Milan Beneš; Jiří Likeš

Faktorové experimenty v průmyslovém výzkumu [Dokočení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 2, 156--166

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137286

Tato křivka je vždy sama k sobě konjugovaná, neboť obsahuje-li bod (ξ, η, t), obsahuje také bod $(\bar{\eta}, \bar{\xi}, t)$ s ním konjugovaný.

Poznámka: Nebudeme vyšetřovat křivky dané rovnicí (19) a obsahující jen konečný počet reálných bodů.

(Dokončení)

FAKTOROVÉ EXPERIMENTY V PRŮMYSLOVÉM VÝZKUMU

Milan Beneš (Ústav pro výzkum rud, Praha),
Jiří Likeš (Ocelářský výzkumný ústav, Praha).

(Dokončení)

Principy a methody spřažení

Nyní vyložíme některé další principy pro faktorovou analysu, které budou potřebné především při neúplných faktorových experimentech. Byly již dříve uvedeny důvody, proč ztrácejí pro nás interakce nejvyšších řádů praktický význam, což se projevuje hlavně tehdy, jestliže máme sledovat větší počet faktorů. Po prvé bylo těchto principů využito opět v zemědělském výzkumu, kdy byly faktorové experimenty rozděleny do několika bloků, aby byla zaručena stejnoměrnost půdy, na které se experiment prováděl. V průmyslovém výzkumu má obvykle toto rozdělení do bloků poněkud odlišný charakter. Někdy jde o to, aby tímto rozdělením faktorových experimentů do bloků byly dodrženy v čase nebo v prostoru stále stejné podmínky, které při experimentu působí. Na příklad, tímto způsobem může být vyloučen nežádoucí vliv pracovníka, pracovního zařízení, materiálu na výsledek pokusu nebo vliv časového trendu, jestliže se experimentální podmínky s časem mění. Jindy provádíme rozdělení do bloků z toho důvodu, abychom při stejném počtu pokusů mohli sledovat ještě další faktor, který při experimentu působí, a tím vlastně takto zmenšíme celkový počet pokusů, který bychom jinak museli v experimentu provést. Statistická analysa výsledků je v obou těchto případech stejná. Je však nutno mít na zřeteli tu důležitou okolnost, že tyto bloky nebo další faktor, který je těmito bloky představován, nesmí mít interakci žádného řádu s ostatními faktory, které sledujeme. Pokud by tato interakce mezi bloky a ostatními faktory skutečně existovala, porušila by se značným způsobem vyváženost celého experimentu, která je právě při faktorové analyse velmi důležitá.

Podstata rozdělení faktorových experimentů do bloků spočívá v tom, že případné rozdíly mezi bloky spojíme s interakcemi, které jsme dříve určitým způsobem zvolili. Způsob spojení účinků bloků a zvolených interakcí, které má za následek ztrátu informací o těchto interakcích, budeme nazývat spřažením (*confounding*).

Vysvětlíme krátce princip spřažení přímo pro experimenty typu 2^n v případě, že experiment rozkládáme pouze do dvou bloků. V tomto případě je nejlépe spřáhnout interakci nejvyššího řádu, která podle formule (1) je

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} (a_i - 1). \qquad (9)$$

Označíme-li členy v rozvoji předcházející formule se znaménkem + symboly b_j, členy se znaménkem — symboly b'_j, lze psát

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j + \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b'_j \right\}, \tag{10}$$

Nyní je logické žádat, aby všechny kombinace úrovní faktorů, označené b_j, tvořily jeden blok a členy b'_j blok druhý ($j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$). Uvedenou definici rozdělení všech kombinací úrovní experimentu do bloků je možno interpretovat též tak, že kombinace, které obsahují lichý počet a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ze všech možných, dáme do prvního bloku, a kombinace se sudým počtem a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) do bloku druhého [sem počítáme i kombinaci (1)]. Toto rozdělení podle sudých a lichých kombinací úrovní faktorů vyplývá z formule (9), neboť členy b_j dostaneme tehdy a jen tehdy, vezmeme-li počet a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) roven číslu n, $n-2$, $n-4$, ... Naznačenou methodou je možno pro každé n rozdělit experiment do dvou bloků. Takovéto rozdělení má tu důležitou a výhodnou vlastnost, že hlavní efekty ani interakce nejsou ovlivněny případnými rozdíly mezi bloky (kromě interakce nejvyššího řádu). Princip spočívá v tom, že každý hlavní efekt nebo interakci, definované vztahem (1), je též možno psát ve tvaru

$$A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p} = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{2^{n-1}} c_j + \sum_{j=1}^{2^{n-1}} c'_j \right), \tag{11}$$

kde c_j, c'_j mají tu vlastnost, že $b_j = \pm c_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$), $b'_j = \pm c'_j$ ($j = \ldots, 2^{n-1}$). Z definice c_j a c'_j vyplývá, že v součtu $\sum_{j=1}^{2^{n-1}} c_j$ bude právě polovina členů c_j mít znaménko + a polovina členů znaménko — (neboť všechna b_j měla znaménko +). Stejné to bude i u druhého součtu $\sum_{j=1}^{2^{n-1}} c'_j$. Tedy součet $\sum_{j=1}^{2^{n-1}} c_j + \sum_{j=1}^{2^{n-1}} c'_j$ je kontrast orthogonální vůči $\sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j + \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b'_j$, takže $A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}$ je invariantní (to znamená připočtením libovolné hodnoty ke všem členům jednoho ze součtů $\sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j$, $\sum_{j=1}^{2^{n-1}} b'_j$ se nemění hodnota $A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}$) na oba součty v (10), to jest na rozdíly mezi bloky. Analysa rozptylu se tak provádí obvyklým způsobem, ovšem spřaženou interakci $A_1 A_2 \ldots A_n$ počítáme a považujeme za účinek bloků.

Ukážeme nyní, jak se obecně provádí rozdělení do 2^k ($k < n$) bloků. V tom případě je nutno pro spřažení zvolit ($2^k - 1$) interakcí, při čemž k interakcí je možno zvolit libovolně, avšak tak, že žádná z nich nesmí být odvozena násobením ostatních, při čemž bereme $A_i^2 = I = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ostatních $2^k - k - 1$ interakcí vznikne pak z k zvolených interakcí násobením dvou nebo více interakcí mezi sebou, při čemž opět bereme $A_i^2 = I = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Důvod, proč volíme k interakcí libovolně, vyplývá z rozvoje

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} = 2^k - 1,$$

kde jednotlivé sčítance znamenají počet k zvolených interakcí

$$\begin{aligned} &A_{i_1(1)} A_{i_2(1)} \dots A_{i_{p_1}(1)}, \\ &A_{i_1(2)} A_{i_2(2)} \dots A_{i_{p_2}(2)}, \\ &\dots \\ &A_{i_1(k)} A_{i_2(k)} \dots A_{i_{p(k)}}, \end{aligned} \tag{12}$$

(indexy (1), (2), ... (k) u jednotlivých faktorů znamenají j-tou podmnožinu $i_1, i_2, \dots, i_{p_j}$ z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a počet všech možných násobení mezi různými interakcemi a jejich celkový součet dává právě $2^k - 1$, t. j. počet možných rozdílů mezi bloky. Nejvýhodnější volba k libovolných interakcí závisí na celkovém počtu pokusů v experimentu 2^n, na počtu bloků 2^k a především pak na konkretním významu interakcí i hlavních efektů. Proto obecná pravidla pro tuto volbu dát nelze, ovšem volíme pokud možno pro spřažení interakce nejvyšších řádů, i když často nemůžeme zabránit spřažení interakcí řádu prvního. Vždy však uspořádáme experiment tak, abychom neztratili hlavní efekty. Různé návrhy experimentu, jejichž spřažení přichází v praxi nejčastěji v úvahu, jsou již konkretně vypracovány v některých novějších knihách, na př. v [9], takže lze těchto návrhů pro experimenty ihned použít. Všechny ($2^k - 1$) interakce, které byly pro spřažení uvedeným způsobem zvoleny, nazýváme definující kontrasty. Spolu se symbolem I tvoří tyto uzavřený systém interakcí, z nichž každou lze dostat násobením dvou jiných interakcí, obsažených v témž systému.

Na příklad v experimentu typu 2^6, který byl rozdělen do osmi bloků ($n = 6, k = 3$) zvolíme pro spřažení tyto interakce:

$$A_1 A_4 A_5, A_2 A_3 A_5, A_1 A_3 A_6.$$

Celý systém definujících kontrastů vznikne vzájemným násobením uvedených tří kontrastů a bude

$$A_1 A_4 A_5, A_2 A_3 A_5, A_1 A_3 A_6, A_2 A_4 A_6, A_1 A_2 A_5 A_6,$$
$$A_3 A_4 A_5 A_6, A_1 A_2 A_3 A_4, I.$$

Uvedený systém je zřejmě pro spřažení výhodný, neboť neobsahuje žádné hlavní efekty, nýbrž interakce nejméně druhého řádu.

Rozdělení všech kombinací úrovní faktorů do 2^k bloků pro experiment typu 2^n je zobecněním definice rozdělení pouze do dvou bloků. Do jednoho bloku zahrneme všechny kombinace úrovní, pro které celkový počet znamének + nebo — ve všech rozvojích k zvolených interakcí, definovaných vztahem (12), bude stejný. To znamená, že pro určitou kombinaci zjistíme u všech interakcí znaménko této kombinace a podle celkového počtu znamének + nebo — zařadíme ji do určitého bloku. Rozdělíme-li všechny kombinace uvedeným způsobem, musí zřejmě být celkový počet bloků 2^k.

Blok, který obsahuje kombinaci (1), se nazývá základní blok. O základním bloku platí tyto užitečné věty:

1. Všechny kombinace základního bloku tvoří opět uzavřený systém, to znamená, násobíme-li dvě nebo více kombinací obsažených v základním bloku (při čemž pro násobení kombinací jsou pravidla obdobná pravidlům pro násobení interakcí), dostaneme opět kombinaci základního bloku.

Tato věta umožňuje stanovit všechny prvky základního bloku, známe-li pouze některé.

2. Násobením dvou a více kombinací mezi sebou v jiném bloku, než je základní, dostaneme všechny kombinace základního bloku.

3. Násobením všech kombinací základního bloku takovou kombinací, která není v základním bloku obsažena, dostaneme jiný blok, než je základní.

Uvedené věty 2. a 3. umožňují stanovit všechny bloky experimentu typu 2^n, jestliže je znám pouze jeden blok.

Srovnáme-li na př. pro náš případ $n = 6$, $k = 3$ v rozvojích zvolených spřažených interakcí

$$A_1 A_4 A_5 = \frac{1}{2^5}(a_1 - 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1)(a_4 - 1)(a_5 - 1)(a_6 + 1),$$

$$A_2 A_3 A_5 = \frac{1}{2^5}(a_1 + 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1)(a_4 + 1)(a_5 - 1)(a_6 + 1),$$

$$A_1 A_3 A_6 = \frac{1}{2^5}(a_1 - 1)(a_2 + 1)(a_3 - 1)(a_4 + 1)(a_5 + 1)(a_6 - 1),$$

všechny kombinace, u kterých bude ve všech uvedených interakcích vždy znaménko +, dostaneme tento blok:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6,\ a_1 a_2,\ a_2 a_3 a_5,\ a_1 a_4 a_5,\ a_3 a_4,\ a_2 a_4 a_6,\ a_5 a_6,\ a_1 a_3 a_6.$$

Násobením kombinací všemi možnými způsoby v tomto bloku dostaneme tento základní blok:

$$(1),\ a_1 a_3 a_5,\ a_2 a_4 a_5,\ a_1 a_2 a_3 a_4,\ a_1 a_4 a_6,$$

$$a_3 a_4 a_5 a_6,\ a_1 a_2 a_5 a_6,\ a_2 a_3 a_6,$$

ze kterého již můžeme postupným násobením různými kombinacemi podle věty 3. odvodit všechny bloky experimentu typu 2^6, spřaženého do osmi bloků.

Analysa rozptylu v těchto experimentech se opět provádí obvyklým způsobem, ovšem spřažené interakce je nutno počítat zvlášť jako účinky mezi bloky.

Jestliže provádíme pro každou kombinaci více opakování pokusů (což, jak již bylo řečeno, přichází v průmyslu v úvahu velmi zřídka), je možno při jednom opakování pokusu spřáhnout určité interakce a při druhém opakování interakce jiné. Tento způsob se zpravidla nazývá paricální spřažení. Abychom dosáhli při tomto parciálním spřažení určitého vyvážení všech interakcí, je nutno učinit vždy více opakování pokusu a kromě toho toto vyvážení není vždy možné provést vzhledem k hlavním efektům, které se vyskytují při analyse pokusů nestejněkrát.

Nyní se stručně zmíníme o spřažení experimentů, u kterých se pokusy provádějí pro každý faktor na třech úrovních. Obecná theorie spřažení těchto experimentů typu 3^n je velmi složitá, takže pro praxi přicházejí v úvahu nejvýše experimenty typu 3^4 (i tento případ je však již značně složitý). Počet bloků, do kterých se experimenty tohoto typu rozkládají, je prakticky vždy 3^k.

Máme-li pouze dva faktory, tedy experimenty typu 3^2, je možno rozdělit všechny kombinace do tří bloků několika způsoby, na př.

I. blok $a_1^{(0)} a_2^{(0)},\ a_1^{(0)} a_2^{(1)},\ a_1^{(0)} a_2^{(2)};$

II. blok $a_1^{(1)} a_2^{(0)},\ a_1^{(1)} a_2^{(1)},\ a_1^{(1)} a_2^{(2)};$

III. blok $a_1^{(2)} a_2^{(0)},\ a_1^{(2)} a_2^{(1)},\ a_1^{(2)} a_2^{(2)},$

nebo

$$\begin{array}{ll} \text{I. blok} & a_1^{(0)} a_2^{(0)},\ a_1^{(1)} a_2^{(0)},\ a_1^{(2)} a_2^{(0)}; \\ \text{II. blok} & a_1^{(0)} a_2^{(1)},\ a_1^{(1)} a_2^{(1)},\ a_1^{(2)} a_2^{(1)}; \\ \text{III. blok} & a_1^{(0)} a_2^{(2)},\ a_1^{(1)} a_2^{(2)},\ a_1^{(2)} a_2^{(2)}. \end{array}$$

Je zřejmé, že oba typy takto navržených experimentů jsou pro praxi nevyhovující, neboť v obou případech je spřažen hlavní efekt A_1 nebo A_2 s rozdíly mezi bloky.

Abychom tuto nevýhodu odstranili, je nutno experiment 3^2 rozdělit do bloků na př. těmito způsoby:

$$\begin{array}{ll} \text{I. blok} & a_1^{(0)} a_2^{(0)},\ a_1^{(1)} a_2^{(2)},\ a_1^{(2)} a_2^{(1)}; \\ \text{II. blok} & a_1^{(0)} a_2^{(1)},\ a_1^{(1)} a_2^{(0)},\ a_1^{(2)} a_2^{(2)}; \\ \text{III. blok} & a_1^{(0)} a_2^{(2)},\ a_1^{(1)} a_2^{(1)},\ a_1^{(2)} a_2^{(0)}, \end{array}$$

nebo

$$\begin{array}{ll} \text{I. blok} & a_1^{(0)} a_2^{(0)},\ a_1^{(1)} a_2^{(1)},\ a_1^{(2)} a_2^{(2)}; \\ \text{II. blok} & a_1^{(0)} a_2^{(2)},\ a_1^{(1)} a_2^{(0)},\ a_1^{(2)} a_2^{(1)}; \\ \text{III. blok} & a_1^{(0)} a_2^{(1)},\ a_1^{(1)} a_2^{(2)},\ a_1^{(2)} a_2^{(0)}. \end{array}$$

V prvém případě se rozdělení do bloků provedlo tím způsobem, že pro kombinace na jednotlivých blocích platí

$$a_1 + a_2 = 0 \pmod 3,$$
$$a_1 + a_2 = 1 \pmod 3,$$
$$a_1 + a_2 = 2 \pmod 3.$$

Jestliže tedy provedeme rozdělení devíti kombinací do tří bloků tímto způsobem, je spřažena s rozdíly mezi bloky ta složka interakce, jíž jsme označili $A_1 A_2$.

Podobně při rozmístění kombinací podle druhého z uvedených způsobů platí pro kombinace jednotlivých bloků

$$a_1 + 2\, a_2 = 0 \pmod 3,$$
$$a_1 + 2\, a_2 = 1 \pmod 3,$$
$$a_1 + 2\, a_2 = 2 \pmod 3,$$

to znamená, že s bloky je spřažena složka $A_1 A_2^2$.

Při takových rozděleních kombinací do bloků lze tedy při faktorovém experimentu 3^2 vyhodnotit pomocí analysy rozptylu efekt faktorů A_1 a A_2 a jednu složku interakce, zatím co druhá složka je spřažena s rozdíly mezi bloky.

Máme-li tři faktory, každý o třech úrovních, lze provést rozdělení kombinací buď na tři nebo na devět bloků. Pro spřažení experimentu 3^3 do třech bloků je nejvýhodnější užít některé ze čtyř složek interakce druhého řádu. Zvolíme-li na př. $A_1 A_2^2 A_3^2$, provedeme rozdělení do tří skupin po devíti kombinacích tak, že na jednotlivé bloky dáme ty kombinace, pro něž platí

$$a_1 + 2\, a_2 + 2\, a_3 = 0 \pmod 3,$$

$$a_1 + 2\,a_2 + 2\,a_3 = 1 \pmod 3,$$
$$a_1 + 2\,a_2 + 2\,a_3 = 2 \pmod 3).$$

Tyto vztahy vyplývají z toho, co bylo řečeno při výkladu principů Kempthornovy methody v úplných experimentech typu 3^n.

Při tomto způsobu spřažení lze vyhodnotit pomocí kriteria F hlavní efekty a interakce prvního řádu, pro interakci druhého řádu lze vyhodnotit jen tři složky, zbývající je spřažena s rozdíly mezi bloky.

Užijeme-li devíti bloků, jsou s rozdíly mezi bloky spřaženy čtyři složky; každé přísluší dva stupně volnosti. Z nich dvě lze zvolit libovolně, další dvě dostaneme násobením prvních dvou podle tohoto pravidla: značí-li X_1, X_2 určité složky, které jsou spřaženy s rozdíly mezi bloky, pak s těmito rozdíly jsou též spřaženy $X_1 X_2$ a $X_1 X_2^2$. Pro násobení platí komutativní zákon a třetí mocninu každého symbolu pokládáme rovnu jedné. Je-li $X_1 X_2$ nebo $X_1 X_2^2$ takové, že první symbol je umocněn na druhou (na př. $A_1^2 A_2 A_3^2$), nahradíme na základě uvedeného pravidla tento výraz jeho čtvercem (t. j. $A_1^4 A_2^2 A_3^4 = A_1 A_2^2 A_3$).

Tak na př. jeden možný způsob spřažení je takový, že volíme

$$A_1 A_3, A_1 A_2^2$$

a jejich násobením dostaneme složky

$$A_1^2 A_2^2 A_3 = A_1 A_2 A_3^2,\quad A_1^3 A_2^4 A_3 = A_2 A_3,$$

takže $A_1 A_3, A_1 A_2^2, A_1 A_2 A_3^2, A_2 A_3$ jsou spřaženy s rozdíly mezi bloky. Kombinace úrovní rozdělíme nyní na jednotlivé bloky tak, aby pro ně platilo

$$a_1 + 2\,a_2 = j_1 \pmod 3,$$
$$a_1 + a_3 \quad = j_2 \pmod 3,$$

kde $j_1, j_2 = 0, 1, 2$. Tak na příklad jeden z devíti bloků tvoří ty kombinace, pro které

$$a_1 + 2\,a_2 = 0 \pmod 3,$$
$$a_1 + a_3 \quad = 0 \pmod 3,$$

to jest kombinace (0, 0, 0) (1, 1, 2), (2, 2, 1). Podobně na příklad poslední blok tvoří kombinace, pro které

$$a_1 + 2\,a_2 = 2 \pmod 3,$$
$$a_1 + \quad a_3 = 2 \pmod 3,$$

to jest kombinace (0, 1, 2), (1, 2, 1) a (2, 0, 0). Tímto způsobem sestavíme všech devět bloků.

Pro čtyři a více faktorů se provede spřažení na základě podobných principů, jako při experimentu typu 3^3. Se stoupajícím počtem faktorů roste rychle i počet možností uspořádání spřažení. Jelikož však tato uspořádání vyžadují velký počet pokusů, nemají prakticky pro průmyslový výzkum již takový význam.

Neúplné faktorové experimenty

Již v úvodu byl naznačen význam a smysl neúplných faktorových experimentů a bylo uvedeno, kdy je výhodné takto experimenty uspořádat. Nyní se budeme zabývat blíže těmito neúplnými experimenty v případě, že pro každý faktor jsou zvoleny dvě úrovně.

Princip těchto neúplných experimentů ukážeme nejprve na případě čtyř faktorů A_1, A_2, A_3, A_4. Podle formule (1) je

$$A_4 = \frac{1}{2^3}(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1)(a_4 - 1),$$

$$A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2^3}(a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1)(a_4 + 1).$$

Provedeme-li nyní spřažení tohoto experimentu do dvou bloků (pro systém definujících kontrastů I, $A_1 A_2 A_3 A_4$), a uvažujeme-li pouze pokusy pro kombinace obsažené pouze v základním bloku, je zřejmé z rozvojů pro A_4 a $A_1 A_2 A_3$, že bude platit

$$A_4 = A_1 A_2 A_3.$$

Použijeme-li pro násobení tohoto vztahu pravidel vyložených pro spřažení experimentu typu 2^n, vyplývá z uvedeného vztahu

$$A_1 = A_2 A_3 A_4, \qquad A_1 A_2 = A_3 A_4,$$

$$A_2 = A_1 A_3 A_4, \qquad A_1 A_3 = A_2 A_4,$$

$$A_3 = A_1 A_2 A_4, \qquad A_1 A_4 = A_2 A_3.$$

Hodnocení hlavních efektů A_1, A_2, A_3, A_4 je nyní možné za předpokladu, že

$$A_1 A_2 A_3 = A_2 A_3 A_4 = A_1 A_3 A_4 = A_1 A_2 A_4 = 0$$

jinými slovy, jestliže víme, nebo můžeme předpokládat, že všechny tyto interakce jsou nulové (prakticky zanedbatelné vzhledem k hlavním efektům). Rovněž vidíme, že není možno již rozlišovat mezi interakcemi prvního řádu $A_1 A_2$ a $A_3 A_4$, $A_1 A_3$ a $A_2 A_4$, $A_1 A_4$ a $A_2 A_3$, jestliže v každé z těchto tří dvojic není vždy jedna interakce nulová. Hlavní efekty, případně interakce prvního řádu jsou tedy zatíženy jistými chybami — interakcemi druhého a prvního řádu, pokud nelze předpokládat, že tyto interakce jsou nulové. V tomto případě pak mluvíme o strannosti (*alias*) hlavních efektů a interakcí. Takovým způsobem lze počet šestnácti pokusů, které je nutno v experimentu provést, snížit na jednu polovinu, v tomto případě na osm pokusů.

Je zřejmé, že struktura takovýchto neúplných faktorových experimentů závisí na volbě systému definujících kontrastů. V našem případě uvedená volba pro tento systém, t. j. $(I, A_1 A_2 A_3 A_4)$ však byla nejlepší, neboť při jiné volbě bychom na př. dostali tři hlavní efekty zatížené třemi interakcemi prvního řádu, což by již značně způsobilo strannost těchto tří hlavních efektů. Kdybychom však provedli v uvedeném případě pokusy pro kombinace obsažené v bloku, který není základní, z rozvojů pro hlavní efekty a interakce by bylo možno zjistit, že porovnání hlavního efektu a interakce v tomto případě by bylo $A_4 = -A_1 A_2 A_3$. Systém definujících kontrastů by se od prvého lišil pouze znaménkem.

Obecný postup při zmenšování počtu pokusů na jednu polovinu při n faktorech je již zcela analogický uvedenému postupu pro čtyři faktory. Jestliže chceme při neúplném faktorovém experimentu provádět pouze pokusy pro kombinace základního bloku, porovnáme pro n sudé

$$A_n = A_1 A_2 \ldots A_{n-1},$$

pro n liché

$$A_n = -A_1 A_2 \ldots A_{n-1}.$$

Uvedený požadavek vyplývá z rozvoje pro hlavní efekty a interakce.

Uvedeme nyní stručně obecně postup při snižování celkového počtu pokusů v experimentu typu 2^n pouze na část, obsahující 2^{n-k} pokusů. V tomto případě porovnáme k hlavních efektů

$$A_{n-k+1}, A_{n-k+2}, \ldots, A_{n-1}, A_n,$$

s interakcemi různých řádů. Bylo již uvedeno, že pro speciální případ $k = 1$ je nejvýhodnější srovnání

$$A_n = \pm A_1 A_2 \ldots A_{n-1}.$$

Pro $k > 1$ lze tato porovnání hlavních efektů a interakcí zvolit různým způsobem a nelze pro ně udat obecná pravidla. Všechna porovnání lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} A_{n-k+1} &= \pm A_{i_1(1)} A_{i_2(1)} \ldots A_{i_{p_1}(1)}, \\ A_{n-k+2} &= \pm A_{i_1(2)} A_{i_2(2)} \ldots A_{i_{p_2}(2)}, \\ &\ldots \\ A_n &= \pm A_{i_1(k)} A_{i_2(k)} \ldots A_{i_{p_k}(k)}, \\ 1 < p_1&, p_2, \ldots, p_k \leq n - 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Potom systém definujících kontrastů bude obsahovat

$$\begin{aligned} I, \quad & \pm A_{n-k+1} A_{i_1(1)} A_{i_2(1)} \ldots A_{i_{p_1}(1)}, \\ & \pm A_{n-k+2} A_{i_1(2)} A_{i_2(2)} \ldots A_{i_{p_2}(2)}, \\ & \ldots \\ & \pm A_n A_{i_1(k)} A_{i_2(k)} \ldots A_{i_{p_k}(k)}, \end{aligned} \tag{14}$$

a dále bude obsahovat všechny interakce, které dostaneme násobením všemi možnými způsoby dvou nebo více interakcí systému (14), při čemž opět $A_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Počet těchto interakcí systému definujících kontrastů bude 2^k. Poněvadž je 2^k možných systémů (13) vzhledem ke znaménkům + nebo —, lze dostat 2^k různých systémů definujících kontrastů, které se liší vzájemně pouze znaménkem. Každému systému definujících kontrastů odpovídá právě určitý blok ze všech 2^k možných bloků. Základnímu bloku bude odpovídat ten systém definujících kontrastů, pro který u všech interakcí, obsahujících sudý počet A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, je znaménko +, u všech interakcí, obsahujících lichý počet A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ znaménko —.

Strannosti hlavních efektů a interakcí v případě, že příslušné interakce nejsou nulové, lze pak odvodit ze systému definujících kontrastů jeho postupným násobením hlavními efekty a interakcemi. Označíme-li interakce, odpovídající určitému systému definujících kontrastů (včetně příslušných znamének + nebo —), B_j $(j = 1, 2, \ldots, 2^k)$, $B_1 = I$, potom hlavní efekty, případně interakce $A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}$ lze získat jejich násobením celým systémem definujících kontrastů. Tedy hlavní efekty při určitém definujícím kontrastu získáme jako

$$A_i + \sum_{j=1}^{2^k}{}' A_i B_j,$$

a podobně interakce $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p}$ jako

$$A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p} + A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p} \sum_{j=1}^{2^k} B_j.$$

Hlavní efekty a interakce budou nestranné (ve smyslu pojmu *alias*), jestliže součty uvedené jako druhé členy, v obou případech budou nulové. Toho dosáhneme tak, že interakce v těchto součtech alespoň pro hlavní efekty budou pokud možno nejvyšších řádů, neboť tyto interakce jsou již prakticky velmi nepravděpodobné. Toho můžeme dosáhnout vhodnou volbou systému (13). Systém definujících kontrastů, který bude odpovídat tomuto vhodně zvolenému systému (13), bude stejný, jako při volbě systému definujících kontrastů, vhodného pro spřažení celého experimentu. Proto problém konstrukce neúplného faktorového experimentu typu 2^n je totožný s jeho spřažením. V některých pracích jsou tyto nejvýhodnější konstrukce neúplných faktorových experimentů již provedeny, takže je možno jich přímo použít (na příklad v práci [9]).

Uvedené myšlenky objasníme na případě experimentu 2^6, rozděleného do osmi bloků. Zvolíme-li toto porovnání hlavních efektů a interakcí $A_4 = A_1 A_2 A_3, A_5 = -A_2 A_3, A_6 = -A_1 A_3$, dostaneme tento systém definujících kontrastů:

$$I, -A_1 A_4 A_5, -A_2 A_3 A_5, -A_1 A_3 A_6, -A_2 A_4 A_6, A_1 A_2 A_3 A_4; A_1 A_2 A_5 A_6, \\ A_3 A_4 A_5 A_6.$$

Podle obecného pravidla, které bylo uvedeno, odpovídá tento systém osmi pokusům pro kombinace v základním bloku:

$$(1), a_1 a_3 a_5, a_2 a_4 a_5, a_1 a_2 a_3 a_4, a_1 a_4 a_6, a_3 a_4 a_5 a_6, a_1 a_2 a_5 a_6, a_2 a_3 a_6.$$

Potom na příklad hlavní efekt A_1 bude určen

$$A_1 - A_4 A_5 - A_1 A_2 A_3 A_5 - A_3 A_6 - A_1 A_2 A_4 A_6 + A_2 A_3 A_4 + A_2 A_5 A_6 + \\ + A_1 A_3 A_4 A_5 A_6,$$

a podobně budou vyjádřeny další hlavní efekty a interakce. Aby hlavní efekt nebyl ovlivněn interakcemi, je třeba, aby tyto interakce prvních i vyšších řádů byly nulové.

Je proto nutné připomenout, že značné zmenšování celkového počtu pokusů v experimentu, aniž bychom již dříve znali alespoň částečně zákonitosti jevů a možné výsledky pokusů, by mohlo vést k mylným závěrům o těchto zkoumaných jevech. Proto tyto experimenty, jestliže se neprovádějí již další dodatečné pokusy, je nejvýhodnější používat především tehdy, jestliže máme ještě před provedením experimentu na základě předcházejících zkušeností aspoň částečně znalosti o jevech, které studujeme, a můžeme-li zanedbávat takové interakce, které nemohou prakticky přicházet v úvahu.

Analysa rozptylu těchto neúplných faktorových experimentů se provádí stejně jako úplná faktorová analysa, ovšem při analyse rozptylu nedostáváme jednotlivé hlavní efekty a interakce, nýbrž vždy sdružené s $(2^k - 1)$ interakcemi, které jsou zpravidla vyšších řádů.

Theorií neúplných faktorových experimentů typu 3^n vzhledem k jejich značné složitosti se zde nebudeme zabývat.

Závěr

V této práci byly vyloženy a stručně shrnuty principy většiny typů faktorových úplných i neúplných experimentů, které přicházejí v praxi nejčastěji v úvahu. Z důvodů stručnosti nebylo možno se zabývat detailně všemi otázkami, které s faktorovými experimenty souvisí; především je to otázka vlastních numerických výpočtů a sestavení tabulky analysy rozptylu, ve které se výsledky statistické analysy zpravidla stručně shrnují. Tyto výpočty se totiž ve všech typech experimentů provádějí v podstatě stejným způsobem, známým z obecné theorie analysy rozptylu.

Již v úvodu byly nastíněny charakteristické rysy a zvláštnosti většiny průmyslových experimentů. Tyto experimenty jsou často po finanční stránce dosti nákladné a časově zdlouhavé. Proto je nutno využít všech prostředků, které vedou ke snížení celkového počtu pokusů v experimentu, aniž by se získaly o zkoumaných jevech podstatně méně přesné nebo méně spolehlivé informace. Poněvadž se jednotlivé pokusy v experimentu provádějí časově po sobě, což právě nebývá v experimentech zemědělských, ve kterých faktorová analysa původně vznikla, využívá se při uspořádání každého pokusu všech zkušeností a poznatků, které byly získány při minulých pokusech. Tím nabývá průmyslový výzkum postupný, sekvenční charakter. Při faktorových experimentech, které jsme dosud uvažovali, bylo však vždy nutno ihned na začátku experimentu navrhnout a určit, jaké pokusy a kolik jich bude v experimentu provedeno. Tímto způsobem může být někdy celkový počet pokusů zbytečně velký, neboť pro vyhodnocení všech faktorů je nutno provést všechny navržené pokusy (ať již v úplných nebo neúplných experimentech), zatím co někdy lze již po provedení několika pokusů konstatovat, že provedení všech nebo některých dalších určitých pokusů nepřinese žádné další poznatky.

Cílem průmyslových experimentů zpravidla bývá určování optimálních technologických podmínek, jinými slovy zjištění, jaké jsou úrovně faktorů, při kterých dostaneme nejlepší výsledky pro daný technologický postup. Abychom tyto optimální podmínky pro experiment mohli určit, je však nutno zvolit pro každý faktor čtyři i více úrovní. Na druhé straně jsme při faktorových experimentech pro každý faktor volili většinou dvě úrovně, abychom celkový počet pokusů v experimentu příliš nezvětšovali. Proto dosavadní popsané methody uspořádání pokusů nejsou nejvýhodnější pro výzkum optimálních experimentálních podmínek, ale spíše pro srovnávací pokusy, při kterých chceme srovnávat na př. dvě pracovní methody, zařízení a pod. Jak tyto dvě největší nevýhody faktorových experimentů byly v poslední době odstraněny zavedením postupně navrhovaných sekvenčních experimentů pro výzkum optimálních podmínek, bude předmětem dalšího článku.

Na konci tohoto článku je uvedena nejdůležitější literatura pojednávající o faktorových experimentech a pro informaci též nejdůležitější literatura, ve které bylo vyložených faktorových experimentů použito v průmyslových oborech, v nichž autoři tohoto článku pracují, nebo v oborech podobných.

Závěrem je nutno ještě zdůraznit, že termíny, použité v této práci nejsou většinou v české literatuře běžné a musely být proto z velké části zavedeny jako nové, takže nemusí být vždy zcela vystihující.

Literatura

[1] R. A. Fisher, *The Design of Experiments*, (1947).
[2] R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers* (1950).
[3] S. Kolodziejczyk, *On an Important Class of Statistical Hypotheses*, Biometrika, XXI. (1935).
[4] F. Yates, *The Design and Analysis of Factorial Experiments* (1937).
[5] O. Fisher, *Analysa rozptylu* (1956).

[6] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, odst. 11. 11 (1946).
[7] A. Hald, *Statistical Theory with Engineering Applications*, kap. XVI (1952).
[8] W. Cochran, *The Analysis of Variance when Experimental Errors follow the Poisson or Binomial Law*, Annals of Mathematical Statistics, 11 (1940).
[9] Davies, *Design and Analysis of Industrial Experiments* (1954).
[10] Kempthorne, *The Design and Analysis of Experiments* (1952).
[11] Kempthorne, *A Simple Approach to Confounding and Fractional Replication in Factorial Experiments*, Biometrika, vol. XXXIV (1947).

Hutnictví:

[12] S. Rushton, Davies, *Variation in Electrical Properties of Silicon — Iron Transformer Sheet*, J. Iron Steel Inst. (London), 167, 247 (1951).
[13] W. A. Griffith: *Experimental Planning for Rapid Determination of Opimum Process Conditions*, Journal of Metals, 7 (1955).
[14] J. Gélain, A. Barat, *Application de l'analyse factorielle à la comparison des résistances à la traction de divers types d'éprouvettes de fonte*, Fonderie, 117 (1955).
[15] L. Dor, *Des techniques statistiques en siderurgie*, Revue Technique Luxembourgeoise, 47 (1955).

Úpravnictví rud:

[16] C. Dorenfeld, *Five Variable Flotation Tests Using Factorial Design*, Trans. AIME (1951, Decembre).
[17] F. Davis, C. Dorenfeld, *Magma Copper Uses Factorial Design for Better Testing*, Engineering and Mining Journal (1953, August).
[18] G. Boyard, *Application du plan de travail factoriel à la recherche en flotation*, Revue de l'Industrie Minérale (1954, Avril).
[19] W. Mitchel, L. Solenberger, G. Kirkland, *Analysis of Variables in Rod Milling*, Mining Engineering (1954, October).
[20] G. Boyard, *Anwendung eines Faktoren-Arbeitsplanes bei Untersuchungsarbeiten in der Aufbereitung von Toussit*, Erzmetall, B. D. VIII, Beiheft (1955).

Chemie:

[21] E. Rossow: *Zur Versuchplannung zur Klärung von Werkstoff- und Wärmebehandlungsproblemen*, Härterei- Technische Mitteilungen, 7, Heft 4 (1955).
[22] W. S. Connor, W. J. Younden, *Comparison of Four National Radium Standarts*, J. Research Natl. Bur. Standarts, 53, 273 (1954).
[23] W. L. Gore, *Statistical Design in Compounding Elastomers*, Rubber Age, 76, 719 (1955).
[24] E. C. Harrington, *Statistical Experiment in Plastic Fabrication*, SPE Journal, 11, 19 (1955).
[25] C. H. Klute, L. B. Mckee, *Plastics testing at High and Low Temperatures*, Am. Sos. Testing Materials, Bill. 202, 50 (1954).
[26] J. A. Mitchel, *Experiments in Chemical Plant*, Am. Soc. Quality Control Conference Papers, 29 (1952).
[27] C. Ricciuti, J. Coleman, G. Willis, *Statistical Comparison of Three Methods for Determining Organic Peroxides*, Anal. Chem. 27, 405 (1955).
[28] M. Reed, H. Klemm, *Plasticizers in Vinyl Chloride Resins Removal by Oil, Soapy Water and Dry Powders*, Ind. Eng. Chem., 46 (1954).