Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Stanislav Koukal

Matematika na vysokých školách technických

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 38 (1993), No. 6, 338--343

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137559

vyučování

MATEMATIKA NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH TECHNICKÝCH

Stanislav Koukal, Brno

Matematické myšlenky vznikají ze zkušenosti ... ; jakmile jsou jednou zformulovány, námět začne žít svým typickým vlastním životem ... Jakmile matematická disciplína zajde daleko od svého empirického zdroje, ... stává se stále více estetizující ... ; ve velké vzdálenosti od svého empirického zdroje nebo po přílišném „abstraktním“ zúžení se matematický námět octne v nebezpečí degenerace.

John von Neumann

Matematika v inženýrské praxi a ve výzkumu

Jsem matematik i inženýr. 18 let jsem učil matematiku na vysoké škole. Po roce 1970 následovala nucená inženýrsko-matematická praxe v průmyslu a výzkumu, a to až do roku 1990. Proto se dívám na využívání matematiky i na její výuku na vysokých školách technických z hlediska matematika i inženýra.

Pro inženýra zvládnutí některé matematické disciplíny, nebo alespoň seznámení se s ní, není cílem, ale pouze jedním z prostředků k řešení úkolu, kterým se právě zabývá. Avšak, při všeobecně nízké úrovni matematického vzdělání našich inženýrů, inženýr mnohdy ani nepozná, jaký matematický aparát by mohl k řešení své úlohy použít. Jak má poznat, že by mohl s výhodou použít např. metodu konečných prvků, když o této metodě vůbec neví? Nižší úroveň matematického vzdělání též zabraňuje našim inženýrům užívat ve větší míře odbornou zahraniční literaturu, která je mnohdy psána na vysoké matematické úrovni. Tyto skutečnosti by měli mít na zřeteli jak ti, kdo rozhodují o obsahu výuky matematiky na VŠT, tak i ti, kdo rozhodují o celkovém počtu hodin vymezených výuce matematiky.

Úspěšné řešení mnoha technických úkolů je podmíněno solidním matematickým vzděláním inženýrů a úspěšné řešení vědeckovýzkumného úkolu je podmíněno úzkou spoluprací inženýra, který musí znát profesionálně fyzikální či technickou stránku úkolu, s matematikem, který musí zpravidla nejen pomáhat při matematické formulaci úlohy, ale hlavně pak najít nejvhodnější matematický aparát, kterým je možno již matematicky formulovanou úlohu řešit. Právě aplikace různých matematických disciplín spolu s výpočetní technikou umožňují řešení vědeckovýzkumných úkolů i úkolů inženýrské praxe dříve neřešitelných. Řešení těchto úkolů s využitím výpočetní techniky si na-

Článek vznikl postupným přepracováváním příspěvků přednesených při různých příležitostech, např. v roce 1992 v Praze na kongresu „Československo, Evropa a svět: Věda a umění v mezinárodních souvislostech“ a v Trnavě na 22. celostátní konferenci o vyučování matematice na vysokých školách technických.

Doc. RNDr. Ing. STANISLAV KOUKAL, CSc., (1934) je vedoucím katedry matematiky Vojenské akademie, PS 13, 612 00 Brno.

opak vynucuje vznik nových matematických disciplín. Tak např. idea metody konečných prvků pochází od R. Couranta z roku 1943, avšak trvalo přes 25 let, než nastal bouřlivý rozvoj této metody, poněvadž její praktické využití vyžaduje řešení rozsáhlých soustav lineárních algebraických rovnic, a to je nemyslitelné bez výpočetní techniky.

Cíle výuky matematiky na VŠT

Posluchač vysoké školy technické by měl nejen získat dobré znalosti základů jednotlivých matematických disciplín, se kterými se během studia setkal, ale též schopnost jejich aplikací a aktivního využívání jak v odborných předmětech během studia, tak i po skončení studia. Je pravda, že posluchač musí mít (hlavně u zkoušky) jisté množství dílčích faktických znalostí, avšak výuka matematiky by se měla podílet i na celkovém profilu absolventa. Měla by podstatným způsobem přispívat k tomu, aby absolvent, ať již jako inženýr-technik nebo vědeckovýzkumný pracovník, byl schopen daný problém přesně formulovat, zapsat matematicky a v jednodušších případech ho i sám vyřešit.

Výuka matematiky a výpočetní technika

Mnozí inženýři zaměňují matematiku i její výuku za práci s počítačem, využívání hotových programů. Jsou přesvědčeni, že stačí, nejlépe hned v prvním semestru, naučit posluchače zacházet s nějakým „univerzálním" programem řešícím všechny úlohy ze všech matematických disciplín a výuku matematiky je pak možno redukovat na minimum. Ovšem na otázku, co by vlastně posluchači tím zázračným „univerzálním" programem řešili, kdyby o žádných matematických disciplínách nic nevěděli, již neodpoví. Vedle uvedeného krajního názoru na úlohu výpočetní techniky ve výuce matematiky existuje celá řada mírnějších, avšak stejně nesprávných variant. Patrně nejrozšířenější názor je redukovat převážnou část partií matematiky pouze na příslušné numerické metody a pak užitím již hotových programů provádět numerické výpočty. Tak např. pojednání o soustavách lineárních diferenciálních či algebraických rovnic redukovat na numerické metody řešení těchto soustav podle hotových programů.

Počítač je někdy využíván ve cvičeních z matematiky jako sbírka řešených úloh s podrobnými návody k řešením. Takové využívání výpočetní techniky ovšem není velkým přínosem ke zkvalitnění výuky matematiky. Využití počítače mnohdy umožňuje modifikovat, či zcela změnit, „standardní" postup řešení úloh daného typu tak, že řešení je jednodušší, rychlejší a přesnější a dají se řešit i úlohy, které byly „standardním" postupem prakticky neřešitelné. Právě o takové nestandardní postupy by se měly doplnit postupy (metody řešení) ve výuce matematiky všude tam, kde je to možné.*)

---

*) Pro funkci f, spojitou v rovinné ohraničené a uzavřené množině M, nestandardním postupem výpočtu největší hodnoty, které funkce f nabývá v M, rozumíme např. tento postup:

Množina M se pokryje sítí (třeba čtvercovou) a vypočte se největší hodnota, které funkce f nabývá v uzlech sítě, které patří do M. Když síť je dostatečně jemná, pak tato hodnota se liší libovolně málo od hledané největší hodnoty funkce f v M.

Je zřejmé, že uvedený postup lze snadno zobecnit na výpočet největší hodnoty, které

Vlastní výuka matematiky

Mezi základní pojmy tohoto tématu jistě patří: přesnost výkladu, srozumitelnost výkladu, geometrické a fyzikální interpretace zaváděných pojmů, aplikace probírané látky. Obsah každého z těchto pojmů, a především pak správně vyvážené vzájemné relace mezi nimi, závisí rozhodujícím způsobem na předmětu výuky, úrovni a odborném zaměření posluchačů, času vymezeném výuce a cílech výuky. Nerespektování této skutečnosti má vždy za následek nesplnění výše uvedených cílů výuky matematiky.

Jak již bylo řečeno, matematika na VŠT je především jedním z nejzákladnějších prostředků k tomu, aby posluchači mohli úspěšně zvládnout odborné studium. (Posluchač VŠT si cení výklad některé matematické disciplíny podle toho, nakolik se domnívá, že znalosti z této disciplíny mu budou užitečné v dalším studiu odborných předmětů, případně i po absolvování školy.) Toho by si měl být vědom každý učitel matematiky při zavádění pojmů, jejich interpretacích, a při aplikacích probírané látky. Nové pojmy by měly být zaváděny jen tehdy, je-li to nezbytně nutné a všude, kde je to možné, s nějakou fyzikální či geometrickou interpretací. Stejně tak všude, kde je to možné, by mělo být upozorňováno na bezprostřední fyzikální interpretace uváděných formulí a formule by měly být zapisovány ve tvarech, které jsou nejvhodnější z hlediska jejich praktického užití. Zavedený matematický aparát by měl být zhodnocen z hlediska jeho vhodnosti využití při řešení různých úloh, a to i s ohledem na možnosti využití výpočetní techniky. Uveďme namátkou několik příkladů.

Při pojednání o soustavách lineárních algebraických rovnic je třeba posluchače upozornit na to, že zápis řešení soustavy užitím Cramerova pravidla je mnohdy výhodný, avšak pro skutečný výpočet řešení soustavy více než 4 až 5 rovnic je (až na zvláštní případy) zcela nevhodný vzhledem k počtu operací, které je třeba provést při výpočtu determinantu. Z tohoto hlediska je pak vhodné porovnat výpočet řešení soustavy Cramerovým pravidlem s výpočtem řešení třeba Gaussovou eliminační metodou nebo některou její modifikací.

Z integrálního počtu si musí posluchač odnést základní myšlenku definice Riemannova integrálu a z ní vyplývající způsob jeho aplikací:

Má-li se určit nějaká globální veličina, např. plošný obsah, hmotnost tělesa, tok vektoru plochou atd., pak je třeba správně zapsat „element globální veličiny“, před něj umístit znak integrálu a pod znak integrálu uvést označení oboru, který byl rozdělen na elementy při vytváření jim odpovídajících elementů globální veličiny a „přes který se elementy globální veličiny sčítají“ (přes který se integruje). Je-li obor např. těleso (V), resp. plocha (S), pak globální veličina je rovna trojnému integrálu přes (V), resp. plošnému integrálu přes (S). Tak je-li ϱ hustota (obecně nehomogenní) koule (V), resp. kulové plochy (S), pak element dM hmotnosti koule (V), resp. kulové plochy (S), je roven hmotnosti elementu $(\mathrm{d}V)$ koule (V), resp. hmotnosti elementu $(\mathrm{d}S)$ plochy (S), tj.

$$\mathrm{d}M = \varrho\,\mathrm{d}V, \quad \text{resp.} \quad \mathrm{d}M = \varrho\,\mathrm{d}S,$$

kde $\mathrm{d}V$, resp. $\mathrm{d}S$, je objem elementu $(\mathrm{d}V)$, resp. plošný obsah elementu $(\mathrm{d}S)$,

---

funkce n proměnných nabývá v ohraničené a uzavřené množině n-rozměrného Euklidova prostoru za předpokladu, že je v uvažované množině spojitá.

a tedy hmotnost koule (V), resp. kulové plochy (S), je

$$M = \int\limits_{(V)} \mathrm{d}M = \iiint\limits_{(V)} \varrho \,\mathrm{d}V,$$

resp.

$$M = \int\limits_{(S)} \mathrm{d}M = \iint\limits_{(S)} \varrho \,\mathrm{d}S.$$

Základní věta integrálního počtu (věta Newtonova-Leibnizova)

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

kde f je funkce integrovatelná v $\langle a, b\rangle$ a F je funkce primitivní k f v $\langle a, b\rangle$, zůstává základní větou. Je však třeba upozornit, že určit analytické vyjádření funkce primitivní k funkci f v $\langle a, b\rangle$ je obecně daleko obtížnější než přímý numerický výpočet integrálu

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stačí, aby funkce f byla např. racionální funkcí P/Q, kde Q je polynom alespoň 3. stupně. (Inženýr by při výpočtu integrálu (2) nehledal analytické vyjádření funkce primitivní k f ani v případě, že polynom Q by byl pouze 2. stupně.) Pozorný posluchač, který byl seznámen s různými substitucemi v integrálech, s integrací racionální funkce jejím rozkladem v součet parciálních zlomků a s numerickým výpočtem integrálu (2), se jistě zeptá: „K čemu ty nejrůznější substituce v integrálech a proč se zabývat rozkladem racionální funkce na parciální zlomky, když určitý integrál je vždy možno snadno vypočítat libovolně přesně numericky?“ Následující odpověď by měla být součástí pojednání o integrálním počtu, i kdyby otázka nebyla položena.

I v případě požadavku pouze číselného výpočtu integrálu (2) je někdy vhodné tento integrál nejprve substitucí převést na jiný integrál a až k výpočtu tohoto integrálu použít formuli (1) nebo některou z metod numerického integrování. Určitými integrály závislými na parametrech je definována řada důležitých funkcí (distribuční funkce náhodných veličin atd.) a substitucemi v těchto integrálech převádíme jimi definované funkce na „standardní“ funkce.

Mnoho úloh se dá převést na následující úlohu. Funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je třeba určit funkci F, pro kterou platí

$$(3) \qquad \begin{aligned} &F'(x) = f(x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle a, b\rangle,\\ &F(a) = 0. \end{aligned}$$

Počáteční úloha (3) má řešení

$$(4) \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \langle a, b\rangle.$$

Zvolme přirozené číslo n a označme

$$(5) \qquad \begin{aligned} &x_0 = a,\\ &x_k = x_{k-1} + h \quad \text{pro} \quad k = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

kde $h = (b-a)/n$. Pak podle (4)

$$(6) \qquad F(x_k) = F(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Počítáme-li integrál (2) postupně užitím vzorce (6), přitom všechny integrály

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

vypočteme nějakou numerickou metodou (třeba Simpsonovou), pak při dostatečně velkém n dostaneme s požadovanou přesností nejen hodnotu

$$F(x_n) = F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ale jako mezivýsledky výpočtu i hodnoty

$$F(x_k), \qquad k = 1, \dots, n-1.$$

Výpočet hodnoty $F(b)$ (integrálu (2)) je tedy stejně pracný jako výpočet všech hodnot $F(x_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Uvedeným postupem ovšem dostaneme hodnoty hledané funkce F pouze v izolovaných bodech (5). Je-li požadováno analytické vyjádření funkce F, pak se nám analytický výraz pro F mnohdy podaří určit právě užitím různých substitucí v neurčitém integrálu, nebo rozkladem racionální funkce v součet parciálních zlomků, nebo současným užitím obojího.

Z výše uvedeného je zřejmé, že význam substitucí v integrálech a rozklad racionální funkce v součet parciálních zlomků pro bezprostřední výpočet integrálu (2) skutečně poklesl, ale v jiných úlohách integrálního počtu funkce jedné proměnné jejich význam zůstává nezmenšen. Vedle toho provádění substitucí v určitém integrálu funkce jedné proměnné je dobrou průpravou pro transformace vícerozměrných integrálů a využití rozkladu racionální funkce na parciální zlomky se neomezuje pouze na integrální počet reálných funkcí. Lze ho využít např. pro určení zpětné Laplaceovy transformace racionální funkce.

Podobně, jak bylo poukázáno na velmi užitečnou interpretaci definice Riemannova integrálu a zhodnoceno využití substitucí v integrálním počtu funkce jedné proměnné a rozkladu racionální funkce v součet parciálních zlomků, by se mělo postupovat i v jiných případech.

Při pojednání o ortogonálních systémech by se nemělo zapomenout na Fourierovu řadu funkce $f \in L_2(0,T)$ vzhledem k systému

$$\left\{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{jk\omega t}\right\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}, \qquad T\omega = 2\pi,$$

tj. na vyjádření funkce f ve tvaru

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \mathrm{e}^{jk\omega t} = \\ = \frac{1}{2}F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| \cos(k\omega t + \varphi_k),^*)$$

kde

$$F_k = |F_k|\mathrm{e}^{j\varphi_k} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

a na zavedení a vysvětlení významu pojmů: n-tá harmonická funkce f, stejnosměrná složka funkce f, komplexní spektrum, amplitudové a fázové spektrum. Dále by bylo žádoucí upozornit na interpretaci Parsevalovy rovnosti v souvislosti s výkonem periodického proudu a napětí.

Jestliže se pojednání o Fourierových řadách zredukuje (zvrhne) pouze na výpočet koeficientů a_k a b_k Fourierovy řady

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

funkce f, potom posluchač po absolvování partie „Fourierovy řady“ nezodpoví otázku: „Jaká je amplituda a fáze 3. a 4. harmonické periodického signálu $f(t) = 2\cos(3t + \frac{1}{4}\pi)$?“ Místo okamžité odpovědi začne počítat koeficienty a_k a b_k podle vzorců.

K výuce patří učební texty. Pro výuku jsou dobré či špatné podle toho, nakolik

*) Rovností se zde rozumí rovnost v $L_2(0,T)$.

jejich autor respektoval to, co bylo výše řečeno o výuce, zvláště pak jak dalece vzal v úvahu, komu jsou určeny (úroveň a zaměření čtenářů). Tuto zásadu nerespektovali autoři některých sešitů *Matematika pro vysoké školy technické**), a tak jsou některé z těchto sešitů pro výuku na VŠT téměř nepoužitelné. Je podivuhodné, že si toho po léta nikdo nepovšiml. V jednom ze sešitů věnovanému partii, která má mnoho aplikací v inženýrské praxi, je na jedné z prvních stran definice: *Symbolem μ budeme označovat (nezápornou) míru, která je definována na dané σ-algebře $\mathcal{M}$ podmnožin prostoru X. O všech uvažovaných a prozatím jen reálných funkcích budeme předpokládat, že jsou definovány na X (popř. jen skoro všude) a měřitelné vzhledem k míře μ.* V duchu této definice je veden výklad v celém sešitě. Nedovedu si představit inženýra (neprofesionálního matematika), včetně profesorů, který by po přečtení uvedené definice byl ochoten věnovat tomuto učebnímu textu sebemenší pozornost. Jestliže výuka některých partií matematiky se liší na VŠT od výuky těchto partií na univerzitách (pro budoucí matematiky) pouze tím, že na VŠT je prováděna v kondenzované formě, pak taková výuka nejen že matematické vzdělání budoucích inženýrů nezlepšuje, ale naopak je zhoršuje, poněvadž posluchače od studia matematiky odrazuje. Je velmi obtížné vypracovat přednášku nebo napsat nějakou publikaci (učební texty a pod.) pro studenty VŠT a inženýry z matematické disciplíny, která vyžaduje náročný matematický aparát. Že to ale možné je, ukázal např. K. Rektorys svou knihou *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. Výuka pro inženýry-doktorandy byla podle této knihy velmi úspěšná.

*) Sešitů *Matematika pro VŠT*, věnovaných různým partiím matematiky, dosud vyšlo více než 20. V každém z těchto sešitů je na 2. straně uvedeno, že sešit byl schválen ministerstvem školství jako příručka pro vysoké školy technického směru a na 4. straně je napsáno, že sešit je určen hlavně pro posluchače VŠT, ale že ho přivítají také absolventi těchto škol a technici z praxe. Pro řadu sešitů je tomu asi skutečně tak.

Závěr

Je třeba, aby na každé VŠT byly vzájemnou spoluprací učitelů matematiky s učiteli odborných kateder vytvořeny takové programy výuky matematiky, které by co nejlépe odpovídaly potřebám využívání matematiky v odborných předmětech. Podle těchto programů by pak měla být výuka prováděna tak, aby získané znalosti z matematiky (spolu s výpočetní technikou) mohli posluchači využívat lépe než dosud nejen v odborných předmětech během studia, ale i po skončení studia v inženýrské praxi a při řešení vědecko-výzkumných úkolů. Velmi nebezpečné jsou snahy zaměňovat výuku některých partií matematiky výukou využívání hotových programů pro numerická řešení úloh z těchto partií. Stejně tak je ale špatné, jestliže výuka některých partií matematiky se liší na VŠT od výuky těchto partií na univerzitách pouze tím, že na VŠT je prováděna v kondenzované formě. Pro výuku matematiky na VŠT je třeba více literatury, která vychází ze současných možností aplikací matematiky v technických disciplínách, ale přihlíží i k současným možnostem ve výuce matematiky.