tvaru

$$F(x, y, z) = w[u(x, y),\ v(y, z)]\,,$$

kde

$$w(u, v) = u + v, \quad u(x, y) = xy, \quad v(y, z) = yz\,.$$

U poněkud složitější funkce

$$F(x, y, z) = xy + yz + zx$$

nevidíme její vyjádření jednoduchou superposicí funkcemi dvou proměnných;[3]) na první pohled však poznáme, že ji lze vyjádřit dvojnásobnou (tj. opakovanou) superposicí dvou proměnných:

$$F(x, y, z) = w\{u[p(x, y),\ q(y, z)],\ v[r(y, z),\ s(z, x)]\}\,,$$

kde

$$w(u, v) = u + v$$

a

$$u(p, q) = p + q, \quad p(x, y) = xy, \quad q(y, z) = yz,$$
$$v(r, s) = s, \quad s(z, x) = zx\,.$$

Ježto každý polynom více proměnných vznikne ze svých argumentů sčítáním a násobením, získáme jej několikanásobnou superposicí těchto spojitých funkcí jedné, resp. dvou proměnných:

$$\varphi(x, y) = x + y, \quad \psi(x, y) = xy, \quad f(x) = x + a, \quad g(x) = ax\,.$$

Takový polynom tedy získáme dosazováním za argumenty funkcí výrazů, které samy již byly takovýmto způsobem sestrojeny. Obdobně získáme každou racionální funkci více proměnných několikanásobnou superposicí těchto šesti spojitých funkcí jedné resp. dvou proměnných:

$$\varphi(x, y) = x + y, \quad \psi(x, y) = xy, \quad \chi(x, y) = \frac{x}{y}\,,$$

$$f(x) = x + a, \quad g(x) = ax, \quad h(x) = \frac{a}{x}\,.$$

Jestliže délka x nějaké úsečky je funkcí délek $a, b, c, \ldots$ známých úseček, lze z nich sestrojit úsečku délky x pomocí pravítka a kružítka právě tehdy, je-li x homogenní funkcí dimense jedna a superposicí uvedených funkcí a funkce $y = \sqrt{x}$. Tak zvané elementární funkce získáme superposicí výše uvedených funkcí a funkcí $\sqrt[n]{x}$, e^x, $\ln x$, $\sin x$ atd.

---

[3]) Viz citovanou sbírku.

Jednoduchým příkladem neelementárních algebraických funkcí jsou kořeny algebraických rovnic stupně alespoň pátého; argumenty těchto funkcí jsou koeficienty příslušné rovnice. Kořeny algebraických rovnic prvého, druhého, třetího a čtvrtého stupně jsou, jak známo, elementárními funkcemi koeficientů rovnice. Dají se sestrojit superposicí funkcí dvou proměnných $p(x, y) = x + y$, $q(x, y) = x - y$, $r(x, y) = xy$, $s(x, y) = x/y$ s funkcemi jedné proměnné $f(x) = \sqrt{x}$, $q(x) = \sqrt[3]{x}$ (u rovnice druhého stupně vystačíme s funkcí $\sqrt{x}$). Abel ukázal, že kořeny algebraické rovnice pátého a vyšších stupňů obecně takto vyjádřit nelze. Kořeny algebraických rovnic pátého a šestého stupně dají se však vyjádřit z koeficientů rovnice superposicí jistých analytických funkcí dvou proměnných. Tato vyjádření se dobře hodí k praktickému výpočtu kořenů popř. k nomografickému řešení těchto rovnic.

Pokusy získat kořeny algebraické rovnice sedmého stupně superposicí podobných funkcí dvou proměnných ztroskotaly. Algebraickými úpravami lze každou algebraickou rovnici sedmého stupně

$$x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7 = 0$$

uvést na tvar

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 .$$

Při tom jsou koeficienty a, b, c elementárními (algebraickými) funkcemi koeficientů $a_1, a_2, \ldots, a_7$ výchozí rovnice; koeficienty a, b, c dají se tedy získat superposicí jednoduchých funkcí dvou proměnných. Problém, zda lze kořeny al gebraické rovnice sedmého stupně získat z koeficientů rovnice superposicí jistých analytických funkcí dvou proměnných, můžeme formulovat též takto: je možné funkci tří proměnných a, b, c, vyjadřující kořeny transformované rovnice, vyjádřit superposicí jistých analytických funkcí dvou proměnných?

Dosud není známo, zda pro tuto analytickou (jak se snadno dokáže) funkci takové vyjádření existuje. Hilbertovi se podařilo dokázat, že existují analytické funkce tří proměnných, jež nelze získat superposicí analytických funkcí dvou proměnných.

Hilbertovo tvrzení souvisí s tímto faktem: Lze-li danou analytickou funkci tří proměnných vyjádřit superposicí analytických funkcí dvou proměnných, budou parciální derivace této funkce tří proměnných vázány s parciálními derivacemi funkcí dvou proměnných, jichž je daná funkce superposicí, analytickým vztahem. Kdyby tedy bylo možné každou analytickou funkci tří proměnných získat superposicí analytických funkcí dvou proměnných, dal by se prostor koeficientů rozvojů funkcí tří proměnných analyticky zobrazit na prostor koeficientů v rozvojích analytických funkcí dvou proměnných. To není možné, neboť tyto prostory jsou dimensionálně různé (omezíme-li na členy až do jistého stupně, tj. na parciální derivace až do jistého řádu).

V roce 1900 předložil na matematickém kongresu v Paříži vynikající německý matematik D. Hilbert svých proslulých 23 problémů.[4]) Třináctý z těchto „Matematických problémů" formuloval Hilbert takto:

Je možné kořeny rovnice

$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$$

vyjádřit superposicí vhodných spojitých funkcí dvou proměnných?

---

[4]) D. Hilbert, *Mathematische Probleme*; Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3, 1935, No. 17.

Hilbert předpokládal zápornou odpověď na tuto otázku. Tím by byl řešen zároveň obecnější problém, totiž zda lze všechny spojité funkce tří proměnných vyjádřit superposicí spojitých funkcí dvou proměnných.

§ 2

První výsledky týkající se třináctého Hilbertova problému byly odvozeny za předpokladu speciální superposice, např. jednoduché superposice. Všechny potvrzovaly Hilbertův předpoklad.[5]) V tomto ohledu dosáhl nejlepšího výsledku A. G. Vituškin tím, že sestrojil polynom, který společně se všemi od něho se málo lišícími funkcemi (ve smyslu stejnoměrné konvergence) nelze vyjádřit jednoduchou superposicí spojitých funkcí dvou proměnných.

V dalších výsledcích se podrobují funkce používané pro superposici jistým podmínkám. Viděli jsme, že již Hilbert ukázal, že není každá analytická funkce tří proměnných superposicí analytických funkcích dvou proměnných. V tomto směru dosáhl důležitých výsledků A. G. Vituškin, který k tomu použil jím vytvořenou teorii vícerozměrných variací funkcí a množin. Ukázal, že žádnou l-krát spojitě diferencovatelnou funkci tří proměnných nelze získat superposicí $\left[\frac{2}{3}\, l\right]$[6]) spojitě diferencovatelných funkcí dvou proměnných, jejichž všechny derivace řádu $\left[\frac{2}{3}\, l\right]$ splňují Lipschitzovu podmínku.[7])[8])

V interpretaci A. N. Kolmogorova[9]) souvisí výsledky A. G. Vituškina s dimensemi příslušných prostorů funkcí. V roce 1932 dokázali L. S. Pontrjagin a L. G. Schnirelman, že dimensi kompaktního metrického prostoru (např. uzavřené krychle v euklidovském prostoru) lze definovat takto: Pokryjeme prostor množinami průměru menšího než $\varepsilon > 0$. Nejmenší možný počet $N(\varepsilon)$ těchto množin se bude se zmenšujícím se ε zvětšovat. Dá se dokázat, že $N(\varepsilon)$ roste jako $\frac{1}{\varepsilon^n}$, kde n značí dimensi prostoru. Dimensi n prostoru tedy udává číslo

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}\right].$$

---

[5]) Jednoduché příklady toho druhu najdeme již v citované sbírce; jiné příklady (A. Ja. Dubovického, R. A. Minlose) obsahuje kniha А. Г. Витушкин, *О многомерных вариациях*, Moskva 1955.

[6]) Symbol $[x]$ značí tzv. celou část čísla x, čímž se rozumí největší celé číslo, které není větší než x.

[7]) O funkci $f(x)$ jedné proměnné říkáme, že splňuje Lipschitzovu podmínku, existuje-li konstanta L tak, že pro každé dvě hodnoty x_1, x_2 z definičního oboru platí

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2|\,.$$

O funkci více proměnných říkáme, že vyhovuje Lipschitzově podmínce, splňuje-li tuto podmínku vzhledem ke každé proměnné. (*Pozn. překl.*)

[8]) Odtud též plyne, že existuje taková analytická funkce tří proměnných, definovaná na krychli (trojrozměrné), splňující Lipschitzovu podmínku s konstantou 1, že společně se všemi do ní se dostatečně málo lišícími funkcemi není s-násobnou superposicí funkcí dvou proměnných, splňujících Lipschitzovu podmínku s konstantou L_1, kde s a L_1 jsou předem daná čísla. Dále z tohoto výsledku vyplývá, že existuje funkce, mající derivace všech řádů a splňující Lipschitzovu podmínku s konstantou 1, jež není superposicí funkcí dvou proměnných, vyhovujících Lipschitzově podmínce, Sr. Vituškinovu knížku citovanou v pozn.[5]).

[9]) А. Н. Колмогоров, *Оценкн минимального числа элементов ε- сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представлении функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных,* UMN, sv. 10, č. 1 (63).

V případě nekonečně dimensionálních prostorů je toto číslo rovno $+\infty$. V řadě takových případů však číslo $N(\varepsilon)$ roste jako funkce $1/\varepsilon^{\varepsilon^k}$, kde k je konstanta, která se někdy nazývá „dimensí nekonečně dimensionálního prostoru". U nekonečně dimensionálních prostorů tedy přebírá úlohu dimense číslo[10])

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{\log \log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right].$$

Uvažujme prostor všech funkcí $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných, definovaných na n-rozměrné krychli, majících parciální derivace až do řádu l podle každé proměnné, při čemž parciální derivace řádu l splňují Hölderovu podmínku stupně α.[11])

Dimense tohoto prostoru vyjde $\frac{n}{l + \alpha}$. Odtud plyne, že množina všech l-krát diferencovatelných funkcí tří proměnných je v jistém smyslu „obsáhlejší" než množina $\left[\frac{2}{3} l\right]$-krát diferencovatelných funkcí dvou proměnných, splňujících Lipschitzovu podmínku (což je Hölderova podmínka stupně 1); z toho se dá usoudit, že jejich superposicemi nevyčerpáme všechny uvedené funkce tří proměnných.

§ 3

V oboru všech spojitých funkcí se ukázala Hilbertova hypothesa nesprávnou.

Na jaře 1956 se podařilo A. N. Kolmogorovi dokázat, že každá spojitá funkce n proměnných, definovaná na n-rozměrné krychli, kde $n \geqq 4$, je superposicí spojitých funkcí tří proměnných.[12]) Stěžejním prostředkem v této konstrukci je pojem jednorozměrného stromu komponent hladin funkce, který zavedl A. S. Kronrod.[13])

Hladinou funkce se rozumí množina všech bodů definičního oboru, v nichž nabývá funkce stejné hodnoty. Vyjadřují-li např. funkční hodnoty funkce definované na části zemského povrchu nadmořskou výšku příslušného místa, bude hladinou souhrn všech míst stejné nadmořské výšky, čili tzv. vrstevnice.

---

[10]) Místo čísla $N(\varepsilon)$, udávajícího minimální počet množin průměru ε, pokrývajících (kompaktní) prostor, je také možno uvažovat číslo $M(\varepsilon)$, udávající nejmenší možný počet bodů ε-sítě, čili $M(\varepsilon)$ je nejmenší možný počet takových bodů, že vzdálenost libovolného bodu prostoru je od alespoň jednoho z těchto bodů menší než ε. Stejně by se také dalo použít čísla $K(\varepsilon)$, udávajícího maximální počet takových bodů, že vzdálenost kterýchkoliv dvou z nich je větší než ε. Je zajímavé si všimnout, že k tomuto pojmu dimense prostorů funkcí dospěl téměř současně C. E. Shannon v práci *A mathematical theory of communication*, Urbana 1949, jejíž ruský překlad vyšel ve sborníku *Теория передачи электрических сигналов при наличии помех*, Moskva, IL, 1953, v němž je však příslušné místo z neznámých důvodů vynecháno, z úvah souvisících s „teorií informací": v prostoru předávaných zpráv je $k(\varepsilon)$ maximální počet „ε-různých signálů", tj. takových signálů, které budou správně přijaty, jestliže zkreslení při přenosu nepřesáhne ε.

[11]) Říkáme, že funkce $f(x)$ splňuje Hölderovu podmínku stupně α, existuje-li taková konstanta C, že pro každé dvě hodnoty x_1, x_2 z definičního oboru platí

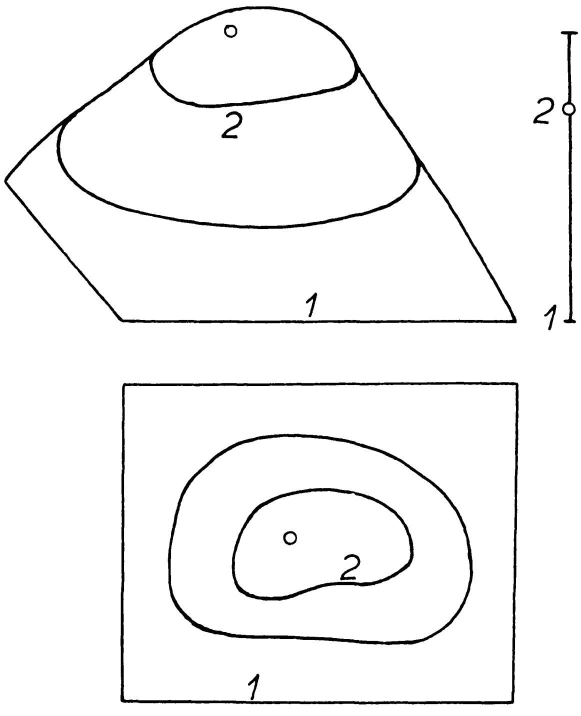
$$|f(x_1) - f(x_2)| < C\,|x_1 - x_2|^\alpha .$$

O funkci více proměnných říkáme, že vyhovuje Hölderově podmínce, splňuje-li tuto podmínku vzhledem ke každé proměnné.

[12]) А. Н. Колмогоров, *О представлений непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций менъшего числа переменных,* Doklady AN SSSR, sv. 108, č. 2, 1956.

[13]) А. С. Кронрод, *О функциях двух переменных,* UMN, sv. 5, č. 1, (35), 1950.

Na obr. 1 a 2 vidíme grafy jednoduchých funkcí dvou proměnných a „mapy" hladin těchto funkcí (čímž rozumíme rozklad definičního oboru na hladiny). Hladinu může tvořit jeden souvislý „kus" (např. všechny hladiny funkce na obr. 1, nebo hladina *1* na obr. 2) nebo několik oddělených souvislých „kusů", tzv. komponenty (např. hladinu *3* na obr. 2 tvoří dvě komponenty *3a* a *3b*). Pro studium struktury množiny komponent hladin spojitých funkcí navrhl Kronrod použít pojmu strom.



Obr. 1.

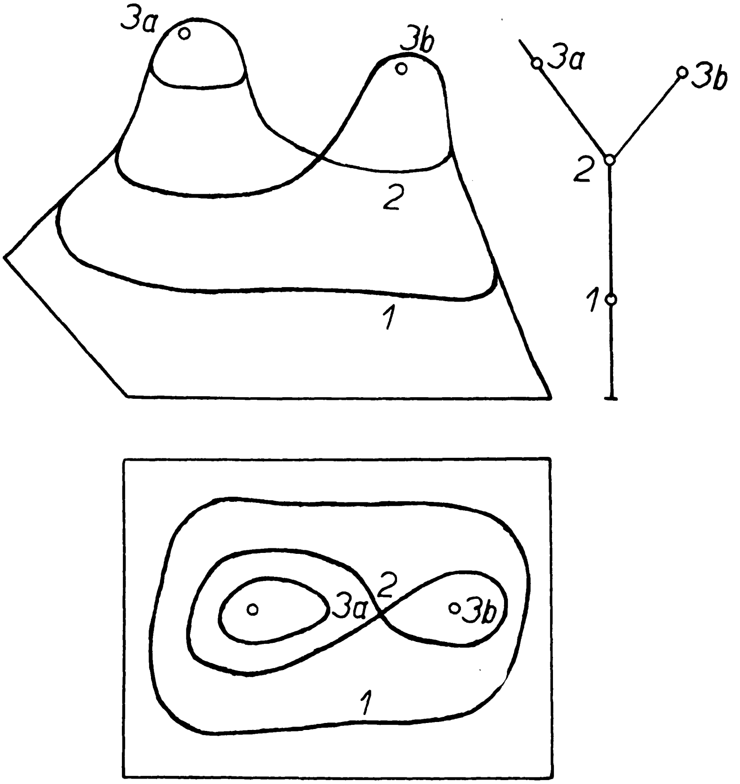
Stromem se nazývá v topologii každá křivka (tj. jednorozměrné lokálně souvislé kontinuum), neobsahující žádnou uzavřenou (homeomorfní s kružnicí) křivku. Představu o stromu si můžeme učinit takto. Ze základního kmene stromu „vyrůstají" v rozvětvovacích bodech „větve", (takových rozvětvovacích bodů může být více a z rozvětvovacího bodu může vyrůstat více větví), které se opět mohou znovu rozvětvovat atd. (obr. 3). Strom může být velmi složitou množinou. Známý rakouský (nyní americký) matematik Karl Menger však dokázal, že v rovině existuje tzv. universální strom, čímž se rozumí strom, jehož je každý strom částí (přesněji každý strom je homeomorfním obrazem části universálního stromu)[14].

A. S. Kronrod ukázal, že množinu komponent všech hladin spojité funkce více proměnných lze považovat za strom.

---

[14]) K. Menger, *Kurventheorie,* Berlin-Lepzig, 1932, Kap. X.

Např. množině komponent hladin funkce, jejíž graf vidíme na obr. 1, odpovídá úsečka (hladině *1* odpovídá bod *1* a hladině *2* bod *2* této úsečky). Množině komponent hladin poněkud složitější funkce, jejíž graf je znázorněn na obr. 2, odpovídá strom tvaru písmene *Y* (na tomto stromu odpovídá hladině *1* bod *1*, hladině *2* (tvaru osmičky) rozvětvovací bod *2* a dvěma komponentám *3a* a *3b* hladiny *3* body *3a*, *3b*).



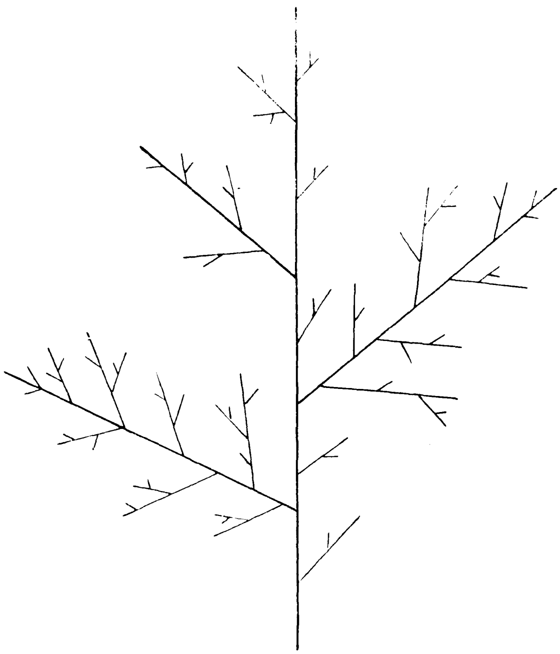
Obr. 2.

Přesně vzato jde o toto: v množině všech komponent hladin dané funkce se zavede přirozeným způsobem topologie, čímž dostaneme topologický prostor T. A. S. Kronrod tento prostor studoval a nazval jej jednorozměrným stromem dané funkce.

Informace o struktuře tohoto prostoru získáme touto úvahou. Předně je T spojitým obrazem n-rozměrné krychle, načež tedy musí být lokálně souvislým kontinuem. Za druhé při spojitém zobrazení d krychle na T je originálem každého bodu z T komponenta, čili uzavřená souvislá množina. Zobrazení mající tuto vlastnost se nazývají monotonními.[15]) Např. promítnutí čtverce do některé z jeho stran je monotonním zobrazením, zatímco vytvoření pláště válce „slepením" čtverce není monotonním zobrazením. (Zhruba bychom si pod monotonním zobrazením mohli představit deformaci bez „slepování".) Dá se dokázat, že monotonní zobrazení zachovává jednoduchou souvislost, takže monotonní obraz krychle je jednoduše souvislý. Konečně existuje zobrazení prostoru T na

[15]) Tuto vlastnost mají totiž spojité monotonní (ne nutně ryze monotonní) funkce jedné reálné proměnné.

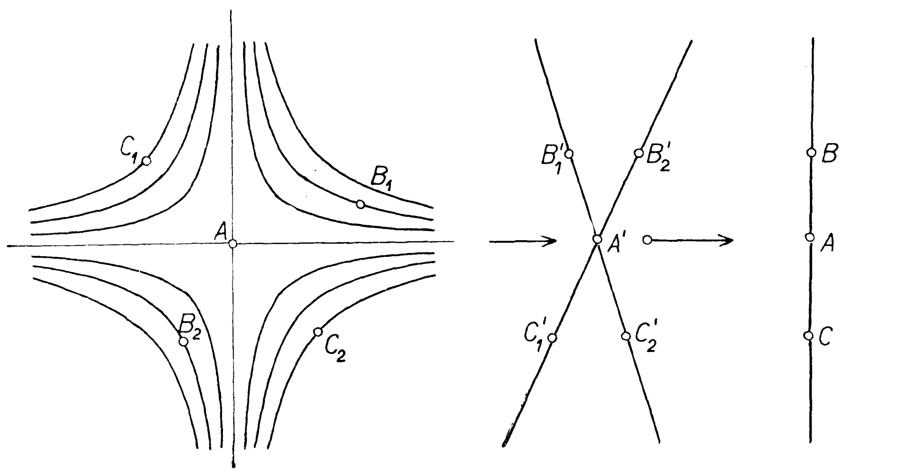
úsečku, při kterém komponenty (tj. množiny dimense nula v T) téže hladiny mají týž obraz (bod na této úsečce). Z toho plyne, že prostor T je jednorozměrný. Dá se totiž ukázat, že při právě popsaném zobrazení nemůže být zobrazovaný prostor (v našem případě T) menší dimense než jeho obraz (v našem případě úsečka). T je tedy jednorozměrné jednoduše a lokálně souvislé kontinuum, čili strom.



Obr. 3.

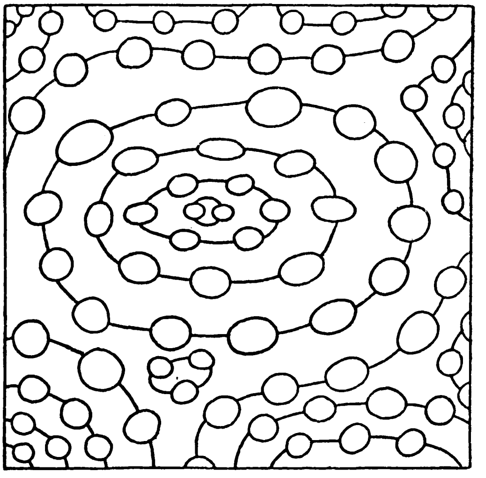
Každou spojitou funkci n proměnných $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ můžeme sestrojit superposicí těchto dvou zobrazení: 1. zobrazení $d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definičního oboru na strom komponent hladin funkce f; při zobrazení d je obrazem bodu definičního oboru komponenta tento bod obsahující; 2. zobrazení $f(d)$ množiny komponent hladin na interval (úsečku), který je množinou funkčních hodnot funkce f. Při tomto zobrazení se do bodu t zobrazí všechny komponenty hladiny, pro niž je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$.

Jako příklad vezměme funkci $f(x, y)$ dvou proměnných, definovanou na čtverci $-1 \leqq x \leqq 1, -1 \leqq y \leqq 1$ vztahem $f(x, y) = xy$. Tuto funkci je možno vyjádřit jako superposici těchto dvou zobrazení: 1. zobrazení zo-



Obr. 4.

brazujícího uvedený čtverec na strom (tvaru písmene X) komponent hladin této funkce (obr. 4) (při němž se souřadnicové osy, resp. hyperboly $xy = k \neq 0$ zobrazí na jeden bod stromu); 2. zobrazení stromu na interval $-1 \leqq t \leqq 1$ (při němž na každý bod tohoto intervalu se zobrazí právě ony body stromu, které odpovídají větvím téže hyperboly, resp. rozvětvovací bod stromu, který odpovídá nulové hladině $xy = 0$, čili souřadnicovým osám).



Obr. 5.

Každá spojitá funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných je tedy superposicí dvou zobrazení: zobrazení $d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definičního oboru na strom komponent hladin a zobrazení tohoto stromu na interval. Protože tento strom lze vnořit do roviny, můžeme každý jeho bod d určit dvěma souřadnicemi $u(d)$, $v(d)$; druhé zobrazení $f(d)$ dá se proto považovat za funkci dvou proměnných, a prvé za dvojici funkcí n proměnných $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

A. N. Kolmogorov dokázal, že každá funkce n proměnných je součtem $n + 1$ funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n proměnných,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{r=1}^{n+1} f^r(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

majících „standardní“, tj. na dané funkci f nezávislé množiny komponent hladin. Např. každá funkce dvou proměnných $f(x, y)$ je součtem tří funkcí dvou proměnných $f^1(x, y)$, $f^2(x, y)$, $f^3(x, y)$ takových, že „mapy“ jejich hladin mají na f nezávislý tvar, asi takový, jaký vidíme na obr. 5. U každé z funkcí $f^r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $r = 1, 2, \ldots, n + 1$, nezávisí tedy příslušné zobrazení $d^r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jejího definičního oboru na strom komponent jejích hladin na funkci f, zatímco zobrazení $f^r(d^r)$ tohoto stromu na obor hodnot funkce f^r bude již záviset na funkci f.

Interpretujme nyní funkci n proměnných jako jednoparametrickou soustavu (za parametr zvolíme třeba proměnnou x_n) funkcí $n - 1$ proměnných kladouce

$$f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Používajíce v předcházejícím odstavci vyloženého tvrzení, dostaneme

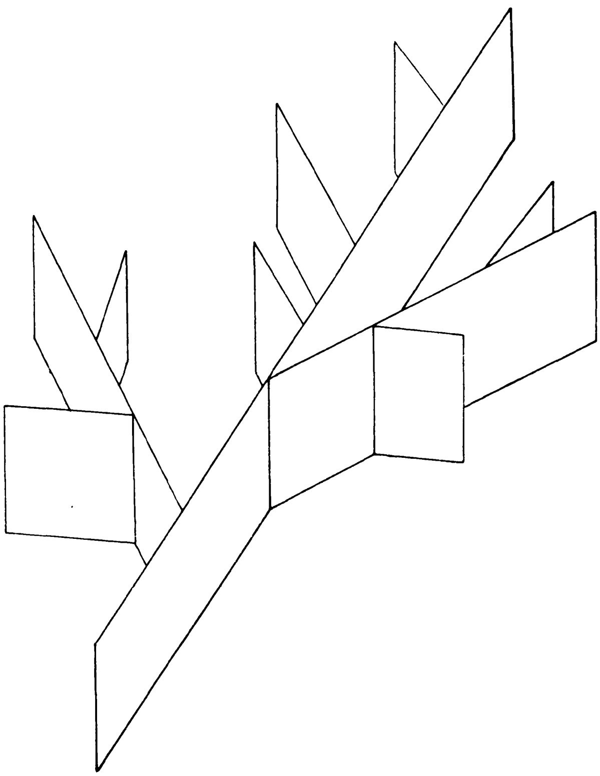
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \\ &= \sum_{r=1}^{n} f^r_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \\ &= \sum_{r=1}^{n} f^r_{x_n}(d^r(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} f^r(d^r(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n) , \tag{1}$$

kde $d^r(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ značí zobrazení definičního oboru funkce $f^r_{x_n}$ na strom komponent jejích hladin, které nezávisí na parametru x_n (protože komponenty hladin funkce $f^r_{x_n}$ jsou standardní!) a $f^r_{x_n}(d^r) = f^r(d^r, x_n)$ je zobrazení tohoto „standardního stromu" d^r na obor hodnot funkce f^r (které již závisí na x_n). Zavedeme-li v rovině stromu d^r souřadnice u^r, v^r, dostaneme:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{r=1}^{n} f^r(u^r(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), v^r(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n) . \tag{2}$$

Libovolná funkce f n proměnných je tedy součtem n funkcí, z nichž každá vzniká superposicí funkce tří proměnných $f^r(u^r, v^r, x_n)$ a dvou funkcí $n - 1$



Obr. 6.

proměnných $u^r(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $v^r(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Je-li $n > 3$, opakujeme tento postup na funkcích $n - 1$ proměnných u^r, v^r. Tak posléze dospějeme k vyjádření funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ superposicí funkcí nejvýše tří proměnných. Např. u funkce čtyř proměnných $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ dojdeme takto k vyjádření

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{r=1}^{4} f^r(u^r(x_1, x_2, x_3),\ v^r(x_1, x_2, x_3), x_4) \tag{2'}$$

[poznamenejme ještě, že funkci čtyř proměnných $f = f^1 + f^2 + f^3 + f^4$ lze získat superposicí pomocí funkce dvou proměnných $\varphi(f^1, f^2) = f^1 + f^2$]. Pro $n = 3$ dostáváme vyjádření

$$f(x, y, z) = \sum_{r=1}^{3} f^r(d^r(x, y), z)\,, \tag{3}$$

kde $d^r(x, y)$ značí zobrazení čtverce roviny (x, y) na strom (které můžeme považovat za dvojici funkcí dvou proměnných) a $f^r(d^r, z)$ je vlastně funkcí tří proměnných, definovaná na dvourozměrné množině, která je součinem stromu d^r a intervalu, který probíhá proměnná z (obr. 6).

Ukázalo se nedávno,[16]) že výsledek A. N. Kolmogorova lze zlepšit: každou spojitou funkci n proměnných lze vyjádřit součtem $3n$ funkcí, z nichž každá vznikne superposicí tak, že se do vhodné funkce dvou proměnných za jeden její argument dosadí vhodná funkce $n - 1$ proměnných.

Důkaz tohoto tvrzení se opírá o fakt, že stromy d^r z právě popsané konstrukce lze uložit v trojrozměrné krychli (u, v, w) tak, že lze každou na kterémkoli z těchto stromů definovanou funkci považovat za součet tří funkcí jedné proměnné (jedné souřadnice):

$$f^r(d^r) = \varphi^r(u^r) + \psi^r(v^r) + \chi^r(w^r)\,. \tag{4}$$

Odtud a ze vztahu (1) potom plyne

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{r=1}^{n} f^r_{x_n}(d^r(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})) = \\ &= \sum_{r=1}^{n} [\varphi^r_{x_n}(u^r(x_1, \ldots, x_{n-1})) + \psi^r_{x_n}(v^r(x_1, \ldots, x)) + \\ &\qquad + \chi^r_{x_n}(w^r(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}))] = \\ &= \sum_{r=1}^{n} [\varphi^r(u^r(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) + \psi^r(v^r(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) + \\ &\qquad + \chi^r(w^r(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)]\,. \end{aligned}$$

Speciálně pro funkce tří proměnných dostaneme místo (3) vyjádření:

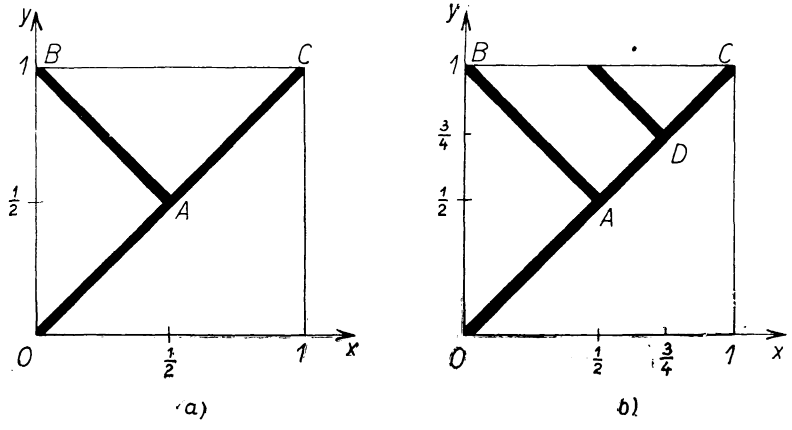
$$f(x, y, z) = \sum_{r=1}^{3} [\varphi^r(u^r(x, y), z) + \psi^r(v^r(x, y), z) + \chi^r(w^r(x, y), z)]\,. \tag{5}$$

Každá spojitá funkce tří proměnných je tedy součtem devíti funkcí, z nichž každá je jednoduchou superposicí funkcí dvou proměnných. To je úplné řešení uvedeného Hilbertova problému.

Ukazuje se, že v Kolmogorovově konstrukci se vystačí se stromy majícími jenom rozvětvovací body třetího řádu (čili jenom takové rozvětvovací body, u nichž ze základního „kmene" „vyrůstá" pouze jedna „větev"). O tento fakt se podstatně opírá důkaz existence rozkladu (4). Dále snadno nahlédneme, že strom tvaru písmene Y se dá ve čtverci

[16]) В. И. Арнолд, *О функциах трех переменных,* Doklady AN SSSR, sv. 114, č. 4, 1957.

(u, v) umístit tak, že libovolná funkce $f(u, v)$ definovaná na tomto stromu se dá vyjádřit součtem dvou funkcí jedné proměnné (obr. 7a). Stačí totiž na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ definovat funkci φ zcela libovolně a na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ definovat funkci ψ tak, aby na úsečkách OA a AB platilo $f(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$; nyní ještě dodefinujeme funkci φ na intervalu $(\frac{1}{2}, 1\rangle$ tak, aby i na úsečce AC platilo $f(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$. Tím jsme dosáhli, že na celém stromu platí $f(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$. V případě, že strom má dva rozvětvovací body, tj. je-li tvaru, jaký znázorňuje obr. 7b, lze každou na něm definovanou funkci $f(u, v)$ vyjádřit součtem $\varphi(u) + \psi(v)$. Přesvědčíme se o tom podobně jako v předcházejícím případě: na intervalu $\langle \frac{3}{4}, 1 \rangle$ definujeme funkce φ, ψ tak, aby na úsečce DC platilo $f(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$, načež dodefinujeme funkce φ a ψ na intervalu $\langle 0, \frac{3}{4})$ obdobně jako v předcházejícím případě tak, aby na celém stromu platilo $f(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$. Tímto způsobem se dá obecně ukázat, že každá funkce definovaná na stromu s konečným počtem rozvětvovacích bodů třetího řádu je součtem dvou funkcí jedné proměnné. Má-li strom nekonečně mnoho rozvětvovacích bodů, nelze takto postupovat. Avšak takový strom se dá uložit v trojrozměrné krychli tak, že každá na něm definovaná funkce je součtem tří funkcí jedné proměnné (souřadnic).



Obr. 7.

Složité konstrukce, o nichž jsme zde pojednali, se však ukázaly pro odvození konečného výsledku zbytečnými. Výhodnějším se jeví jiný postup, který umožňuje dokázat silnější věty.

§ 4

Z předcházejícího paragrafu tedy vidíme, že odpověď na otázku, zda existují funkce tří proměnných, je i v případě spojitých funkcí záporná. Přesně řečeno: každou spojitou funkci tří proměnných můžeme sestrojit superposicí spojitých funkcí dvou proměnných. Z rozkladu (5) vidíme, že vlastnosti každé funkce tří proměnných $f(x_1, x_2, x_3)$ lze odvodit z vlastností jistých funkcí dvou proměnných, totiž z vlastnosti funkcí $u^r, v^r, w^r, \varphi^r, \psi^r, \chi^r$; $r = 1, 2, 3$. Je tedy nyní přirozené se ptát, zda existují funkce dvou proměnných.

Smysl této otázky spočívá v tomto: Předně je jasné, že jakoukoli superposicí funkcí jedné proměnné

$$F(f_1(f_2(\ldots f_{n-1}(f_n(x)) \ldots)))$$

dostaneme zase jenom funkci jedné proměnné. Superposicí pouze funkcí jedné proměnné tedy nemůžeme získat funkci více proměnných. Jakmile však k množině funkcí jedné proměnné přidáme aspoň jednu „standardní" funkci dvou proměnných, např. $g(x, y) = x + y$, získáme superposicí této funkce a funkcí jedné proměnné již funkce libovolného počtu proměnných. Např. $(n - 1)$-násobnou superposicí funkce g

$$g(g(g \ldots g(g(x_1, x_2), x_3), \ldots, x_{n-1}), x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n$$

dostaneme funkci n proměnných. Vzniká tedy otázka, zda je možné každou spojitou funkci dvou proměnných takto vytvořit — to je smysl otázky, zda existují (skutečné) funkce dvou proměnných. (Přesněji by měla otázka tedy znít takto: je možné získat všechny funkce dvou proměnných superponováním některé z nich se spojitými funkcemi jedné proměnné?)

Omezíme-li se jen na superposice funkce dvou proměnných $g(x, y) = x + y$ s jakýmikoli spojitými funkcemi jedné proměnné, je odpověď na právě položenou otázku záporná. Dá se totiž celkem elementárně dokázat, že množina všech složených funkcí tvaru $f(\varphi(x) + \psi(y))$, kde f, φ, ψ jsou libovolné spojité funkce jedné proměnné, je vlastní podmnožinou, dokonce řídkou a neuzavřenou, množiny všech funkcí dvou proměnných, definovaných a spojitých na čtverci.[17]) Avšak A. N. Kolmogorov dokázal, zároveň s existencí rozkladu (2), že každou spojitou funkci n proměnných lze s libovolným stupněm přesnosti aproximovat superposicí spojitých funkcí jedné proměnné a součtu $g(x, y) = x + y$. Např. každou spojitou funkci dvou proměnných lze libovolně dobře aproximovat funkcí tvaru

$$P_1(x) \,.\, Q[R_1(x) + y] + P_2(x) \,.\, Q[R_2(x) + y]\,,$$

kde $P_1(x)$, $P_2(x)$; $R_1(x)$, $R_2(x)$; $Q(u)$ jsou vhodné polynomy jedné proměnné.[18])

V poslední době pracoval A. N. Kolmogorov na zjednodušení metody, kterou dokázal vztahy (2) a (5). Vraceje se k těmto úvahám se mu podařilo elementárně a elegantně dokázat tvrzení, že každou funkci n proměnných, definovanou a spojitou na jednotkové krychli n-rozměrného euklidovského prostoru E_n lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} h_q \left[\sum_{p=1}^{n} \varphi_q^p (x_p) \right], \tag{6}$$

kde h_q, $q = 1, 2, \ldots, 2n + 1$, jsou spojité funkce jedné proměnné a φ_q^p, $p = 1, 2, \ldots, n$; $q = 1, 2, \ldots, 2n + 1$ dokonce „standardní", tj. na funkci f nezávislé, spojité funkce jedné proměnné. Speciálně lze tedy každou spojitou funkci $f(x, y)$ dvou proměnných vyjádřit ve tvaru

$$f(x, y) = \sum_{q=1}^{5} h_q[\varphi_q(x) + \psi_q(y)]\,. \tag{6'}$$

Pro $n = 3$ dostáváme

$$f(x, y, z) = \sum_{q=1}^{7} h_q[\varphi_q(x) + \psi_q(y) + \chi_q(z)] = \sum_{q=1}^{7} F_q[g_q(x, y), z]\,,$$

[17]) Viz В. И. Арнолд, *О представимости функций двух переменных в виде* $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$, UMN, sv. 12, č. 2 (47), 1957.

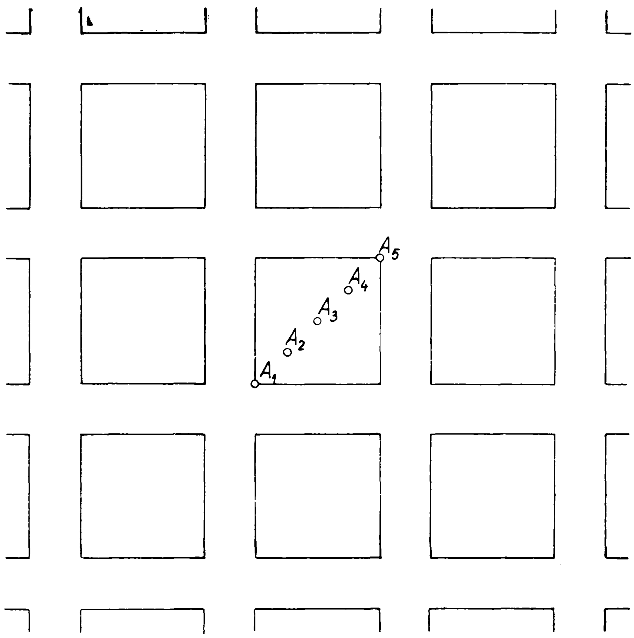
[18]) Viz práci A. N. Kolmogorova citovanou v pozn.[9]) na str. 402.

kde

$$F_q(u, z) = h_q[u + \chi_q(z)], \quad g_q(x, y) = \varphi_q(x) + \psi_q(y) ,$$

což je vzorec výhodnější než (5). Podle něho můžeme totiž každou spojitou funkci považovat za součet sedmi (a nikoli devíti jako v (5)) sčítanců, z nichž každý je jednoduchou superposicí spojitých funkcí dvou proměnných jednoduché struktury. „Vnitřní" funkce jsou přitom „standardní", takže vlastnosti funkce f jsou vlastně již určeny funkcemi h_q jedné proměnné.

Předvedeme nyní hlavní myšlenky elegantního a zároveň elementárního důkazu existence rozkladu (6). Čtenáře, kterého zajímají všechny podrobnosti tohoto důkazu, odkazujeme na příslušnou práci autora.[19]) Protože je postup pro



Obr. 8.

$n > 2$ analogický jako v případě $n = 2$, budeme se zde zabývat vyjádřením (6') libovolné spojité funkce $f(x, y)$ dvou proměnných x a y. Důkaz provedeme ve dvou krocích.

1. Konstrukce „vnitřních" funkcí φ_q a ψ_q, $q = 1, 2, 3, 4, 5$ v (6'), které nezávisí na tvaru funkce f.

K definici těchto funkcí potřebujeme pomocnou konstrukci, kterou nyní popíšeme. Uvažujme „město", znázorněné na obr. 8, skládající se ze „čtvrtí" (tj. neprotínajících se uzavřených čtverců), oddělených od sebe stejně širokými „ulicemi". Nyní homotheticky zmenšíme naše „město" N-krát; za střed homo-

[19]) А. Н. Колмогоров, *О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функци одного переменного,* **Doklady AN SSSR, sv. 114, č. 5, 1957.**

thetie zvolíme např. bod A_1. Dostaneme tak nové „město", které nazveme „městem" druhého řádu. Stejným způsobem, tj. homothetickým zmenšením s koeficientem homothetie $1/N$ sestrojíme „město" třetího řádu z „města" druhého řádu a stejně „město" čtvrtého řádu z „města" třetího řádu. Takto pokračujeme; obecně dostaneme „město" k-tého řádu z původního „města", jež nazveme „město" prvního řádu, homothetickým zmenšením s koeficientem homothetie $1/N^k$ (a se středem homothetie A_1; poloha středu homothetie není podstatná).

Právě sestrojenou soustavu „měst" nazveme první soustavou. Sestrojíme další čtyři soustavy. „Město" prvního řádu q-té soustavy, $q = 2, 3, 4, 5$, dostaneme z „města" prvního řádu první soustavy (tj. toho, které znázorňuje obr. 8) posunutím, převádějícím bod A_1 v bod A_2. Snadno nahlédneme, že ulice „města" můžeme zvolit tak úzké, aby každý bod byl pokryt aspoň třemi „čtvrtěmi" našich pěti „měst" prvního řádu. Stejně získáme „město" k-tého řádu q-té soustavy, $k = 2, 3, \ldots, q = 2, 3, 4, 5$, posunutím převádějícím bod A_1^k v bod A_q^k; body A_1^k a A_q^k jsou homothetickými obrazy bodů A_1 a A_q při homothetii, pomocí níž jsme sestrojili „město" k-tého řádu první soustavy z města prvního řádu první soustavy. Pro každé přirozené číslo k bude každý bod roviny ležet ve „čtvrtích" (tedy nikoli na „ulicích") alespoň tří z pěti „měst" k-tého řádu.

Funkci

$$\Phi_q(x, y) = \varphi_q(x) + \psi_q(y), \quad q = 1, 2, 3, 4, 5\,,$$

definujeme nyní tak, aby oddělovala libovolné dvě „čtvrtě" každého „města" q-té soustavy. Přitom říkáme o funkci Φ_q, že odděluje „čtvrtě" „města", je-li množina funkčních hodnot, které nabývá Φ_q na libovolně vybrané „čtvrti", disjunktní s množinou funkčních hodnot, kterých Φ_q nabývá na kterékoli jiné „čtvrti". Je zřejmé, že stačí zabývat se funkcí Φ_q jenom na jednotkovém čtverci (místo na celé rovině).

K tomu, aby funkce $\Phi_q(x, y) = \varphi_q(x) + \psi_q(y)$ oddělovala „čtvrtě" „města" prvního řádu, stačí např. zařídit, aby se funkční hodnoty $\varphi_q(x)$ málo lišily od čísel celých a funkční hodnoty $\psi_q(y)$ málo lišily od celistvých násobků $\sqrt{2}$ (jsou-li totiž m, m', n, n' celá čísla, platí $m + n\sqrt{2} = m' + n'\sqrt{2}$ právě tehdy, když $m = m'$ a $n = n'$). Na ulicích definujeme funkci Φ_q zcela libovolně. Dále jde o to definovat funkce φ_q a ψ_q (které mohou být zatím velmi rozmanité) tak, aby oddělovaly nejen „čtvrtě" „města" prvního řádu q-té soustavy, ale i „čtvrtě" každého „města" q-té soustavy. Téměř na první pohled je zřejmé, že je-li to nutné, vhodným ohraničením funkčních hodnot $\varphi_q(x)$ a $\psi_q(y)$ na „čtvrtích" „města" druhého řádu dosáhneme toho, aby funkce $\Phi_q(x, y) = \varphi_q(x) + \psi_q(y)$ oddělovala i „čtvrtě" „města" druhého řádu q-té soustavy.[20]) Tentýž postup opakujeme pro „město" třetího řádu q-té soustavy atd. Omezujíce takto postupně obory funkčních hodnot funkcí φ_q a ψ_q, získáme tak v limitě ($k \to +\infty$) spojité funkce φ_q a ψ_q (můžeme dokonce dosáhnout toho, že budou monotonní) takové, že funkce $\Phi_q(x, y) = \varphi_q(x) + \psi_q(y)$ má žádanou vlastnost.

2. Konstrukce funkcí h_q v rozkladu (6'), které závisí na tvaru funkce $f(x, y)$.

Dokážeme nejdříve, že pro každou spojitou funkci $f(x, y)$ dvou proměnných, definovanou na jednotkovém čtverci, platí

$$f(x, y) = \sum_{q=1}^{5} h_q^{(1)}(\Phi_q(x, y)) + f_1(x, y)\,; \tag{7}$$

[20]) Tento postup je ovšem proveditelný jen tehdy, jestliže „čtvrtě" kteréhokoliv města q-té soustavy nebudou zasahovat do více „čtvrtí" „města" nižších řádů. Aby toto nenastalo, stačí zvolit N dostatečně velké. Ve své konstrukci zvolil A. N. Kolmogorov $N = 18$.

při tom je $\Phi_q(x, y) = \varphi_q(x) + \psi_q(y)$, kde φ_q a ψ_q jsou právě sestrojené funkce a platí

$$M_1 = \max |f_1(x, y)| \leqq \tfrac{5}{6} \max |f(x, y)| = \tfrac{5}{6} M\,, \tag{7a}$$

$$\max |h_q^{(1)}(\Phi_q(x, y))| \leqq \tfrac{1}{3}M\,, \quad q = 1, 2, 3, 4, 5\,. \tag{7b}$$

Zvolíme řád k tak velký, aby oscilace funkce [21]) na každé „čtvrti" každého z „měst" k-tého řádu nepřevyšovala číslo $\frac{1}{6}M$; to lze,protože funkce $f(x, y)$ je spojitá a „čtvrtě", tj. uzavřené čtverce, se s rostoucím k neomezeně zmenšují. Označme $p_1^{(ij)}$ některou „čtvrť" „města" první soustavy (a zvoleného řádu k). Spojitá funkce $\Phi_1(x, y)$ zobrazuje tuto „čtvrť" na uzavřený interval $\Delta_1^{(ij)}$ (při čemž z definice funkce Φ_1 plyne, že tento interval je disjunktní s kterýmkoli z uzavřených intervalů na který zobrazí tato funkce jakoukoli jinou „čtvrť" tohoto „města". Na intervalu $\Delta_1^{(ij)}$ budiž funkce $h_1^{(1)}$ konstantní a rovna jedné třetině funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ v libovolně vybraném vnitřním bodě $M_1^{(ij)}$ (který nazveme třeba „centrem" této „čtvrtě") „čtvrtě" $p_1^{(ij)}$. Stejným způsobem definujeme funkci $h_1^{(1)}$ na každém z uzavřených intervalů, na které zobrazí funkce $\Phi_1(x, y)$ „čtvrtě" „města" k-tého řádu první soustavy. Co do absolutní hodnoty nebudou funkční hodnoty funkce $h_1^{(1)}$ větší než číslo $\frac{1}{3}M$ (neboť absolutní hodnota funkce $f(x, y)$ v „centru" libovolné „čtvrtě" nepřesahuje číslo M). Dodefinujme funkci $h_1^{(1)}$ na celé číselné ose tak, aby byla spojitá a splňovala nerovnost (7b). Analogicky definujeme i všechny ostatní funkce $h_q^{(1)}$, $q = 2, 3, 4, 5$.

Dokážeme nyní, že rozdíl

$$f_1(x, y) = f(x, y) - \sum_{q=1}^{5} h_q^{(1)}(\Phi_q(x, y))$$

splňuje podmínku (7a), čili že

$$|f_1(x_0, y_0)| \leqq \tfrac{5}{6}M\,,$$

kde $[x_0, y_0]$ je libovolný bod jednotkového čtverce. Bod $[x_0, y_0]$ (jako každý bod roviny) leží v některé „čtvrti" alespoň tří „měst" k-tého řádu. Proto existují tři z pěti funkcí $h_1^{(1)}(\Phi_q(x, y))$, $q = 1, 2, 3, 4, 5$, jejichž funkční hodnota v bodě $[x_0, y_0]$ je rovna jedné třetině funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ v „centru" odpovídající „čtvrtě", a tedy se liší od čísla $\frac{1}{3}f(x_0, y_0)$ nejvýše o $\frac{1}{18}M$ (neboť oscilace funkce $f(x, y)$ na libovolné „čtvrti" nepřevyšuje $\frac{1}{6}M$). Součet těchto tří hodnot $h_q^{(1)}(\Phi_q(x_0, y_0))$ se tedy liší od $f(x_0, y_0)$ nejvýše o $\frac{1}{6}M$. Protože každá ze zbývajících dvou hodnot $h_q^{(1)}(\Phi_q(x_0, y_0))$ není co do absolutní hodnoty větší než $\frac{1}{3}M$ (to plyne z (7)), dostáváme:

$$|f_1(x_0, y_0)| = |f(x_0, y_0) - \sum_{q=1}^{5} h_q^{(1)}(\Phi(x_0, y_0))| \leqq \tfrac{1}{6}M + \tfrac{2}{3}M = \tfrac{5}{6}M\,,$$

čímž je dokázána nerovnost (7a).

Rozložme podle (7) funkci $f_1(x, y)$ (ve vztahu (7) se vyskytující):

$$f_1(x, y) = \sum_{q=1}^{5} h_q^{(2)}(\Phi_q(x, y)) + f_2(x, y)\,,$$

---

[21]) tj. rozdíl maxima a minima.

čili

$$f(x, y) = \sum_{q=1}^{5} h_q^{(1)}(\Phi_q(x, y)) + \sum_{q=1}^{5} h_q^{(2)}(\Phi_q(x, y) + f_2(x, y)) ,$$

kde

$$M_2 = \max |f_2(x, y)| \leqq \tfrac{5}{6} M_1 \leqq (\tfrac{5}{6})^2 M ,$$
$$\max |h_q^{(2)}(\Phi_q(x, y))| \leqq \tfrac{1}{3} M_1 = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{5}{6} M , \quad q = 1, 2, 3, 4, 5 .$$

Nyní zas rozložíme funkci $f_2(x, y)$ podle (7). Tak pokračujeme; po n-tém kroku dostaneme:

$$f(x, y) = \sum_{q=1}^{5} h_q^{(1)}(\Phi_q(x, y)) + \sum_{q=1}^{5} h_q^{(2)}(\Phi_q(x, y)) + \dots$$
$$\dots + \sum_{q=1}^{5} h_q^{(n)-1}(\Phi_q(x, y)) + f_n(x, y) ,$$

kde

$$M_n = \max |f_n(x, y)| \leqq (\tfrac{5}{6})^n M$$

a

$$\max |h_q^{(s)}(\Phi_q(x, y))| = \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{5}{6})^{s-1} M , \quad q = 1, 2, 3, 4, 5 ; \quad s = 1, 2, \dots, n - 1 .$$

Z posledního odhadu usoudíme, že limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme:

$$f(x, y) = \sum_{q=1}^{5} h_q^{(1)}(\Phi_q(x, y)) + \sum_{q=1}^{5} h_q^{(2)}(\Phi_q(x, y)) + \dots + \sum_{q=1}^{5} h_q^{(n)}(\Phi_q(x, y)) + \dots ,$$

kde řada na pravé straně konverguje stejnoměrně; tedy stejnoměrně konverguje i každá z pěti řad

$$h_q^{(1)}(\Phi_q(x, y)) + h_q^{(2)}(\Phi_q(x, y)) + \dots + h_q^{(n)}(\Phi_q(x, y)) + \dots ,$$
$$q = 1, 2, 3, 4, 5 ,$$

načež můžeme položit

$$h_q(u) = h_q^{(1)}(u) + h_q^{(2)}(u) + \dots + h_q^{(n)}(u) + \dots , \quad q = 1, 2, 3, 4, 5 .$$

Tím konečně získáme rozklad (6′):

$$f(x, y) = \sum_{q=1}^{5} h_q(\Phi_q(x, y)) = \sum_{q=1}^{5} h_q[\varphi_q(x) + \psi_q(y)] .$$

Závěrem poznamenejme, že rozklady (2), (5) a (6) mají jen teoretickou cenu. Používá se totiž v nich podstatně funkcí typu funkce Weierstrassovy[22]), tedy funkcí, které nejsou hladké. Zdá se tedy, že pro praktické použití jsou tyto

[22]) Z výsledků N. K. Baryho (N. K. Bary, *Memoire sur la representation finie des fonctions continues*, Math. Ann. 103, 1930, str. 145—248 a 598—653) plyne, že každou spojitou funkci jedné proměnné lze považovat za superposici absolutně spojitých funkcí. Ze vzorce (6) tedy plyne, že každou spojitou funkci n proměnných lze vyjádřit superposicí monotonních funkcí jedné proměnné a funkce dvou proměnných $g(x, y) = x + y$. Avšak ani tyto monotonní funkce nebudou hladké.

rozklady bezcenné (v protikladu k v § 1 zmíněném vyjádření kořenů algebraických rovnic pátého a šestého stupně superposicí funkcí dvou proměnných). Otázka vhodného vyjádření např. kořenů algebraické rovnice sedmého stupně zůstává otevřená.

Není rovněž jasné do jaké míry se dá rozklad (6) ještě zlepšit. Není např. řešena otázka jednoznačnosti funkce h. Ani otázka representace hladkých funkcí superposicemi není řešena. V tomto směru zůstávají nejlepšími výsledky záporná tvrzení A. G. Vituškina. Odvození kladných tvrzení by bylo velmi zajímavé.

Zmíníme se ještě o jednom speciálním, poněkud jinak zaměřeném, výsledku A. N. Kolmogorova. Jak A. N. Kolmogorov dokázal, existuje ke každé funkci dvou proměnných definované na čtverci mezi všemi součty $\varphi(x) + \psi(y)$ takový, který danou funkci nejlépe aproximuje. Dá se také dokázat, že ke každé (byť všude nespojité) omezené reálné funkci f, definované na kompaktní množině, a k libovolné na téže množině definované spojité funkci g existuje spojitá funkce φ taková, že funkce $\varphi(g)$ se minimálně liší od funkce f. Speciálně, ke každé omezené funkci $f(x)$, existuje spojitá funkce $\varphi(x)$, která ji (ve smyslu stejnoměrné konvergence) nejlépe aproximuje.

Přeložil Jiří Fábera

LOGARITMICKÁ SPIRÁLA

Milan Pišl, *katedra mat. a deskr. geom. el. fak. ČVUT* v Praze

Logaritmická spirála je definována jako čára, která protíná svazek přímek pod konstantním úhlem ϑ. Zvolíme-li střed svazku v počátku, pak tato podmínka zní

$$\tau - \varphi = \vartheta\,, \tag{1}$$

kde φ je směrový úhel radiusvektoru průběžného bodu a τ tečnový úhel (viz obr. 1).

Vztah (1) definující logaritmickou spirálu je ekvivalentní se vztahem

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\tau-\varphi)} = \varepsilon\,, \quad \varepsilon = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\,, \quad \vartheta = \text{konst}\,. \tag{2}$$

a použijeme-li pro rovnici logaritmické spirály komplexního vyjádření

$$z = f(t)$$

($f(t)$ je komplexní funkce reálného argumentu t),
můžeme rovnici (2) psát ve tvaru

$$\frac{f'(t)}{|f'(t)|} \cdot \frac{|f(t)|}{f(t)} = \varepsilon\,, \quad f'(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{3}$$

Označíme-li $\dfrac{|f'(t)|}{|f(t)|} = \lambda(t)$ reálnou funkci parametru t, dostáváme pro komplexní funkci $f(t)$, definující logaritmickou spirálu, diferenciální rovnici

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \varepsilon\lambda(t)$$

kde $\lambda(t)$ je libovolná reálná funkce parametru t, $\varepsilon = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$, ϑ reálná konstanta.