Oldřich Kowalski

O geometrii laplasiánu. I

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 26 (1981), No. 1, 23--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137716

O geometrii laplasiánu I

Oldřich Kowalski, Praha

Předmluva

Tento článek vznikl určitým rozšířením autorovy série přednášek na Zimní škole o abstraktní analýze v Krkonoších (sekce geometrie) v únoru 1980. Rozšíření se týká hlavně podrobnějšího vysvětlení některých základních pojmů.

Je vždy určitým problémem rozhodnout, které partie z moderní diferenciální geometrie by mohly vzbudit širší zájem čtenářů nespecialistů. Zkušenosti ukazují, že dobrou šanci mají taková témata, která buď souvisí s matematickou fyzikou, nebo netriviálním způsobem rozšiřují čtenářovy znalosti z klasické analýzy. Zvlášť přitažlivou se mi z tohoto hlediska zdála monografie M. Bergera a jeho spolupracovníků o spektru laplasiánu Riemannovy variety (Lecture Notes in Mathematics, sv. 194), ze které jsem ve svém výkladu čerpal především. Bylo by ovšem škoda nevyužít možnosti a nepojednat o geometrii laplasiánu i v některých jiných směrech, zejména všeobecně o harmonických funkcích v souvislosti s „neklasickými" větami o průměru.

Protože nejcennější na předložených výsledcích je určitá jejich geometrická intuitivnost, pokusil jsem se dosti podrobně uvést čtenáře do základních myšlenek a pojmů Riemannovy geometrie. Článek je rozdělen na dvě části a jeho obsah je podrobněji členěn podle kapitol.

Obsah I. části:

Obsah II. části:

1. Základní pojmy z Riemannovy geometrie

1.1. Základním pojmem, se kterým budeme dále pracovat, je pojem Riemannovy variety. Nebudeme se zde zabývat abstraktní definicí (viz např. [5], [8]), ale k objasnění

*) Podrobnější výklad ke kapitolám 1 a 2 najde čtenář v knize Leo Bočka *Tenzorový počet*, Matematický seminář SNTL, Praha 1976.

použijeme modelu, který je stejně názorný jako zcela obecný. Podle základního výsledku J. F. Nashe lze totiž každou abstraktní Riemannovu varietu modelovat jako některou podmnožinu eukleidovského prostoru dostatečně vysoké dimenze.

Hladkou varietou (přesněji: *podvarietou*) *dimenze* n v eukleidovském prostoru $R^{n+k}[x_1, \ldots, x_{n+k}]$ rozumíme neprázdnou podmnožinu $M \subset R^{n+k}$ této vlastnosti: ke každému bodu $x \in M$ existuje okolí U_x v prostoru R^{n+k} takové, že průnik $U_x \cap M$ je popsán jako množina řešení soustavy rovnic tvaru

$$f_1(x_1, \ldots, x_{n+k}) = 0\,, \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_{n+k}) = 0\,,$$

kde $f_1, \ldots, f_k$ jsou funkce třídy C^∞ („hladké") definované v U_x a hodnost příslušné Jacobiovy matice v bodě x je rovna k. Názorný příklad dává sféra S^n v prostoru $R^{n+1}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, která je jako celek (nejen lokálně) popsána rovnicí $(x_1)^2 + \ldots + (x_{n+1})^2 = 1$.

Z definice vidíme, že v okolí každého bodu $x \in M$ lze příslušnou část podvariety $M \subset R^{n+k}$ popsat explicitně soustavou relací, v nichž některé proměnné x_i v počtu k jsou hladkými funkcemi zbývajících n proměnných.*) Těchto zbývajících n proměnných pak můžeme považovat za „lokální souřadnice" v okolí bodu x naší podvariety. Přesněji a obecněji, *soustavou lokálních souřadnic v okolí bodu x variety M* nazveme prosté zobrazení okolí tvaru $U_x \cap M$ na otevřenou podmnožinu V n-rozměrného kartézského prostoru $R^n[t_1, \ldots, t_n]$ takové, že příslušné inverzní zobrazení $[t_1, \ldots, t_n] \to [x_1, \ldots, \ldots, x_{n+k}]$ (tzv. *parametrizace* kousku variety) je hladkým zobrazením s Jacobiovou maticí hodnosti n.

Nechť tedy $M \subset R^{n+k}$ je hladká podvarieta dimenze n. V každém bodě $x \in M$ lze definovat tzv. *tečný prostor M_x variety M*. M_x je vektorovým prostorem dimenze n a jeho prvky jsou tečné vektory variety M v bodě x. Na M_x potom můžeme definovat operaci skalárního součinu: pro každé dva vektory $u, v \in M_x$ jejich *skalárním součinem v M_x* nazveme příslušný skalární součin těchto vektorů v eukleidovském prostoru R^{n+k}. Operaci skalárního součinu v M_x označíme g_x a souhrn všech těchto operací pro x probíhající M označíme g a nazveme *Riemannovou metrikou na varietě M*. Dvojici (M, g) nazýváme (hladkou) *Riemannovou varietou dimenze n*.

Riemannova varieta má přirozenou strukturu metrického prostoru, ke které dojdeme takto: mějme dánu *hladkou parametrizovanou křivku* v R^{n+k}, tj. hladké zobrazení $\gamma : \langle a, b \rangle \to R^{n+k}$. Délku křivky γ definujeme vztahem

$$L(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t\,,$$

kde $|\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t|$ označuje velikost tečného vektoru (fyzikálně: vektoru rychlosti) v příslušném bodě křivky. Tato definice se snadno zobecní na křivky po částech hladké. (Ukazuje se

*) Viz větu o implicitních funkcích. Připouštíme ovšem i triviální případ $k = 0$; pak jde o tzv. otevřenou podvarietu — viz dále.

také, že délka parametrizované křivky nezávisí na způsobu parametrizace). Pokud celá křivka leží na varietě $M \subset R^{n+k}$, jsou vektory rychlosti $d\gamma/dt$ tečnými vektory této variety, jejich velikosti $|d\gamma/dt|$ jsou jednoznačně určeny znalostí Riemannovy metriky g, a tedy i délka křivky $L(\gamma)$ je určena touto Riemannovou metrikou. *Vzdáleností dvou bodů x, y na varietě M* pak nazveme infimum délek všech po částech hladkých parametrizovaných křivek, které spojují body x, y a leží celé na varietě M.

Hlavním předmětem Riemannovy geometrie je studium těch vlastností Riemannových variet, které se nemění při izometrických zobrazeních, například při izometrických deformacích v eukleidovském prostoru. Jde nám tedy o vnitřní metrické vlastnosti a vlastnosti z nich odvozené, nikoliv o vlastnosti polohy. (Z toho vychází i abstraktní definice Riemannovy variety, která ji charaterizuje jako objekt „sám o sobě" s využitím topologických prostředků. V Riemannově geometrii se ovšem studují i hluboké vztahy mezi vnitřními metrickými vlastnostmi a vlastnostmi „možných poloh" v eukleidovských prostorech.)

Poznamenejme konečně, že eukleidovský prostor je z našeho hlediska nejjednodušší Riemannovou varietou.

1.2. Ptejme se nyní, které vlastnosti eukleidovského prostoru lze zobecnit na všechny Riemannovy variety. Začněme s těmi nejzákladnějšími: s pojmem rovnoběžnosti a pojmem přímky. Zde již se ukáže vhodným trochu formálnější přístup.

Nechť M je hladká podvarieta dimenze n v R^{n+k}. *Funkce f* definovaná na M se nazývá *hladká*, je-li v okolí každého bodu $x \in M$ restrikcí některé hladké funkce definované na R^{n+k}. Podobně *vektorové pole X* na M (tj. složené z tečných vektorů variety M) nazveme *hladkým*, jestliže je v okolí každého bodu $x \in M$ restrikcí některého hladkého vektorového pole v R^{n+k}. Definujeme *derivaci hladké funkce f podle hladkého vektorového pole X v bodě $x \in M$*:

$$(Xf)_x = \frac{d}{dt}\bigg|_0 f(\gamma(t)),$$

kde $\gamma(t)$ je libovolná hladká parametrizovaná křivka na M splňující počáteční podmínky $\gamma(0) = x$, $d\gamma(0)/dt = X(x)$. Pro x probíhající M pak takto dostaneme hladkou funkci Xf na M. (Symbol Xf je ovšem třeba rozlišovat od symbolu $fX = f \cdot X$, který označuje vektorové pole.)

Ke dvěma hladkým vektorovým polím X, Y na M definujeme hladké vektorové pole $[X, Y]$ (*Lieovu závorku vektorových polí X, Y*) jako to jediné vektorové pole, které na každé hladké funkci f nabývá hodnoty derivace dané vztahem

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf).$$

Například jestliže varieta M je eukleidovský prostor $R^n[x_1, \ldots, x_n]$, potom derivace funkce f podle vektorového pole X se složkami $X^1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, X^n(x_1, \ldots, x_n)$ je dána vzorcem

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} X^i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

a Lieova závorka dvou vektorových polí X, Y se složkami $X^i(x_1, \ldots, x_n)$ a $Y^i(x_1, \ldots, x_n)$ je vektorové pole se složkami

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x_j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} X^j \right), \quad i = 1, \ldots, n .$$

Hladkost všech studovaných objektů budeme všude v dalším mlčky předpokládat, pokud nebude řečeno jinak.

Nyní formální přístup k obecnému pojmu rovnoběžnosti záleží v tom, že nejprve definujeme operaci derivování vektorových polí podle jiných vektorových polí. To je vždy určitá dodatečná struktura, která se nazývá afinní konexe. Rovnoběžnost vektorových polí bude, zhruba řečeno, charakterizována anulováním příslušných „derivací". Význam tohoto pojmu pro naše účely je v tom, že Riemannova metrika vždy určuje jistou přirozenou afinní konexi, která se nazývá Levi-Civitova konexe.

Přesně řečeno, *afinní konexe na varietě M* je operace ∇, která každé uspořádané dvojici vektorových polí X, Y na M přiřazuje další vektorové pole $\nabla_X Y$ na M, přičemž platí tyto čtyři axiómy:

(A1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(A2) $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

(A3) $\nabla_{fX} Y = f \,.\, \nabla_X Y$, ($f$ je funkce)

(A4) $\nabla_X(fY) = f \,.\, \nabla_X Y + (Xf) \,.\, Y$.

Vektorové pole $\nabla_X Y$ se nazývá *kovariantní derivace* vektorového pole Y podle vektorového pole X (vzhledem k dané afinní konexi). Vzhledem k axiómu (A3) jsou definovány v každém bodě $x \in M$ kovariantní derivace $\nabla_u Y$ libovolného vektorového pole Y podle tečných vektorů $u \in M_x$; to jsou opět tečné vektory v bodě x.

K dané afinní konexi je nyní jednoznačně určena geometrická operace paralelního přenosu vektorů podél parametrizovaných křivek. Nechť $\gamma : \langle a, b \rangle \to M$ je regulární parametrizovaná křivka, tj. taková, že $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t \neq 0$ pro každé $t \in \langle a, b \rangle$. Potom vektorová funkce X_γ definovaná podél γ na M (tj. zobrazení, které každému $t \in \langle a, b \rangle$ přiřazuje nějaký vektor $X_\gamma(t) \in M_{\gamma(t)}$) se nazývá *paralelní*, jestliže $\nabla_{\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t} X_\gamma = 0$ pro každé $t \in \langle a, b \rangle$. Přitom kovariantní derivace vektorové funkce X_γ se definuje jako kovariantní derivace takového vektorového pole X, které lokálně rozšiřuje vektorovou funkci X_γ na některé okolí uvažovaného bodu v M. Ukazuje se, že to je korektní definice. Dále se ukáže, že všechny vektorové funkce paralelní podél γ vyhovují lokálně jisté lineární vektorové diferenciální rovnici 1. řádu. Proto každému vektoru zvolenému v počátečním bodě $\gamma(a)$ odpovídá jediná paralelní vektorová funkce podél γ a to je *paralelní přenos vektoru podél křivky γ*. Paralelní přenos zřejmě zachovává lineární relace mezi vektory. Ty parametrizované křivky γ na M, pro něž vektorová funkce $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$

složená z tečných vektorů je paralelní, se nazývají *geodetické křivky*. Geodetické křivky jsou lokálně určeny jako řešení jisté nelineární diferenciální rovnice 2. řádu. Rozborem této rovnice se dá ukázat, že každým bodem a z něho vycházejícím tečným vektorem je určena právě jedna „maximální“ geodetická křivka.

Příklad. V eukleidovském prostoru $R^n[x_1, \ldots, x_n]$ definujme kovariatní derivaci $\nabla_X Y$ jako vektorové pole se složkami

$$\sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

Snadno se ukáže, že všechny axiómy (A1)–(A4) jsou splněny. Vektorová funkce je paralelní podél křivky, právě když je paralelní v obyčejném eukleidovském smyslu. Proto paralelní přenos vektorů mezi dvěma body nezávisí na křivce, která tyto dva body spojuje. Geodetickými křivkami jsou právě všechny přímky probíhané s lineární parametrizací.

Ukazuje se, že analogie mezi geodetickými křivkami a přímkami jdou dosti daleko. Tak například na každé Riemannově varietě (opatřené Levi-Civitovou konexí) je geodetická křivka nejkratší spojnicí každých dvou svých dostatečně blízkých bodů. Existuje-li nejkratší spojnice mezi dvěma body, je to vždy geodetická křivka. A pokud je Riemannova varieta metricky úplná a souvislá, mají každé dva její body (alespoň jednu) nejkratší spojnici.

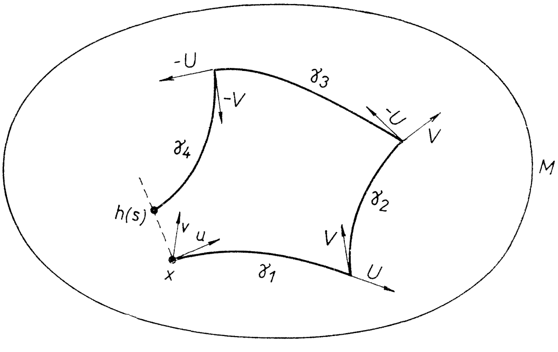
1.3. Zaměříme se nyní na to, v čem se obecná varieta s afinní konexí, resp. obecná Riemannova varieta odlišuje od eukleidovského prostoru, a to i lokálně. S lokálním chováním paralelního přenosu a geodetických křivek jsou spojeny důležité geometrické charakteristiky nazývané torze a křivost. Všimněme si nejprve torze; o křivosti pohovoříme až v souvislosti s Riemannovými varietami.

Operace torze (dané afinní konexe) přiřazuje každé uspořádané dvojici vektorových polí X, Y třetí vektorové pole $T(X, Y)$ na základě pravidla

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] .$$

S využitím definice Lieovy závorky $[X, Y]$ a axiómů (A1)–(A4) se snadno ukáže, že tato operace je bilineární a že v každém bodě variety je hodnota vektorového pole $T(X, Y)$ jednoznačně určena příslušnými hodnotami vektorových polí X, Y. O takové operaci říkáme, že má tenzorový charakter. T se proto také nazývá *tenzorové pole torze* afinní konexe ∇.

Tenzor torze vyjadřuje míru neuzavřenosti „nekonečně malého geodetického rovnoběžníka“ na varietě s konexí. Přesněji: nechť jsou v bodě $x \in M$ dány dva tečné vektory u, v a nechť $s > 0$ je malé číslo. Proveďme tuto konstrukci malého „geodetického rovnoběžníka“ (viz obrázek): sestrojíme nejprve oblouk geodetické křivky určené vektorem u a zakončíme jej v bodě odpovídajícím hodnotě parametru s. V koncovém bodě sestrojíme další geodetický oblouk, tentokrát určený paralelním přenosem vektoru v podél prvního oblouku. Druhý oblouk opět zakončíme v bodě odpovídajícím hodnotě parametru s. Třetí geodetický oblouk bude určen paralelním přenosem vektoru $(-u)$ podél prvních dvou oblouků a čtvrtý bude určen paralelním přenosem vektoru $(-v)$ podél prvních tří oblouků. Koncový bod čtvrtého geodetického oblouku označíme $h(s)$. Pro $s = 0$ položme $h(0) = x$. Potom lze dokázat, že $s \to h(s)$ je hladká křivka, jejíž tečný vektor $dh(0)/ds$ v počátku je nulový. Provedeme nyní substituci $k(s^2) = h(s)$. Potom $k(t)$, $t \geqq 0$, je opět hladká křivka a platí $dk(0)/dt = T(u, v)$,



Levi-Civita dokázal počátkem tohoto století, že *na každé Riemannově varietě* (M, g) *existuje jediná afinní konexe* ∇, *která splňuje tyto požadavky:*

a) *Riemannova metrika g je paralelní vůči konexi* ∇. Jinými slovy, jsou-li dány dvě paralelní vektorové funkce podél nějaké křivky, pak skalární součin odpovídajících vektorů podél této křivky je konstantní.

b) *Torze afinní konexe* ∇ *je identicky rovna nule.*

Pro eukleidovský prostor byla Levi-Civitova konexe popsána v příkladě na konci odst. 1.2. Pro obecnou Riemannovu varietu se dá tato konexe popsat explicitně pouze v lokálních souřadnicích:

Předpokládejme jako obvykle, že $(M, g) \subset R^{n+k}[x_1, \ldots, x_{n+k}]$. Nechť U je otevřená množina v M, v níž existuje lokální souřadnicová soustava $(t_1, \ldots, t_n)$, tj. prosté zobrazení množiny U na otevřenou podmnožinu $V \subset R^n[t_1, \ldots, t_n]$ takové, že inverzní zobrazení φ: $[t_1, \ldots, t_n] \mapsto [x_1, \ldots, x_{n+k}]$ je na V hladké (a dává parametrický popis „kousku" U variety M). V každém bodě $x \in U$ definujme *souřadnicové vektory* $\partial\varphi/\partial t_1, \ldots, \partial\varphi/\partial t_n$ tímto způsobem: jestliže $[a_1, \ldots, a_n]$ je souřadnicové vyjádření bodu x (tj. $\varphi([a_1, \ldots, a_n]) = x$), potom $\partial\varphi/\partial t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ je vektor počáteční rychlosti křivky

$$t \mapsto \varphi(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) .$$

Na množině U nyní definujeme funkce g_{ij} (souřadnicové složky metrického tenzoru g) pravidlem

$$g_{ij} = (\partial\varphi/\partial t_i, \partial\varphi/\partial t_j) \quad i, j = 1, \ldots, n .$$

Funkce $g_{ij} \circ \varphi$ definované na V (tj. příslušná vyjádření funkcí g_{ij} v souřadnicích

$t_1, \ldots, t_n)$ budeme pro jednoduchost označovat opět symboly g_{ij}. Afinní konexe ∇ na U bude podle našich axiómů (A1)–(A4) úplně popsána, jestliže vyjádříme explicitně všech n^2 kovariatních derivací souřadnicových vektorových polí $\partial\varphi/\partial t_i$ podle těchto vektorových polí. Pro Levi-Civitovu konexi dostáváme pak tento vzorec:

$$\nabla_{\frac{\partial\Phi}{\partial t_i}} \frac{\partial\varphi}{\partial t_j} = \sum_l \Gamma^l_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial t_l}, \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$

kde

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial t_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial t_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t_k} \right)$$

a g^{kl} jsou prvky matice inverzní k matici $(g_{ij})^{i=1,\ldots,n}_{j=1,\ldots,n}$.

1.4. Přejděme nyní k pojmu křivosti Riemannovy variety (M, g), přičemž ∇ bude stále označovat Levi-Civitovu konexi takové variety.

Tenzorové pole křivosti přiřazuje každé uspořádané trojici X, Y, Z vektorových polí na (M, g) další vektorové pole $R(X, Y)\,Z$ na základě pravidla

$$R(X, Y)\,Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\,.$$

Opět se ukáže, že hořejší operace má skutečně tenzorový charakter. V každém bodě x variety je tedy třem vektorům u, v, w přiřazen čtvrtý vektor, který označíme $R(u, v)\,w$. V pevném bodě variety hovoříme o *tenzoru křivosti* R_x. Ukážeme jednoduchý geometrický význam tohoto tenzoru.

Nechť u, v jsou dva lineárně nezávislé tečné vektory v bodě $x \in (M, g)$ a nechť w je třetí tečný vektor v x. K vektorům u, v a ke každému malému kladnému s sestrojme geodetický rovnoběžník jako na předchozím obrázku; tím nám speciálně vznikne hladká křivka $h(s)$, $s \geqq 0$, s jejíž pomocí se každý geodetický rovnoběžník uzavírá. Paralelní přenos vektoru w podél uzavřené křivky odpovídající parametru $s > 0$ nyní označme $w(s)$ a přirozeně položme $w(0) = w$. Dostáváme tak hladkou vektorovou funkci $w(s)$ s hodnotami v tečném prostoru M_x. Ukazuje se, že první derivace $w'(0)$ je nulová a druhá derivace $w''(0)$ je rovna právě dvojnásobku vektoru $R(u, v)\,w$. (Viz např. [2].)

V eukleidovském prostoru zřejmě dostáváme při této konstrukci obyčejné rovnoběžníky a pojem paralelního přenosu je zde absolutní, proto je tenzor křivosti identicky roven nule.

1.5. Ze základního tenzoru křivosti se odvozují některé další. Z nich nejdůležitější je sekcionální křivost neboli křivost ve dvojsměrech. Nechť L je některý dvojrozměrný podprostor tečného prostoru M_x Riemannovy variety (M, g). V L vybereme některou ortonormální bázi $\{u, v\}$. Číslo $K(L) = g_x(R(u, v)\,v, u)$ nezávisí na výběru ortonormální báze $\{u, v\}$ a nazývá se *sekcionální křivost v dvojsměru* $L \subset M_x$. Sekcionální křivost je ovšem identicky nulová v eukleidovském prostoru.

V případě dvojrozměrné variety (M, g) existuje v každém bodě $x \in M$ jediný dvojsměr $L = M_x$; sekcionální křivost K závisí jen na bodě variety a nazývá se *Gaussova křivost*.

Názornou geometrickou interpretaci Gaussovy křivosti dostaneme, jestliže je dvojrozměrná varieta (M, g) modelována jako plocha v R^3. (Podotkněme, že ne každá dvojrozměrná Riemannova varieta se dá takto modelovat jako celek; podle klasické věty M. Janeta je to však za předpokladu analytičnosti vždy možné udělat lokálně.)

1. interpretace. Proveďme v bodě x plochy M libovolný normálový řez N a označme k_N křivost průsečné rovinné křivky v bodě x. (Vzhledem k tomu, že na ploše se předpokládá orientace, tj. jsou definovány kladné směry příslušných normál, může mít číslo k_N i záporné znaménko). Potom $K(x) = \min k_N \,.\, \max k_N$, kde N probíhá všechny normálové řezy v bodě x. V této interpretaci je vidět, jak je vnitřní geometrie spojena s vlastnostmi polohy. Při ohýbání plochy v prostoru se obecně mění minimální i maximální křivost normálových řezů ve zvoleném bodě plochy, jejich součin však zůstává zachován, neboť je roven invariantu $K(x)$ závislému pouze na vnitřních metrických vlastnostech plochy. To je známá Gaussova „Theorema egregium".

2. interpretace. Uvažujme na ploše $(M, g) \subset R^3$ kruh o středu x a poloměru r (ve smyslu Riemannovy metriky!). Označme $D_x(r)$ obsah tohoto riemannovského kruhu; pak platí

$$D_x(r) = \pi r^2 \left(1 - \frac{K(x)}{12} r^2 + 0(r^4)\right).$$

Zde ovšem πr^2 je obsah kruhu o poloměru r v eukleidovské rovině. Můžeme tedy říci, že u ploch s kladnou Gaussovou křivostí příslušná „zakřivená" metrika zmenšuje obsahy kruhů a u ploch se zápornou křivostí je naopak zvětšuje (pokud poloměr zůstává dostatečně malý).

Plochy, které splňují identicky $K = 0$, splňují též $R = 0$ a jsou lokálně izometrické s eukleidovskou rovinou. Plochy s konstantní křivostí $K > 0$ jsou všechny lokálně izometrické se sférou $S^2 \subset R^3[x, y, z]$ určenou rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 1/K$. Plochy s konstantní křivostí $K < 0$ jsou vesměs lokálně izometrické s některou Lobačevského rovinou*).

Zcela analogická situace nastává ve vyšších dimenzích.

1.6. *Ricciův tenzor křivosti* variety (M, g) v jejím bodě x je bilineární forma ϱ_x definovaná na tečném prostoru M_x tímto způsobem: pro každé dva vektory $u, v \in M_x$ položme

$$\varrho_x(u, v) = \sum_{i=1}^{n} g_x(R(e_i, u)v, e_i)$$

kde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je libovolná ortonormální báze tečného prostoru M_x.

Ukazuje se, že pro dvojrozměrné variety je Ricciův tenzor ϱ_x v každém bodě x variety úměrný skalárnímu součinu g_x. Pokud taková úměrnost nastane pro Riemannovu

---

*) Aby plocha $M \subset R^n$ byla přesným modelem některé Lobačevského roviny, je nutné a stačí, aby byla navíc jednoduše souvislá a metricky úplná ve své Riemannově metrice. Podle klasického výsledku D. Hilberta nelze Lobačevského rovinu modelovat globálně jako plochu v R^3. Podle věty D. Blanuši lze Lobačevského rovinu modelovat v prostoru R^6 (zatím nejsilnější výsledek).

varietu dimenze $n \geqq 3$, pak se ukazuje, že faktor úměrnosti je nutně konstatní a (M, g) se nazývá *Einsteinův prostor.*

Skalární křivost $\tau(x)$ v bodě x variety (M, g) se definuje vzorcem

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^{n} \varrho_x(e_i, e_i),$$

kde ϱ_x je Ricciův tenzor a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je libovolná ortonormální báze v tečném prostoru M_x.

Tenzor G definovaný v každém tečném prostoru M_x jako bilineární forma

$$G_x(u, v) = \varrho_x(u, v) - \tfrac{1}{2}\tau(x)\, g_x(u, v)$$

se nazývá *Einsteinův tenzor.* Tento tenzor vystupuje explicitně ve známé Einsteinově gravitační rovnici. U Einsteina však nejde o Riemannovy variety v našem smyslu, nýbrž o obecnější, tzv. *pseudo-Riemannovy variety,* u nichž základní skalární součin nemusí být pozitivně definitní. Zvláštní význam pro obecnou teorii gravitace má čtyřrozměrný případ se signaturou (1, 3), pro který se v geometrii používá název *čtyřrozměrná Lorentzova varieta.* Pro pseudo-Riemannovy variety zůstávají v platnosti všechny naše základní pojmy, zejména pojem Levi-Civitovy konexe. Tyto variety však pochopitelně nemůžeme modelovat jako podvariety eukleidovských prostorů. (Dva různé body na varietě mohou mít nulovou vzdálenost.)

Doplňme ještě, že skalární křivost má ve vyšších dimenzích obdobný význam jako Gaussova křivost v dimenzi 2: označme $V_x(r)$ objem malé koule o středu x a poloměru r na Riemannově varietě (M, g) (o definici objemu viz dále odstavec 2.4). Nechť $V_0(r)$ označuje objem eukleidovské koule téže dimenze n a s týmž poloměrem r. Potom

$$V_x(r) = V_0(r)\left(1 - \frac{\tau(x)}{6(n+2)}\, r^2 + 0(r^4)\right).$$

V případě $\dim M = 2$ máme $\tau = 2K$.

2. Základní pojmy z tenzorové analýzy

2.1. Nechť (M, g) je Riemannova varieta dimenze n a ∇ její Levi-Civitova konexe. Skalární součin g_x budeme krátce označovat kulatou závorkou.

Divergence vektorového pole X v bodě $x \in M$ se definuje jako stopa endomorfismu $u \mapsto \nabla_u X$, $u \in M_x$. Jinými slovy, pro každou ortonormální bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tečného prostoru M_x platí

$$(\operatorname{div} X)(x) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} X, e_i).$$

Gradient funkce f na (M, g) se definuje jako vektorové pole X splňující relaci $(X, Y) = Yf$ pro každé vektorové pole Y na M. V každém bodě $x \in M$ je takto gradient určen jednoznačně. Označujeme: $X = \operatorname{grad} f$.

Konečně *Laplaceův diferenciální operátor* (nebo stručně *laplasián*) Δ na (M, g) definujeme výrazem

$$\Delta f = - \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) .$$

Znaménko $(-)$ je zde konvence, která je používána většinou odborníků pracujících v globální analýze, není však zcela ustálena.

V eukleidovském prostoru $R^n[x_1, \ldots, x_n]$ dostávají naše definice význam obvyklý v klasické analýze. Označme $\{e_1, \ldots, e_n\}$ standardní ortonormální bázi prostoru $R^n[x_1, \ldots, x_n]$ a nechť $E_1, \ldots, E_n$ jsou vektorová pole v R^n vzniklá paralelním posouváním vektorů $e_1, \ldots, e_n$. Potom lze každé vektorové pole X na R^n psát ve tvaru $\sum X^i E_i$ a podle definice eukleidovské konexe

$$\nabla_{E_j} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x_j} E_i , \quad \operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x_i} .$$

Dále z definiční relace pro gradient

$$\left(\sum (\operatorname{grad} f)^j E_j, \sum Y^i E_i\right) = \sum Y^i \frac{\partial f}{\partial x_i} ,$$

která má být splněna pro každou n-tici funkcí $Y^1, \ldots, Y^n$, dostáváme

$$(\operatorname{grad} f)^i = \frac{\partial f}{\partial x_i} , \quad i = 1, \ldots, n .$$

Konečně

$$\Delta f = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} . \tag{2.1}$$

Na obecné Riemannově varietě lze naše základní veličiny vyjádřit v lokálních souřadnicích. Nechť na množině $U \subset M$ je zádána soustava $(t_1, \ldots, t_n)$ lokálních souřadnic a použijme opět označení zavedená v poslední části odst. 1.3.

Pro vektorové pole $X = \sum_i X^i \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_i}$ v U platí

$$\operatorname{div} X = \Theta^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\Theta \,.\, X^i)}{\partial t_i} ,$$

kde

$$\Theta = \sqrt{\det (g_{ij})} .$$

Pro funkci f definovanou v U máme

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i},$$

kde

$$f^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial t_j} \quad i = 1, \ldots, n .$$

Konečně laplasián Δ je v U dán výrazem

$$\Delta f = -\Theta^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial(\Theta g^{ij}(\partial f/\partial t_j))}{\partial t_i} .$$

Uveďme nakonec jeden konkrétní příklad, ale bez podrobných výpočtů, které jsou přenechány čtenáři. Nechť $S^2 \subset R^3[x, y, z]$ je jednotková sféra, kterou parametrizujeme ,,skoro celou" pomocí *sférických souřadnic* u, v takto:

$$x = \sin u \cos v,\ y = \sin u \sin v,\ z = \cos u,\ \begin{cases} u \in (0, \pi) \\ v \in (0, 2\pi) \end{cases} .$$

Na základě definic odst. 1.3 dostáváme souřadnicové složky metrického tenzoru ve tvaru $g_{uu} = 1$, $g_{uv} = g_{vu} = 0$, $g_{vv} = \sin^2 u$. Odtud pak

$$\Delta f = -\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\cos u}{\sin u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right].$$

2.2. V této poznámce bych chtěl upozornit na to, že na obecné Riemannově varietě zůstává beze změny základní vlastnost laplasiánu být ,,eliptickým diferenciálním operátorem". Zvolme v bodě $x \in (M, g)$ ortonormální bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tečných vektorů a ke každému vektoru $u = \sum u^i e_i$ z M_x sestrojme příslušnou maximální geodetiku $\gamma_u(t) = \gamma(u^i, t)$. (Pro ni platí počáteční podmínky $\gamma(0) = x$, $d\gamma(0)/dt = u$). Dá se ukázat, že pro $\sum (u^i)^2 \leqq \delta$, kde δ je dostatečně malé číslo, je vždy ještě definován bod $\gamma_u(1)$ geodetiky $\gamma_u(t)$. Případným zmenšením čísla $\delta > 0$ pak dosáhneme toho, že zobrazení $(u^i) \mapsto \gamma_u(1)$ je prostým zobrazením okolí nulového vektoru o v M_x na okolí bodu x v M a inverzní zobrazení $\gamma_u(1) \mapsto (u^1, \ldots, u^n)$ je jistá lokální souřadnicová soustava, které říkáme *normální*. V normálních souřadnicích pak v bodě x platí

$$(\Delta f)_x = -\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{(\partial u^i)^2}\right)_{u^i=0} .$$

2.3. Připomeňme, že *antisymetrická k-lineární forma* na reálném vektorovém prostoru V je reálná funkce k vektorových proměnných z V, která je lineární v každé proměnné a mění znaménko na opačné při transpozici kterýchkoliv dvou argumentů. Speciálně na prostoru V dimenze n tvoří všechny antisymetrické n-lineární formy jednorozměrný vektorový prostor. Každá forma je totiž jednoznačně určena svou hodnotou na některé bázi prostoru V.

Element objemu v bodě x n-rozměrné Riemannovy variety (M, g) je antisymetrická n-lineární forma ω_x, která na některé ortonormální bázi tečných vektorů v tomto bodě nabývá hodnoty 1. Každou bázi $\{f_1, \ldots, f_n\}$ tečného prostoru M_x, pro kterou $\omega_x(f_1, \ldots, f_n) > 0$, nazveme *kladnou bází* vzhledem k ω_x. Zvolený element objemu tedy určuje některou orientaci tečného prostoru M_x. Obráceně, každá orientace jednoznačně určuje některý element objemu. Absolutní hodnota $|\omega_x(f_1, \ldots, f_n)|$ má tento geometrický význam: je rovna objemu n-rozměrného rovnoběžnostěnu sestrojeného na vektorech $f_1, \ldots, f_n$ báze v M_x. Pokud jde o numerické vyjádření, označme $g_{ij} = (f_i, f_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ a nechť (g_{ij}) označuje příslušnou matici řádu n. Potom

$$|\omega_x(f_1, \ldots, f_n)| = \sqrt{\det (g_{ij})}\,. \tag{2.2}$$

2.4. Nechť $(t_1, \ldots, t_n)$ je lokální souřadnicová soustava na otevřené množině $U \subset M$ a φ příslušná parametrizace množiny U pomocí množiny $V \subset R^n[t_1, \ldots, t_n]$ jako v odst. 1.3. Označme opět $g_{ij} = (\partial\varphi/\partial t_i, \partial\varphi/\partial t_j)$. Konverguje-li Lebesgueův integrál

$$\int\!\!\int_V \!\ldots\! \int \sqrt{\det (g_{ij})}\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n\,,$$

nazveme jeho hodnotu *objemem množiny* U. Ze vzorce (2.2) vidíme, že (riemannovský) objem množiny $U \subset (M, g)$ dostaneme integrací (eukleidovských) objemů souřadnicových rovnoběžnostěnů podél U v příslušných lokálních souřadnicích. Obecněji, je-li f libovolná funkce definovaná v U (a vyjádřená pomocí lokálních souřadnic $t_1, \ldots, t_n$) a konverguje-li Lebesgueův integrál

$$\int\!\!\int_V \!\ldots\! \int f \sqrt{\det (g_{ij})}\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \tag{2.3}$$

nazveme jeho hodnotu *integrálem funkce f podle objemové míry na U.*

Z věty o substituci v Lebesguově integrálu se snadno dokáže, že konvergence, resp. hodnota integrálu (2.3) nezávisí na volbě soustavy lokálních souřadnic v U. Příslušný integrál pak krátce označujeme symbolem $\int_U f\, \mathrm{d}v$.

Jestliže je konečně dána spojitá funkce f na celé varietě M, umíme určit integrál $\int_U f\, \mathrm{d}v$ v každém souřadnicovém okolí $U \subset M$, pokud takový integrál konverguje. S využitím topologické konstrukce, tzv. *rozkladu jednotky na varietě*, lze definovat formálně integrál $\int_M f\, \mathrm{d}v$ (obecně ve tvaru nekonečné řady konvergentních integrálů předchozího typu). Pokud tento formálně definovaný integrál splňuje (poměrně silné) kritérium konvergence, jeho hodnota je již jednoznačně určena. Jestliže například (M, g) je vzhledem ke své metrice ohraničená, pak integrál $\int_M f\, \mathrm{d}v$ konverguje pro každou spojitou ohraničenou funkci f. Speciálně integrál $\int_M \mathrm{d}v$ se nazývá *objem variety* (M, g). (Viz podrobný výklad např. v [8].)

Poznámka. Z definice integrálu $\int_M f\,dv$ vidíme, že jestliže $f \geqq 0$ v M, potom $\int_M f\,dv \geqq 0$, a pokud navíc $f \not\equiv 0$, platí $\int_M f\,dv > 0$ (to vše ovšem za předpokladu konvergence).

2.5. Předpokládejme nyní, že (M, g) je souvislá *kompaktní* Riemannova varieta. Bez důkazu uvedeme toto zobecnění klasické věty Gaussovy-Ostrogradského:

Obecná Greenova věta (pro variety bez hranice).

Pro každé vektorové pole X na M platí $\int_M (\operatorname{div} X)\,dv = 0$.*).

Důsledek. *Pro každou funkci f na M platí*

$$\int_M (\Delta f)\,dv = 0 .$$

Poslední vzorec obdržíme tím, že aplikujeme Greenovu větu na vektorové pole $X = -\operatorname{grad} f$.

Každá (hladká) funkce f, která je řešením rovnice $\Delta f = 0$ v některé oblasti $U \subset M$, se nazývá *harmonická* v této oblasti. Funkcí harmonických v okolí některého bodu je „poměrně mnoho", zatímco funkcí harmonických na celé kompaktní varietě je „velmi málo". Platí totiž:

Věta Hopfova. *Jestliže f je funkce, pro niž* $\Delta f \geqq 0$ *na M, potom f = konst. Speciálně, jediné funkce harmonické na celé varietě M jsou konstantní funkce.*

Důkaz. Jestliže $\Delta f \geqq 0$ na M, potom ze vztahu $\int_M (\Delta f)\,dv = 0$ plyne $\Delta f = 0$ na M, tj. f je harmonická. Stačí tedy dokázat druhou část věty. Z definice gradientu, divergence a laplasiánu se snadno odvodí klasický vztah

$$\Delta(f^2) = 2f\,\Delta f - 2(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) .$$

Podle důsledku Greenovy věty

$$\int_M \Delta(f^2/2) = \int_M f\,\Delta f\,dv - \int_M (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\,dv = 0 .$$

Protože $\Delta f = 0$, máme odtud $\int_M |\operatorname{grad} f|^2\,dv = 0$, což dává $\operatorname{grad} f = 0$ na M, tj. $f =$ konst.

2.6. *Lineární diferenciální forma* na hladké varietě M je zobrazení α, které každému $x \in M$ přiřazuje lineární formu α_x na tečném prostoru M_x, přičemž toto zobrazení je hladké v tomto smyslu: pro každé (hladké) vektorové pole X na M je funkce $\alpha(X)$: $: x \mapsto \alpha_x(X(x))$ hladká.

Na Riemannově varietě (M, g) existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi vektorovými poli a lineárními diferenciálními formami. K jejímu popisu použijeme názorné konvence zavedené M. Bergerem [1], který mluví o „muzikálních" izomorfismech:

---

*) Greenova věta pro variety s hranicí se dokazuje pro orientované variety. Pro variety bez hranice není orientovatelnost nutná.

A. Ke každému vektorovému poli X přiřadíme právě jednu lineární diferenciální formu X^b předpisem:

$$X^b(Y) = (X, Y) \quad \text{pro každé vektorové pole } Y.$$

B. Ke každé lineární diferenciální formě α přiřadíme právě jedno vektorové pole $\alpha^\#$ předpisem:

$$(\alpha^\#, Y) = \alpha(Y) \quad \text{pro každé vektorové pole } Y.$$

Konvence bude dobře srozumitelná průniku množiny čtenářů ovládajících noty s množinou čtenářů obeznámených s klasickým tenzorovým počtem: operace b, $\#$ odpovídají totiž tzv. snižování, resp. zvedání indexů u tenzorů v Riemannově prostoru.

Ke každé funkci f na M je přiřazena lineární diferenciální forma $\mathrm{d}f$, tzv. *diferenciál funkce* f, a to na základě pravidla

$$(\mathrm{d}f)(X) = Xf \quad \text{pro každé vektorové pole } X.$$

Ihned vidíme, že $(\mathrm{d}f)^\# = \operatorname{grad} f$ a $(\operatorname{grad} f)^b = \mathrm{d}f$.

2.7. Nechť (M, g) je opět souvislá a kompaktní Riemannova varieta. Budeme nyní definovat tři speciální *pre-Hilbertovy prostory* (tj. Hilbertovy prostory bez požadavku úplnosti):

1. *Prostor hladkých funkcí* $\mathscr{F}(M)$. Pro funkce f, g na M definujme jejich skalární součin v $\mathscr{F}(M)$ vztahem

$$\langle f, g \rangle = \int_M fg \, \mathrm{d}v \, .$$

2. *Prostor hladkých vektorových polí* $\mathscr{D}^1(M)$. Pro vektorová pole X, Y na M definujme jejich skalární součin v $\mathscr{D}^1(M)$ vztahem

$$\langle X, Y \rangle = \int_M (X, Y) \, \mathrm{d}v \, .$$

3. *Prostor lineárních diferenciálních forem* $\mathscr{D}_1(M)$. Pro lineární diferenciální formy α, β na M definujme jejich skalární součin v $\mathscr{D}_1(M)$ vztahem

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha^\#, \beta^\# \rangle \, .$$

(K ověření toho, že jde o pre-Hilbertovy prostory, lze využít zejména poznámky z konce odst. 2.4.)

Výše zavedenou operaci diferenciálu $f \mapsto \mathrm{d}f$ můžeme chápat jako endomorfismus vektorových prostorů

$$\mathrm{d} \colon \mathscr{F}(M) \to \mathscr{D}_1(M) \, .$$

Definujme nyní adjungovaný endomorfismus, tzv. *kodiferenciál*

$$\partial\colon \mathscr{D}_1(M) \to \mathscr{F}(M)$$

vztahem

$$\langle \partial\alpha, f \rangle = \langle \alpha, \mathrm{d}f \rangle \tag{2.4}$$

pro každé $\alpha \in \mathscr{D}_1(M)$, $f \in \mathscr{F}(M)$. Z obecné Stokesovy věty (viz např. [1]) lze odvodit explicitní vyjádření pro kodiferenciál:

$$\partial\alpha = -\operatorname{div}(\alpha^{\#}).$$

Odtud vidíme, že také kodiferenciál je lokální pojem, který dává smysl v každém jednotlivém bodě variety M.

Z posledního vztahu pak obdržíme

$$\Delta f = \partial(\mathrm{d}f). \tag{2.5}$$

Uvažujme nyní laplasián jako lineární diferenciální operátor $\Delta\colon \mathscr{F}(M) \to \mathscr{F}(M)$. Potom

$$\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle,$$

tedy operátor Δ je *samoadjungovaný*. Dále

$$\langle \Delta f, f \rangle = \langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f \rangle = \|\mathrm{d}f\|^2,$$

tedy operátor Δ je *pozitivní*.

Důkaz obou vlastností z (2.4) a (2.5) je přenechán čtenáři jako snadné cvičení.

3. O lokální geometrii laplasiánu

3.1. Jednou ze základních vlastností laplasiánu je, že jednoznačně určuje příslušnou Riemannovu metriku. Přesněji řečeno, platí:

Věta. *Nechť (M_1, g_1), (M_2, g_2) jsou dvě Riemannovy variety, pro něž existuje difeomorfismus*) $\Phi\colon M_1 \to M_2$. Označme Δ_1, Δ_2 příslušné laplasiány. Jestliže pro každou funkci f na M_2 platí $\Delta_1(f \circ \Phi) = \Delta_2 f$, potom je Φ izometrie.*

Čtenář, který zná abstraktní definici Riemannovy variety, si může předešlou větu přeformulovat v této jednodušší formě:

Věta. *Nechť g_1, g_2 jsou dvě Riemannovy metriky na téže varietě M a označme Δ_1,*

---

*) Difeomorfismus je prosté a hladké zobrazení jedné variety na druhou takové, že inverzní zobrazení je rovněž hladké.

Δ_2 jim příslušné laplasiány. Jestliže $\Delta_1 f = \Delta_2 f$ pro každou funkci f, potom $g_1 = g_2$. (Viz např. [6].)

3.2. V eukleidovském prostoru $R^n[x_1, \ldots, x_n]$ platí klasická *věta o průměru*: je-li f harmonická funkce definovaná v oblasti $U \subset R^n$, potom pro každou sféru $S^{n-1}(\bar{x}; r) \subset U$ o rovnici $(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \ldots + (x_n - \bar{x}_n)^2 = r^2$ platí

$$\mu_{\bar{x}}(f; r) = \int_{S^{n-1}} f(x)\,\mathrm{d}\sigma \Big/ \int_{S^{n-1}} \mathrm{d}\sigma = f(\bar{x})\,. \tag{3.1}$$

Zde $\int_{S^{n-1}} f(x)\,\mathrm{d}\sigma$ označuje integrál funkce f podle objemové míry $\mathrm{d}\sigma$ variety $S^{n-1}(\bar{x}; r)$ a $\int_{S^{n-1}} \mathrm{d}\sigma$ je ovšem objem této variety. Obráceně, vlastnost (3.1) předpokládaná pro všechny body $\bar{x} \in U$ a pro všechny dostatečně malé poloměry $r > 0$ dává harmoničnost funkce f.

Přirozenou otázkou nyní je, *pro které Riemannovy variety (M, g) platí věta o průměru pro harmonické funkce.* K formulaci problému je jen třeba podotknout, že ke každému bodu $\bar{x} \in (M, g)$ existuje číslo $r_{\bar{x}} > 0$ takové, že pro každé $r < r_{\bar{x}}$ je *geodetická sféra* $S^{n-1}(\bar{x}; r)$ hladkou podvarietou, která je difeomorfní s eukleidovskou sférou. Stačí vzít v úvahu dostatečně malé (tzv. *normální*) okolí $N_{\bar{x}}$ bodu $\bar{x}$ a v něm normální souřadnicovou soustavu $(u^1, \ldots, u^n)$ (viz odst. 2.2.). Potom každá geodetická sféra $S^{n-1}(\bar{x}; r)$ s dostatečně malým poloměrem r leží v $N_{\bar{x}}$ a její rovnice v normálních souřadnicích má tvar $(u^1)^2 + \ldots + (u^n)^2 = r^2$. (Naproti tomu „velké" sféry nemusí být již sférami v běžném smyslu; například „sféra" o poloměru π na obyčejné jednotkové kulové ploše se skládá z jediného bodu.) Jestliže (M, g) uvažujeme jako hladkou podvarietu v R^{n+k}, potom každá dostatečně malá geodetická sféra v (M, g) je opět hladkou podvarietou v R^{n+k}, a tedy má přirozenou Riemannovu metriku (která ovšem závisí jen na původní metrice g, nikoli na poloze variety (M, g) v eukleidovském prostoru).

Při právě uvedeném omezení se výraz $\mu_{\bar{x}}(f; r)$ na levé straně formule (3.1) (střední hodnota funkce f na sféře) okamžitě zobecní pro případ Riemannovy variety. Zde je ovšem třeba integrovat podle objemové míry příslušné geodetické sféry $S^{n-1}(\bar{x}, r)$.

Úloha určit explicitně všechny Riemannovy variety (M, g), pro které platí věta o průměru (tzv. *harmonické prostory**)) zůstává stále ještě otevřená, ale při nejmenším zajímavým způsobem otevřená. Nazveme Riemannovu varietu (M, g) *dvojbodově homogenní*, jestliže ke každým dvěma uspořádaným dvojicím bodů (x, y), (x', y') takovým, že $d(x, y) = d(x', y')$, existuje izometrie variety (M, g) na sebe, která dvojici (x, y) zobrazuje na dvojici (x', y'). Ukazuje se, že všechny dvojbodově homogenní Riemannovy variety splňují větu o průměru pro harmonické funkce (a to v obou směrech tak jako v klasickém případě). Na druhé straně nebyl dosud nalezen žádný příklad harmonického prostoru, který by nebyl lokálně izometrický s některým dvojbodově homogenním prostorem. Pro dim $M < 5$ bylo dokázáno Lichnerowiczem, že takový příklad ani nemůže existovat. Pro dim $M \geqq 5$ jde o 35 let starou známou hypotézu: každý harmonický prostor je lokálně izometrický s dvojbodově homogenním prostorem.

Pokud bude tato hypotéza potvrzena, bude tím vyřešen i původní problém, protože

*) V moderní teorii potenciálu se ovšem názvu „harmonický prostor" používá v jiném smyslu.

dvojbodově homogenní prostory byly explicitně popsány. Ukazuje se totiž (což je sám o sobě hluboký výsledek), že dvojbodově homogenní prostory jsou právě všechny eukleidovské prostory a všechny tzv. *symetrické prostory hodnosti* 1.*)

Symetrické prostory hodnosti 1 (ostatně i všechny tzv. ireducibilní symetrické prostory) se rozdělují na dvě třídy, tzv. *prostory kompaktního a nekompaktního typu*, které jsou lokálně (nikoliv však globálně) ve vzájemně jednoznačné korespondenci. Platí pak tato *klasifikace* (v níž každý „prostor" zastupuje vlastně celou třídu prostorů navzájem homotetických):

A. *Prostory kompaktního typu:*

eukleidovské sféry S^n,
reálné projektivní prostory $P^n(R)$ (lokálně izometrické se sférami),
komplexní projektivní prostory $P^n(C)$ (dimenze $2n$),
kvaternionové projektivní prostory $P^n(Q)$ (dimenze $4n$),
Cayleova projektivní rovina $P^2(Cay)$ (dimenze 16).

B. *Prostory nekompaktního typu:*

reálné hyperbolické (Lobačevského) prostory $H^n(R)$,
komplexní hyperbolické prostory $H^n(C)$,
kvaternionové hyperbolické prostory $H^n(Q)$,
Cayleova hyperbolická rovina $H^2(Cay)$.

Poznámka. Všechny ireducibilní symetrické prostory, tj. takové, v nichž žádný vlastní podprostor některého tečného prostoru není invariantní vůči všem paralelním přenosům podél uzavřených křivek, byly klasifikovány E. Cartanem (viz např. [6]).

3.3. O obecných vlastnostech harmonických prostorů je toho známo poměrně málo. Nepříliš hluboká je tato charakteristika:

Věta. *Riemannova varieta (M, g) je harmonickým prostorem, právě když splňuje některou ze dvou navzájem ekvivalentních podmínek:*

A. *V okolí každého bodu $p \in M$ existuje nekonstantní harmonická funkce f, která závisí jen na vzdálenosti $d(x, p)$ proměnného bodu x od bodu p.*

---

*) Stručné vysvětlení: *symetrický prostor* je Riemannova varieta (M, g) středově souměrná podle každého svého bodu — středová souměrnost se přitom definuje pomocí geodetických křivek, které zde zastupují obvyklé přímky. (Vlastnost symetrie nemusí mít nic společného s konkrétní polohou variety (M, g) v některém eukleidovském prostoru — je to opět vnitřní metrická vlastnost.) Každý symetrický prostor je homogenní a metricky úplný.

Hodnost symetrického prostoru M je maximální možná dimenze takové podvariety $N \subset M$, která je vytvořena geodetikami prostoru M a přitom má ve všech svých dvojsměrech nulovou sekcionální křivost. Podotkněme ještě, že symetrické prostory hodnosti 1 jsou (kromě eukleidovských prostorů) právě ty symetrické prostory, v nichž lze každé dva jednotkové tečné vektory sestrojené v témže bodě přemístit na sebe některou izometrií daného prostoru. Vedle eukleidovských prostorů také tvoří jedinou známou význačnou třídu Riemannových variet, u kterých známe explicitní formule pro výpočet objemu geodetické koule, resp. „povrchu" geodetické sféry (viz např. [3]).

B. *V okolí každého bodu $p \in M$ je funkce $\Delta(d^2(x, p))$ hladkou funkcí, která závisí jen na vzdálenosti $d(x, p)$.**)

Dále je známo, že každý harmonický prostor je Einsteinovým prostorem (viz dále odstavec 3.5). O harmonických prostorech zevrubně informuje monografie [10].

3.4. Uveďme ještě pro zajímavost tuto poznámku o *harmonických pseudo-Riemannových prostorech* (srv. poznámku na konci odst. 1.6). Funkce vzdálenosti $d(x, y)$ nedefinuje na pseudo-Riemannově varietě metriku, ale pouze pseudometriku, proto ztrácí smysl obvyklá definice geodetické sféry (která zde může mít složitou topologickou strukturu) i klasická formulace věty o průměru. Harmonické prostory se proto v tomto případě definují pomocí navzájem ekvivalentních podmínek A. a B. z předchozího odstavce. Jestliže harmonický prostor je Lorentzova varieta (tj. metrický tenzor g má signaturu $(-, +, \dots, +)$), potom má konstantní sekcionální křivost. Tento výsledek A. Lichnerowicze a A. G. Walkera lze pokládat za uspokojivé řešení problému harmonických prostorů pro Lorentzovy variety.

3.5. Vraťme se opět k riemannovskému případu. A. J. Ledger nalezl určitou nekonečnou posloupnost relací mezi tzv. invarianty křivosti, které úplně charakterizují harmonické prostory. (Invarianty křivosti jsou, stručně řečeno, tenzory, které vzniknou z tenzoru křivosti algebraickými operacemi a postupným kovariantním derivováním.) Splnění konečného podsystému „Ledgerových podmínek" do určitého řádu $2r$ pak znamená pro Riemannovu varietu, že v ní platí *aproximativní věta o průměru řádu* $2r + 2$. Takovými aproximativními větami se (v souvislosti s problémem harmonických prostorů) zabývali A. Gray a T. J. Willmore [4] a došli k těmto zajímavým výsledkům:

1. Na libovolné Riemannově varietě (M, g) platí pro každou harmonickou funkci f formule

$$\mu_x(f; r) = f(x) + 0(r^4) \quad (x \in M, r \to +0)\,.$$

2. Na Riemannově varietě (M, g), $\dim M \geqq 3$, platí pro každou harmonickou funkci f formule

$$\mu_x(f; r) = f(x) + 0(r^6) \quad (x \in M, r \to +0)$$

právě tehdy, když je (M, g) Einsteinův prostor.

3. Na Riemannově varietě (M, g), $\dim M \geqq 5$, platí pro každou harmonickou funkci f formule

$$\mu_x(f; r) = f(x) + 0(r^8) \quad (x \in M, r \to +0)$$

právě tehdy, když Ricciův tenzor ϱ je úměrný metrice g (tj. (M, g) je Einsteinův prostor) a navíc je metrice g úměrný také tenzor $\bar{\varrho}$ definovaný pro každý bod $x \in M$ formulí

---

*) Podotkněme, že funkce $\Delta(d(x, p))$ má pro každou Riemannovu varietu (M, g) v počátečním bodě p singularitu, proto jsme při formulaci podmínky B. použili funkce $d^2(x, p)$.

$$\bar{\varrho}(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} (R(u, e_i) e_j, R(v, e_i) e_j),$$

kde $u, v \in M_x$ a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je libovolná ortogonální báze v M_x.

Pro poslední typ prostorů zvolili Gray a Willmore název „supereinsteinovský" (o vhodnosti tohoto názvu by se ovšem dalo diskutovat).

Další původní výsledky uvedeného typu byly získány autorem; viz [9].

(Pokračování)

Literatura

[1] Berger M., Gauduchon P., Mazet E.: *Le Spectre d'une Variété Riemannienne.* Lecture Notes in Mathematics Vol. *194*, Springer-Verlag, 1971.

[2] Bishop R. L., Crittenden R. J.: *Geometry of Manifolds.* Academic Press, New York, 1964. (Ruský překlad: *Geometrija mnogoobrazij*, MIR, Moskva 1967.)

[3] Gray A.: *The volume of a small geodesic ball of a Riemannian manifold.* Michigan Math. J. *20* (1973), 329—344.

[4] Gray A., Willmore T. J.: *Mean-value theorems for Riemannian manifolds.* Preprint, 1978.

[5] Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W.: *Riemannsche Geometrie im Großen.* Lecture Notes in Mathematics 55, Springer Verlag, 1968. (Ruský překlad: *Rimanova geometrija v celom*, MIR, Moskva 1971.)

[6] Helgason S.: *Differential Geometry and Symmetric Spaces.* Academic Press, New York, 1962. (Ruský překlad: *Diferncial'naja geometrija i simmetričeskije prostranstva*, MIR, Moskva 1964.)

[7] Kobayashi S., Nomizu K.: *Foundations of Differential Geometry I, II.* Wiley (Interscience), New York 1963 a 1969.

[8] Kowalski O.: *Základy matematické analýzy na varietách.* Universita Karlova 1973 a 1975 (skriptum).

[9] Kowalski O.: *The second mean-value operator on Riemannian manifolds.* Sborník konference o diferenciální geometrii a jejích aplikacích ČSSR—NDR—Polsko, Universita Karlova 1981.

[10] Ruse H. S., Walker A. G., Willmore T. J.: *Harmonic Spaces.* Edizioni Cremonese, Roma 1961.

Mezigalaktická látka v kupách galaxií

Jiří Švestka, Praha

Aplikace věty o viriálu na pravděpodobně stabilní kupy galaxií vede k závěru o existenci „skryté hmoty" v kupách galaxií. (Součet hmotností jednotlivých galaxií v kupě je menší než hmotnost kupy vyplývající z věty o viriálu.) Analogicky s naší galaxií, kde je značná část látky ve formě mezihvězdného prachu a plynu, můžeme předpokládat, že difúzní látka mezi galaxiemi je odpovědná alespoň za část „skryté hmoty". Kdyby