Václav Havel

O definici střechy stejného spádu nad polygonálním půdorysem

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 5-6, 697--699

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137367

VÁCLAV HAVEL

O DEFINICI STŘECHY STEJNÉHO SPÁDU NAD POLYGONÁLNÍM PŮDORYSEM

V této poznámce je podána definice střechy stejného spádu nad mnohoúhelníkovým půdorysem; střecha definuje se jako zvláštní druh polyedru, a to užitím rozkladu ve vhodné polyedry konvexní.

Vyšetřujme uzavřený poloprostor Π eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_3$, ohraničený rovinou α. „Oblastí" budeme rozumět uzavřenou rovinnou oblast, která je n-násobně souvislá a jejíž hranice se skládá z konečného počtu úseček, polopřímek anebo přímek. „Orientovanou hranicí" H_ω oblasti ω budeme rozumět hranici oblasti ω, přičemž k této hranici je připojena ta z obou možných orientací, vzhledem k níž ω leží po levé straně. Konečně nechť c je pevné kladné číslo.

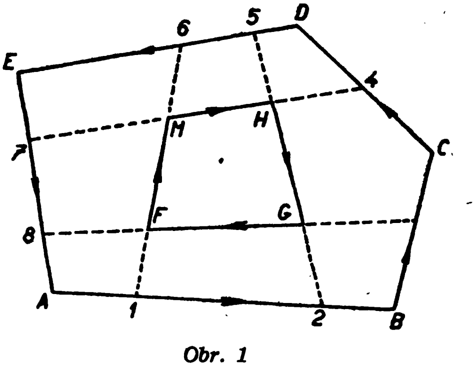
1. Je-li h orientovaná úsečka, polopřímka, resp. přímka, ležící v rovině α, pak symbolem (h) označme uzavřený klín, ohraničený těmito dvěma polorovinami: jednak polorovinou $\varrho \subset \alpha$, jejíž orientovanou hranicí je přímka h^1 obsahující h a orientovaná souhlasně s h, a za druhé polorovinou σ, která má vzhledem k α spád c a jejímž kolmým průmětem do roviny α je polorovina ϱ.

2. Je-li ω konvexní oblast v α s orientovanou hranicí H_ω, pak definujme konvexní střechu nad ω jakožto průnik všech (h), kde $h \subseteq H_\omega$.

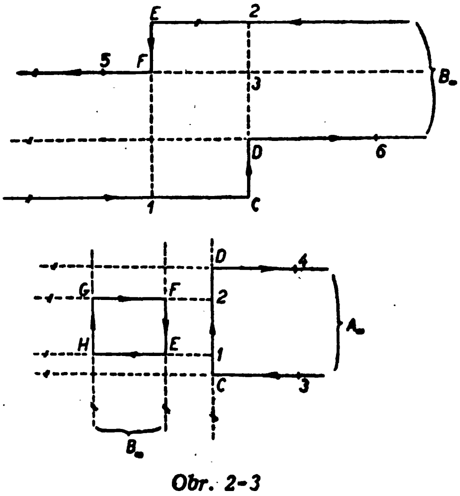
3. Je-li ω oblast v α, pak se orientovaná hranice H_ω rozpadá jednoznačně na dvě disjunktní části H_1, H_2 a to tak, že H_1 tvoří orientovanou hranici jednoduše souvislé oblasti, v níž je obsažena (po případě prázdná) zbývající část H_2.

Nyní přiřaďme každému $h \in H_\omega$ úsečku, polopřímku, resp. přímku h^+, která je sjednocením úseček, polopřímek, resp. přímek, obsahujících h, a ležících v uzávěru oblasti ω a která je orientována souhlasně s h; množinu všech h^+ označme H^+.

Vybereme z H^+ všecky takové podmnožiny $\boldsymbol{P}$, pro něž průnik klínů (p), $p \subseteq \boldsymbol{P}$, je konvexní střechou (označme takovou střechu $S_{\boldsymbol{P}}$). Systém $\boldsymbol{P}$ podmnožin $\boldsymbol{P}$ je určen jednoznačně. Střechu nad ω definujeme pak jako sjednocení všech $S_{\boldsymbol{P}}$, kde $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{P}$



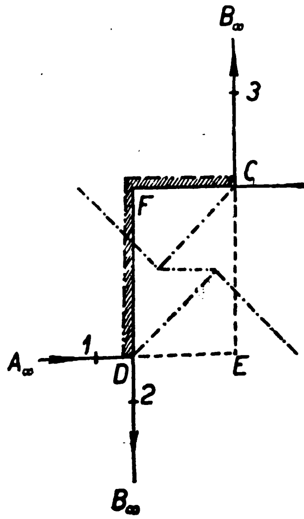
Obr. 1



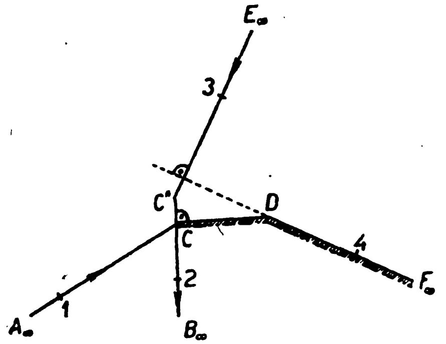
Obr. 2-3

Závěrečné poznámky

S geometrického hlediska je pojem střechy stejného spádu nad mnohoúhelníkovým půdorysem dosti složitý. V předchozích úvahách byl takovýto pojem vymezen; střecha byla definována jako zvláštní případ polyedru, a to užitím vhodného rozkladu na polyedry konvexní. Je pozoruhodné, že pojem střechy je intuitivně tak zřejmý, že při konstruktivních úlohách, týkajících se řešení střech, je možné definici celkem obejít a vést vyšetřování cestou názoru. Autor nemíní tento názorný způsob výkladu řešení střech nějak narušovat. Na druhé straně nechce však být předložený příspěvek pouhou kuriositou; jeho smyslem je ukázat, že theoretickou definici střechy je možno podat bez zvláštních obtíží.



Obr. 4



Obr. 5

Dodatek

1. Na obr. 1 je oblast ω ohraničená orientovanými mnohoúhelníky $ABCDEA$, $EFGHME$. Tuto oblast rozdělíme podle odst. 3 na konvexní oblasti s orientovanými hranicemi $AB38A$, $2BCD52$, $4DE74$, resp. $6EA16$ a na nepodstatné konvexní oblasti s orientovanými hranicemi $A1F8A$, $2B3G2$, $H4D5H$, resp. $7M6E7$. Sjednocení střech nad prvními čtyřmi oblastmi je střechou nad ω.

2. Na obr. 2 je oblast ω neomezená; její hranici tvoří orientované polopřímky $B_\infty 1C$, $D6B_\infty$, $B_\infty 2E$, $F5B_\infty$ a orientované úsečky CD, EF. Podle odst. 3 rozdělíme oblast ω na konvexní oblasti s orientovanými hranicemi $B_\infty 1C35B_\infty$, $B_\infty 2E46B_\infty$, resp. $1C2E1$ a na nepodstatné konvexní oblasti s orientovanými hranicemi $1C3F1$, $4S2E4$, resp. $4D3F4$. Sjednocení střech nad prvými třemi konvexními oblastmi je střechou nad ω.

3. Na obr. 3 je oblast ω opět neomezená; její hranici tvoří orientované polopřímky $A_\infty C3$, $D4A_\infty$ a orientované úsečky CD, FE, EH, HG, GF. Podle odst. 3 rozdělíme ω na konvexní oblast, ohraničenou orientovanými polopřímkami $B_\infty C1$, $1EA_\infty$ (pravý úhel), dále na konvexní oblast, ohraničenou orientovanými polopřímkami $A_\infty G2$, $2DB_\infty$ (opět pravý úhel,) poloroviny, ohraničené orientovanými přímkami $3C$, resp. $D4$, rovinný pás, ohraničený orientovanými přímkami FE, CD a konečně na nepodstatný obdélník s orientovanou hranicí $E12FE$. Sjednocení střech nad prvními čtyřmi konvexními oblastmi je střechou nad ω.

4. Na obr. 4 je odstraněno „zatékání" podél CFD. Řešení provede se užitím pomocné střechy nad oblastí, ohraničenou orientovanými polopřímkami $A_\infty 1D$, $D2B_\infty$, $A_\infty 4C$, $C3B_\infty$. Podrobnosti zde nebudeme uvádět.

5. Na obr. 5 je odstraněno zatékání podél $CD4F_\infty$. Řešení proveďme nejprve užitím pomocné střechy S_1 nad vypuklým úhlem ω_1, ohraničeným orientovanými polopřímkami $A_\infty 1C$, $C2B_\infty$ (kde $C2 \perp CD$) a posléze užitím pomocné střechy S_2 nad dutým úhlem ω_2, ohraničeným polopřímkami $E_\infty 3C^*$, C^*2B_∞ (kde přímka C^*3 je kolmá k $D4$ a její vzdálenost od bodu D rovná se délce úsečky CD). Je-li S_3 sjednocení střech S_1, S_2, pak odstraňme z S_3 tu část, která leží uvnitř kolmo promítacího hranolového prostoru oblasti ω_2, jejíž orientovanou hranicí je $F_\infty 4DC2B_\infty$. Zbylá část z S_3 je hledaná upravená střecha nad oblastí, ohraničenou polopřímkami $A_\infty 1C$, $D4F_\infty$ a orientovanou úsečkou CD, přičemž podél $CD4F_\infty$ je odstraněno zatékání.

Předchozí řešení bylo provedeno úpravou střechy nad polorovinou, ohraničenou orientovanou přímkou $1C$. Je možné též vyjít od střechy nad vypuklým úhlem, ohraničeným orientovanými polopřímkami $A_\infty 1C$, CDG_∞ (G_∞ je nevlastní bod přímky CD) a provést úpravu obdobně jako v předchozím.

Literatura

G. Scheffers, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, I. Band, Berlin, Springer Verlag.

JOSEF VESELKA

O PŘEROVNÁVÁNÍ ŘAD

Pro řady s komplexními čísly (vektory) platí tato velmi úplná věta: Součty konvergentních řad komplexních čísel (vektorů), vzniklých přerovnáním dané konvergentní řady komplexních čísel (vektorů), tvoří množinu, obsahující buď jediné číslo, nebo čísla celé přímky v komplexní rovině, nebo všechna čísla v komplexní rovině.[1])

Obsahem níže uvedeného příspěvku je důkaz věty, že za jistých předpokladů (třetí případ uvedené věty) lze konvergentní řadu komplexních čísel (vektorů) přerovnat k libovolnému předem danému součtu superposicí tří řad z dané řady vybraných.

Budiž $\boldsymbol{A}$ množina všech čísel reálných. Její elementy budeme označovat malými řeckými nebo latinskými písmeny. Dvojici (α, β), $\alpha \in \boldsymbol{A}$, $\beta \in \boldsymbol{A}$ budeme nazývat vektorem, α, β jeho souřadnicemi. Vektory budeme označovat polotučnými stojatými latinskými písmeny. Jsou-li na př. α, β souřadnice vektoru $\mathbf{a}$, je $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$. Číslo $a = |\mathbf{a}| = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ nazveme absolutní hodnotou vektoru $\mathbf{a}$. Je-li $a = 1$, budeme $\mathbf{a}$ nazývat jednotkovým vektorem, nebo také směrem. Jednotkové vektory budeme označovat indexem nula napravo nahoře (na místě exponentu), tedy na př. $\mathbf{a}^0$ (je-li $a = 1$). Vektor o nulových souřadnicích budeme nazývat nulovým vektorem a označíme jej znakem $\mathbf{0}$. Množinu všech vektorů budeme nazývat také kartézskou rovinou a budeme ji důsledně označovat písmenem $\boldsymbol{K}$.

V $\boldsymbol{A}$ budiž součet a součin definován v obvyklém smyslu.

Rovnost dvou vektorů definujeme takto: Je-li $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$, $\mathbf{b} = (\gamma, \delta)$, je $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

---

[1]) K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 2. vyd., str. 398. Steinitzova práce (E. Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 143 (1913), 144 (1914), 146 (1915), citovaná na této straně v poznámce, řeší otázku množiny součtů konvergentních řad komplexních čísel zcela obecně pro n-rozměrná komplexní čísla (n-rozměrné vektory).