Ivan Kolář

Geometrie v současné matematice a její úloha ve vyučování

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 34 (1989), No. 1, 41--54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137835

nostiach, ktoré som v Brazílii získal. Zhrnul som do nej teda podstatné body svojej záverečnej prednášky. Neskôr sa mi donieslo do uší, ako na to reagovala nejaká osoba na ministerstve: „To nám jasne ukazuje, aké nebezpečné je posielať do Brazílie niekoho tak naivného. Bláznivý chlap, ešte nám narobí nepríjemnosti. Vôbec do toho nevidí." Práve naopak. Myslím si, že dotyčná osoba bola naivná, pretože pre ňu bola univerzita iba inštitúciou so zoznamom prednášok a cvičení, tak veru.

Preložil Ľudovít Kuniak

vyučování

GEOMETRIE V SOUČASNÉ MATEMATICE A JEJÍ ÚLOHA VE VYUČOVÁNÍ

Ivan Kolář, Brno

Dovolte mi úvodem konstatovat, že jsem rád vyhověl žádosti organizátorů sedmé brněnské konference o vyučování matematice, zaměřené na postavení geometrie v soustavě všeobecného vzdělávání (Brno, 2.–4. února 1988), o přednesení úvodní přednášky. Vedly mne k tomu dva hlavní důvody.

Za prvé jako člověk v geometrii vědecky pracující po celý svůj dosavadní život jsem o této problematice hodně přemýšlel i četl a také jsem pozoroval situaci ve vyučování geometrie v našem státě. Ve svých úvahách jsem se nemohl zbavit dojmu, že některá rozhodnutí o změnách osnov výuky geometrie na různých stupních škol byla učiněna bez dostatečně hlubokého pochopení podstaty geometrie a její skutečné úlohy při výchově a vzdělávání mladého člověka. Velmi slabé vědomosti z geometrie projevované dnes např. při přijímacích pohovorech na vysoké školy je třeba brát jako velmi vážné varování. Stejně tak se domnívám, že dnes v některých zemích není geometrie jako předmět dostatečně oceňována a na některé její nezastupitelné úlohy se prostě zapomíná. Proto chci část své přednášky věnovat podrobnému výkladu některých základních principů a obecných důsledků, které z nich pro výuku geometrie plynou.

Druhým hlavním motivem mé přednášky je skutečnost, že v současné době ve většině odborných matematických kruhů již definitivně vykrystalizoval názor, že v 70. a 80. letech našeho století došlo v matematice samotné k jistému významnému obratu v jejím vývoji. Podstatná část současné matematiky je dnes v kvalitativně nové vývojové etapě, kterou je možno stručně a výstižně charakterizovat jako období postbourbakistické. Je to tedy období, které následuje po etapě rozhodujícího vlivu školy francouzských matematiků organizovaných pod pseudonymem Nikolas Bourbaki. Tento jev se týká celé matematiky, a proto jej dále rozeberu podrobněji, než by bylo nezbytné z hlediska geometrie samotné. Považuji to za ospravedlněné tím, že na brněnských metodických konferencích jde postupně o celou matematiku. A chtěl bych, aby dostatečná informace o těchto poměrně nových jevech pronikla do co nejširší veřejnosti našich pedagogů a metodiků. Postbourbakistický trend v matematice se totiž zdá mít dlouhodobější charakter a učitelé by se s ním měli seznámit, a tím spíše by si jej měli plně uvědomit lidé, kteří tvorbu osnov nebo přípravu učebnic ovlivňují. Snad se mi podaří svou troškou do mlýna přispět k tomu, aby se problémy vyučování posuzovaly z hledisek opravdu moderní matematiky dneška. která se liší od moderní matematiky včerejška nebo předvčerejška.

Postbourbakistický trend se tedy týká matematiky jako celku. Pro patřičně chápanou výuku geometrie z tohoto trendu vlastně nevyplývají žádné překvapující důsledky. Vím, že někteří naši metodikové geometrie podobné názory již řadu let zastávají. Doufám však, že i oni ocení ucelený pohled na tuto problematiku.

Ve své přednášce se budu snažit probírat paralelně odborné i didaktické aspekty všech uvažovaných problémů. Bylo by sice logičtější i jednodušší věnovat první polovinu přednášky výkladu odbornému a druhou polovinu didaktickým důsledkům. Je však osvědčenou obecnou pedagogickou zásadou, že v přednášce tohoto typu má být teoretický výklad provázen ihned příklady a aplikacemi — a já si nemohu dovolit na konferenci metodiků tuto zdravou zásadu porušovat. Některé obecné pohledy na geometrii mají i své filozofické aspekty. K tomu chci ještě úvodem poznamenat, že ve svých úvahách vždy zůstávám uvnitř matematiky, takže odpovědi na vznikající obecné otázky hledám vždy v matematice samotné.

Specifikem takovéto přednášky o geometrii je i skutečnost, že v ní musí být zachyceno velmi široké rozpětí časové i věcné. Geometrie je věda, která je velmi stará a současně velmi aktuální. Je dobře známo, že v dobách starých Řeků byl vznik a rozvoj geometrie úzce spjat se vznikem vědeckého myšlení vůbec. Na druhé straně, vysoké oceňování geometrie v dnešní matematice můžeme nejlépe doložit rozborem výsledků, za něž jsou v současnosti udělovány tzv. Fieldsovy medaile. Tyto medaile představují nejvyšší světové matematické vyznamenání a z morálního hlediska se považují za srovnatelné s Nobelovou cenou, která v matematice není vypisována. Medaile jsou udělovány jednou za čtyři roky vždy v souvislosti s celosvětovým matematickým kongresem (zkratka: ICM). Např. na posledním ICM r. 1986 v Berkeley v Kalifornii všechny tři udělené medaile dostali geometři. K této problematice se ještě vrátím v závěru přednášky.

Dovolte mi, abych hned zpočátku upozornil, že období formálního přístupu k matematice bylo doprovázeno některými velmi zjednodušenými pohledy na podstatu matematiky. (Období formálního přístupu můžeme zhruba charakterizovat jako období nadměrného zdůrazňování některých formálních aspektů matematické logiky a teorie množin.) Všichni dobře víme, že dvě nejstarší části matematiky jsou aritmetika a geometrie. Z filozofického hlediska zásadní rozdíl mezi nimi spočívá v tom, že aritmetika vznikla ze studia diskrétních veličin a početních operací s nimi, zatímco geometrie vychází z abstrakce souvislých fyzikálních veličin. V psychologickém smyslu je geometrické kontinuum cosi prvotního a tato, svou podstatou fyzikální abstrakce je základním ospravedlněním užívání množiny všech reálných čísel v matematice. V této souvislosti např. přední francouzský matematik René Thom, který je vynikajícím geometrem, zásadním způsobem kritizuje ono známé květnaté prohlášení německého matematika Leopolda Kroneckera z druhé poloviny minulého století: „Přirozená čísla stvořil Pánbůh, vše ostatní je dílem lidským“. Thom tento výrok označuje za velmi povrchní. Vám všem je dobře znám formálně logický proces, kterým se reálná čísla vytvářejí z přirozených čísel postupnou tvorbou nejprve celých čísel, pak konstrukcí racionálních čísel jako určitých tříd dvojic celých čísel a potom užitím Dedekindovy metody řezů racionálních čísel. Tento proces považuje Thom za podstatně vzdálený skutečnému poznávacímu procesu. K tomu je užitečné ještě obecně poznamenat, že odvolávání se na fyzikální intuici v některých více méně filozofických diskusích mezi matematiky není nikterak neobvyklé. Většina z vás jistě ví, že jako jedna z reakcí na objevení se paradoxů teorie množin vznikl tzv. intuicionistický směr v matematice, jehož čelným představitelem byl holandský matematik Leutzen Brouwer. Tento směr zdůrazňoval konstruovatelnost všech užívaných matematických pojmů, a proto nepřipouštěl některé nepřímé důkazy, bez nichž se však neobejde ani klasická matematická analýza. Vynikající geometr první poloviny našeho století Hermann Weyl odmítal některé intuicionistické požadavky prostým poukázáním na to, že výroky teoretické fyziky rozhodně nemají onen charakter, který Brouwer žádá od výroků matematických.

Při zamýšlení se nad počátky výuky geometrie na základní škole musíme také vzít v úvahu, že v předhelénském období lidských dějin, zejména u starých Egypťanů a Babylóňanů, geometrie měla empirický charakter. Počáteční výklad geometrie musí být tedy pojímán zásadně jako studium reálného světa. Základní geometrické pojmy představují jeden z nejelementárnějších abstraktních odrazů reálného světa. Teprve při pokračující výuce geometrie žák postupně shledá – samozřejmě aniž by si to explicitně uvědomoval –, že na základě odrazu geometrických vlastností fyzikálního světa si vytváří určitý jeho model. Zde tedy nejde pouze o studium geometrie jako jistého souboru pojmů a pouček, ale o aktivní zvládnutí jedné důležité formy poznávacího procesu vůbec.

To je úkolem prvních kursů planimetrie. Výklad řady planimetrických pojmů může proto mít na základní škole jen názorný charakter. Buďme upřímní, kdo z nás si ještě vzpomene, jakým způsobem mu byl na základní škole poprvé vysvětlen třeba pojem úsečky? Při základní výuce planimetrie nemůžeme také klást důraz na absolutní přesnost. Na základní škole je třeba logiku ztotožňovat s tzv. zdravým rozumem. Důkaz zde může být chápán a vykládán jen jako jednoduchý myšlenkový proces, jehož účelem je zabránit omylům, které mohou při povrchním pozorování vzniknout. Někde může jít také jen o zdůrazňování logické souvislosti mezi geometrickými poučkami. Proto by i způsob vyjadřování a zapisování výsledků měl být co nejjednodušší a měli bychom se zcela vystříhat jakéhokoliv verbalismu. Musíme si rovněž jasně uvědomit, že nemůžeme zaměřovat žákovu pozornost na dvě podstatně různé věci současně. Zejména tedy: pokud předčasně zavedeme více méně úplnou deduktivní metodu nebo tu či onu formu axiomatického výkladu, musí se to nutně negativně projevit na rozvoji žákovy intuice.

S otázkou verbalismu při výkladu látky souvisí i problematika vypracovávání učebnic geometrie. Domnívám se, že významným zdrojem verbalismu v učebnicích bývá to, že její autor nebo autoři nemají dostatečný nadhled nad probíranou látkou. Na druhé straně, pokud učebnici píše vynikající odborník, může se snadno stát, že dostatečně nezvládne metodický přístup přiměřený věku žáků. Za správné proto považuji vytváření autorských kolektivů složených z předních vědců a ze zkušených pedagogů. V SSSR mají s takovými kolektivy velmi dobré zkušenosti.

Podstatnou součástí geometrického poznávacího procesu je i rýsování. Rýsování zdaleka není jen výchovou ke způsobilosti sestrojovat grafické výtvory. To opravdu bude v budoucnu v mnoha případech nahrazeno počítačovou grafikou. Přitom je třeba zdůraznit, že grafický způsob předávání informací je často velmi účinný. Z výchovného hlediska je však podstatné, že při rýsování žák pracuje vlastně s dvojí abstrakcí: vedle reálného předmětu je tu jednak jeho přesná abstraktní idea a jednak žákem narýsovaný obrázek, který je zatížen rýsovacími nepřesnostmi. A pro lidské myšlení je charakteristické, že proces abstrakce má několikastupňovou formu. Přitom právě v matematice nalézáme nejtypičtější ukázky těchto vícenásobných abstrakčních postupů. V tomto smyslu je také výuka základních partií geometrie podstatnou složkou úvodu do matematiky samotné. René Thom podobnou myšlenku pěkně vyjádřil slovy, že geometrie je prvním krokem ze všedního jazyka do formalizované řeči matematiky.

Dovolte mi nyní říci několik obecných slov týkajících se řešení planimetrických úloh o trojúhelnících, kružnicích apod. Tyto úlohy musíme chápat především jako nezastupitelný prostředek pro výcvik lidského ducha. Proč jsou tyto úlohy nezastupitelné? Za prvé, jednou z obecných námitek vznášených proti tzv. bourbakistickým tendencím ve vyučování matematice je přílišná algebraizace. René Thom dokonce kategoricky prohlašuje, že v algebře vhodné problémy pro základní matematické vzdělávání vůbec neexistují. Na této úrovni je algebraický výsledek buď triviálním důsledkem definic, nebo je k němu třeba tak abstraktních úvah, že leží mimo dosah schopností průměrného žáka. V planimetrii je naproti tomu dostatek problémů nejrůznější obtížnosti. Za druhé, na tuto otázku je třeba se podívat i z hlediska té skutečnosti, že každé lidské myšlení má svoje analyzující a syntetizující složky. Teorie množin a elementární algebra procvičují převážně analytické aspekty myšlení, které však často mívají v intelektuální činnosti jen pomocný charakter. Rozhodující úlohu obvykle mají syntetické myšlenkové akty. Elementární planimetrie je pak základním polem k jejich procvičování. Je samozřejmé, že mnohé úlohy o trojúhelnících a kružnicích nemají praktický charakter a nebudou tedy žáky aplikovány. Musíme si však přiznat, že v každé oblasti výchovy mladé generace musí být některé „neužitečné" složky. Považujeme za samozřejmé, že např. při výuce tělocviku všestranně procvičujeme celý organismus. Bylo by očividně absurdní, kdyby se po učiteli tělocviku na SOU požadovalo, aby s žáky procvičoval jen takové pohyby, které oni budou při svém povolání potřebovat. Vznášet podobné požadavky na výuku matematiky však už některým lidem absurdní nepřipadá.

Je ovšem potřebné snížit počet geometrických faktů z planimetrie, které jsou určeny k zapamatování. Není mým úkolem rozebírat zde důvody současného přetížení žáků a studentů. Nemohu si však odpustit alespoň konstatovat, že toto přetížení je značné. Mnohé planimetrické úlohy jsou opravdu určeny pouze k výcviku tvořivé intelektuální aktivity. Mám-li být konkrétní, mohu jako příklad uvést tětivové a tečnové čtyřúhelníky, které stačí využívat jen jako podklad pro řešení úloh. (Mimochodem — lze o nich zadávat velmi pěkné problémy do matematické olympiády.)

Z filozofického hlediska je třeba ještě poznamenat, že na úlohách o trojúhelnících a kružnicích se žák poprvé cvičí v odvozování obecně platných zákonitostí vůbec. Jde přitom o materiál, který je jeho věku naprosto přiměřený a s kterým se v principu setkává všude kolem sebe. Navíc se žák pomocí rýsování seznamuje se zpětnou projekcí výsledku abstraktního myšlení do objektivní reality, což je rovněž zásadní složka aktivního poznávacího procesu. — To vše jistě dostatečně zdůvodňuje moje výchozí prohlášení o nezastupitelnosti planimetrických úloh ve výchovném procesu.

Přejdu nyní k některým otázkám výuky geometrie v trojrozměrném prostoru, kde chci především zdůraznit rozvíjení prostorové představivosti žáků a studentů. Zatímco na rozvoji studentova logického myšlení se vedle geometrie podílí i řada dalších oborů, pěstování prostorové představivosti je specifickým úkolem geometrie. Vážné nebezpečí v tomto směru spočívá v předčasném zařazení analytické geometrie a v její formální výuce, která může fakticky redukovat prostorovou geometrii na lineární algebru. Prostorová představivost je přitom velmi důležitá i v aplikovaných vědách. Potřebují ji fyzikové i inženýři. Jako jednoduché příklady můžeme třeba uvést teorii krystalů nebo prostorovou strukturu materiálů. Potřebují ji však také lékaři při složitějším prostorovém vyšetřování lidského těla. Přitom prakticky zde vůbec nejde o nějaké použití lineární algebry, ale jen o porozumění prostorovým vztahům.

Zde se negativně projevují všechna omezení výuky deskriptivní geometrie. Je samozřejmé, že musíme soustředěně usilovat o náležité postavení deskriptivní geometrie v naší vzdělávací soustavě. Musíme však současně také přemýšlet o tom, čím nahradit deskriptivní geometrii při rozvíjení prostorové představivosti žáků všude tam, kde zrušena je. Žáci se musí nejen pasívně seznamovat s prostorovými objekty a útvary, ale musí také aktivně řešit různé stereometrické úlohy. K tomu můžeme využívat např. volné rovnoběžné promítání nebo jiné elementární zobrazovací metody. Zde je možno zformulovat celou řadu vhodných úloh, které dokáží žáky zaujmout a někdy i potěšit krásou prostorových útvarů. Při výuce stereometrie je také třeba více užívat modely, přičemž žáci mohou některé jednoduché modely také vytvářet. K zobrazování prostorových vztahů můžeme dnes velmi efektivně využít i počítače s dostatečným grafickým vybavením.

Domnívám se, že nebezpečí formalismu ohrožuje i naši výuku analytické geometrie. Redukce prostorové geometrie na lineární algebru je sice logicky možná, ale z výchovného hlediska je chybná. Z věcného hlediska je jasné, že poučky elementární geometrie lze dokazovat analyticky pomocí nepříliš obtížných výpočtů. Takovýto přístup je však formální a z výchovného hlediska nepřípustně zaměňuje výcvik geometrické představivosti početními cvičeními. V jistém období — to ještě podrobněji rozeberu dále — se takováto redukce analytické geometrie na lineární algebru považovala za progresívní zaměření. Jean Dieudonné vydal r. 1964 knihu o lineární algebře a elementární geometrii, v jejímž úvodu bohatýrsky zdůrazňuje, že v knize není žádný obrázek, protože on obrázky nepotřeboval. Teď to budu komentovat pouze slovy, že trend bezobrázkových učebnic nepřetrval. Naopak, v dnešní době se stále více setkáváme s obrázky nejen v učebnicích geometrie, ale i v moderních učebnicích matematické analýzy a řady dalších oborů matematiky.

Je dobře známo, že v lineární algebře můžeme jako skaláry vektorového prostoru uvažovat prvky libovolného algebraického tělesa. Vezmeme-li konečné algebraické těleso, dostáváme tzv. konečné geometrie, kde na přímkách leží jen konečný počet bodů. Tento jev je zajímavý a vede často k pěkným kombinatorickým úlohám. Domnívám se však, že do základního kursu analytické geometrie to nepatří. Při nevelkém počtu učebních hodin probírání konečných geometrií musí znamenat, že něco jiného zanedbáme; zpravidla to bývají mnohem geometričtější témata a geometrie si musí plnit především svoje vlastní poslání. Zmiňoval jsem se již o tom, že geometrie podstatně vychází z představy fyzikálního kontinua. Pro mne je to dostatečným důvodem k tomu, abych doporučoval v základním univerzitním kursu analytické geometrie jako skaláry používat pouze reálná čísla. Jinak povážlivě riskujeme, že nám nevznikne ani ryba ani rak. Případ libovolných skalárů je přece vskutku zcela analogický — to si student v případě potřeby snadno doplní sám.

Dnešní výklad analytické geometrie začíná axiómy konečně rozměrného vektorového prostoru. Jako model tohoto axiomatického systému se však mnohde uvádí jedině prostor všech n-tic reálných čísel s obvyklými operacemi. V jiných oborech matematiky je však obvyklé, že k určitému systému axiómů se hned dává několik modelů. Nechápu, proč v uvedeném případě se jako model trojrozměrného vektorového prostoru neuvedou orientované úsečky v našem obvyklém prostoru s geometricky definovaným sečítáním a násobením skalárem. Pojem „našeho obvyklého prostoru“ přece student ze střední školy dobře zná a v příkladu (zdůrazňuji: v *příkladu*) jej klidně můžeme použít. Obavy z jeho užití proto, že na univerzitě ještě nebyl zaveden, nepovažuji za puristické, ale za puritánské v obvyklém smyslu tohoto slova. Podobnou výhradu mám i k pojetí vektorového součinu u některých autorů. Je jistě pěkné, když zavedeme vektorový součin n — 1 vektorů v n-rozměrném euklidovském prostoru známou technikou ortogonálního doplňku. Pokud však studenta nenaučíme, že vektorový součin dvou vektorů v trojrozměrném prostoru je vektor, jehož velikost je rovna ploše rovnoběžníka jimi určeného, a je-li tato plocha nenulová, je vektorový součin kolmý k oběma vektorům a tvoří s nimi kladnou bázi, pak jej ochuzujeme nejen z hlediska aplikací matematiky, ale i z hlediska poznávací hodnoty geometrie.

Velmi důležitým prostředkem k rozvoji prostorové představivosti je podrobné studium geometrických vlastností ploch druhého stupně, tedy kvadrik. Nedostatek času nám může nedovolit, abychom podali důkaz úplné klasifikace všech kvadrik. Považuji však za nezbytné uvést alespoň seznam všech typů kvadrik a plochy geometricky popsat. Jestliže studentovi nepředvedeme např. dva systémy přímek na jednodílném hyperboloidu nebo kinematické vytvoření hyperbolického paraboloidu translací paraboly podél paraboly, pášeme na něm pedagogický hřích. Na čem pak vlastně chceme rozvíjet jeho prostorovou představivost? Zapomínat nemůžeme ani na to, že přímkové plochy se přece ve stavebnictví prakticky využívají.

Myslím, že při vhodných příležitostech bychom neměli také zapomínat zdůraznit krásu některých geometrických objektů, konstrukcí a úvah. Estetická výchova sice není vlastním úkolem geometrie, ale většina tvůrčích matematiků potvrdí, že emocionální prožitky krásy v jejich hodně abstraktním počínání mají pro ně značný subjektivní význam.

Je historickou skutečností, že axiomatická metoda uvažování se objevila nejprve v geometrii, a to fakticky již v Euklidových Základech. Širší matematický zájem o axiomatickou metodu se však objevil až v 2. polovině 19. století v souvislosti s neeuklidovskými geometriemi a s paradoxy teorie množin. V první polovině 20. století pak tato metoda získala významné postavení v celé matematice a později začala šířeji ovlivňovat i vyučování matematice. V úvodním období šlo jen o úplné logické zpracování známých matematických teorií. Tehdy se uvažovaly vesměs tzv. univalentní axiomatické teorie, tj. axiomatické soustavy s tou vlastností,že všechny jejich modely jsou vzájemně izomorfní. Šlo zejména o Peanovu axiomatiku přirozených čísel, Cantorovu teorii reálných čísel a první úplný axiomatický systém elementární geometrie, který vytvořil David Hilbert r. 1899.

Hilbertovy axiómy v jistém smyslu přímo navazují na Euklida, dávají však opravdu úplný seznam všech výchozích tvrzení, z nichž lze celou geometrii vybudovat cestou ryzí logické dedukce. Euklides totiž občas mlčky používal ještě další jednoduchá tvrzení, která za axiómy neoznačil. Hilbertovy axiómy byly významným podnětem k vědeckému zkoumání tzv. základů geometrie, které zde však nemohu podrobněji rozebírat. V současné době se oprávněně soudí, že Hilbertův axiomatický systém má již pouze historický význam, takže jen v této formě by se s ním měli dnešní univerzitní studenti seznamovat. Hlavní důvod je v tom, že — stejně jako u Euklida — Hilbertovy axiómy jsou nezávislé na teorii reálných čísel, která se z nich může geometrickými prostředky vybudovat. Na rozdíl od dřívějších dob nám však nyní již čas na takovéto zdvojování opravdu nezbývá. Dnešní axiomatický přístup ke geometrii, který využívá reálných čísel a vektorových prostorů, předložil Hermann Weyl v r. 1918 ve své knize *Prostor, čas a hmota.*

V matematice 20. století se axiomatická metoda začala dále uplatňovat způsobem poněkud odlišným. Základním příkladem jsou algebraické axiómy pro grupu nebo okruh. Souhrn axiómů představuje vlastně implicitní definici zkoumaných objektů a axiómy přitom zdaleka nejsou univalentní, tzn. mají mnoho neizomorfních modelů. Z filozofického hlediska se zde někdy hovoří o uplatnění principu záměrně neúplného poznání, který je charakteristický pro všechnu vědeckou činnost. Takováto abstrakce a zobecnění spočívají v tom, že z reality záměrně vybereme pouze některé její vlastnosti — ve fyzice se takto vytváří např. pojem hmotného bodu nebo tuhého tělesa — a ty pak dále myšlenkově zkoumáme. Pro matematiku je specifické pouze to, že úplným způsobem vymezujeme všechny vlastnosti, které u zkoumaných objektů hodláme uvažovat, a nedovolujeme užívat nic jiného než tyto vymezené vlastnosti čili axiómy a pravidla logiky. Možnost a nezbytnost takového postupu je samozřejmě dána vysokým stupněm abstrakce, s nímž v matematice zpravidla pracujeme.

Rozmach axiomatické metody bývá spojován se skupinou francouzských matematiků organizovaných pod pseudonymem Nikolas Bourbaki. Bude užitečné se nejprve stručně seznámit s historií vzniku této skupiny. Skupina vznikla v 30. letech našeho století v Paříži nejprve ve formě semináře mladých matematiků, který byl programově a s plnou revolučností mládí zaměřen na moderní matematické proudy. Velký obdiv u nich vzbuzovala zejména van der Waerdenova kniha o moderní algebře. Podstatou zorganizování skupiny byl pak projekt sepsání určité encyklopedie či monografie o moderní matematice. Tento bourbakistický traktát začal vycházet r. 1939 pod názvem *Eléments de Mathématique* v pařížském nakladatelství Herman a spol. V té době existovala pouze německá encyklopedie matematiky z let 1900—1930, která však již podstatně zaostávala za současnou matematikou. Místo formy jednotlivých hesel, kterou měla německá encyklopedie, bourbakisté zvolili formu systematického výkladu základních oblastí. Jako východisko byla vybrána axiomatická metoda. Při této práci vytvořili bourbakisté obecný pojem matematické struktury, pod nímž se zhruba řečeno rozumí třída matematických objektů určená jistým typem axiómů (jako jsou grupy, okruhy nebo topologické prostory). Práce na traktátu začala určením různých druhů matematických struktur a jejich rozdělením na struktury základní (zvané též struktury-matky) a na struktury složené. Za tři nejzákladnější typy struktur byly označeny struktury algebraické, struktury uspořádání a struktury topologické.

Při takovémto pohledu na matematiku se začaly objevovat nové hluboké souvislosti mezi teoriemi, které dříve byly od sebe vzdáleny. Tak např. Hilbertovy prostory ve funkcionální analýze mají mnoho společného s euklidovskou geometrií, algebraická geometrie podstatně souvisí s teorií čísel a část klasické teorie geometrických objektů téměř splývá s částí topologické teorie rozvrstvených prostorů.

Je třeba zdůraznit, že bourbakisté oprávněně připisovali axiomatické metodě i tvůrčí smysl. V té době vyjasnění principů určitých teorií opravdu přineslo podstatně nové výsledky v algebře, topologii, funkcionální analýze, v základech diferenciální geometrie i jinde. V řadě případů i progresívní volba axiómů umožnila rychlý další rozvoj příslušné disciplíny; nejhlubších výsledků se takto dosáhlo v teorii integrálu.

Bourbakiho přínos k unifikaci matematiky zasluhuje nejvyššího ocenění. Sami bourbakisté přirovnávali vnitřní život matematiky k velikému městu. Podle jejich vlastního vyjádření se předměstí tohoto města neustále chaoticky rozrůstají, zatímco jeho centrum se periodicky přebudovává, pokaždé podle jasnějšího a promyšlenějšího plánu, který je stále velkolepější a který bourá staré čtvrtě s labyrintem uliček, aby mohly být vybudovány přímější, širší a pohodlnější ulice — spojení s předměstími. Přitom Bourbaki nebyl pouhý systematizátor, ale dokázal svými idejemi podnítit hluboký původní výzkum, např. v některých oblastech algebraické topologie. Hlavní zásluhou Nikolase Bourbakiho je však to, že centrum současného matematického města je zcela uspokojivé pro všechny její základní potřeby.

To můžeme názorně doložit i na charakteru dalšího encyklopedického díla o matematice, které r. 1985 začali vydávat v SSSR pod názvem *Encyklopedie matematických věd.* To je něco jiného než ona pětidílná *Matematická encyklopedie* vydaná v Moskvě v letech 1977—85, v níž jsou zpracována jednotlivá hesla v abecedním pořádku. Tato nová řada sestává z několika dílčích přehledů o jednotlivých oborech matematiky, přičemž se již nepovažuje za nutné věnovat základním strukturám nějakou zvláštní pozornost.

Jako první zde vyšel sedmisvazkový přehled věnovaný teorii dynamických systémů, dalšími tituly jsou teorie funkcí několika komplexních proměnných (zatím vyšly čtyři svazky), komutativní harmonická analýza a teprve později se objevují algebra, topologie (ve smyslu algebraické topologie), analýza a obecná topologie. O progresívním zaměření díla svědčí i to, že od r. 1987 začalo celou sérii přetiskovat v angličtině nakladatelství Springer.

Vývoj vědy jde velmi rychle kupředu a matematika v tomto směru nečiní výjimku. Přirozený vývoj vedl k tomu, že ve své době silné bourbakistické ideje ztratily svoji prvotní působivost, výzkum základních struktur překročil svůj kulminační bod a hlavního pokroku v matematice se začalo dosahovat v jiných směrech, přičemž i metody výzkumu jsou zde někdy hodně odlišné. Je pouze vedlejší věcí, že i sama bourbakistická koncepce měla své drobné trhliny. Tak např. i Bourbaki dnes přiznává, že jeho pojem struktury nevystihuje všechny potřeby současné matematiky. Jean Dieudonné píše: „Pojem struktury byl od té doby překonán pojmy kategorie a funktoru, které ho obsahují v obecnější a vhodnější formě." Stejně tak důsledné stavění základních struktur před struktury složené se ukázalo být poněkud schematické. Např. na řadě míst v obecné topologii se náhle stává podstatným užití reálných čísel, která jsou v bourbakistické hierarchii zařazena mnohem později. Podstatné je, že dnes musíme konstatovat, že Bourbaki byl výrazně jednostranný. Vývoj matematiky je výsledkem mnohem většího počtu faktorů: jde o souhrn analýzy a syntézy, dedukce a indukce, axiomatické metody i konstrukcí. Každý vědecky pracující matematik může potvrdit, že v tvůrčím matematickém procesu má indukce mnohem významnější úlohu, než je patrno ze závěrečného tvaru výzkumu. Tvůrčí matematik musí často svým způsobem i experimentovat, třebaže toto experimentování se provádí se zcela abstraktním materiálem. Z vědeckého hlediska byl Bourbaki ve své době sice velmi progresívně jednostranný, ale přece jen byl jednostranný.

Již od 60. let našeho století se hovoří o rysech určitého neoklasicismu v matematice. Jeho základním znakem je, že matematika se po určitém období věnovaném především intenzívní práci na rozvoji matematických struktur vrací k některým problémům klasického charakteru. S využitím nového matematického aparátu je současná matematika schopna tyto klasické problémy mnohem lépe chápat a na základě jejich moderní formulace je často může úspěšně řešit. Je jen věcí osobního založení každého matematika, zda dává přednost řešení jednotlivých konkrétních problémů nebo zda raději studuje určitá „matematická společenství". Podíl konstrukcí a kombinačních úvah na řešení matematických problémů znovu vystupuje plně do popředí.

V osmdesátých letech pak i někteří současní spolupracovníci bourbakistické skupiny otevřeně konstatují toto nové zaměření matematiky. (Nejde samozřejmě již o zakládající členy skupiny, neboť řádné členství v ní je limitováno věkem do 50 let.) V souvislosti s hodnocením ICM 86 v Berkeley píše Pierre Cartier v 32. čísle členského časopisu francouzské matematické společnosti „Gazette des mathématiciens" z ledna 1987: „Závěrem chci říci, že kongres v Berkeley zcela potvrdil můj pocit velkého obratu, kterým matematika prochází v 80. letech. Opouští se ten způsob pěstování matematiky, který je založen na postupech spojených se jménem Bourbaki, jako jsou algebraizace, axiomatizace, zdůrazňování čistých či základních struktur ... To je doprovázeno významnou generační výměnou: tolik známých osobností tam nebylo vůbec nebo tam byli jen na chvíli. Jaké jsou ty nové tendence? Je to *návrat ke klasickým problémům*, které nám mezi jinými odkázal Poincaré, je to *vzkříšení klasické mechaniky* (ve formě modernizované užitím diferenciální geometrie a topologie), je to obnovená symbióza s *velkou tradicí matematické fyziky* (přičemž ovlivňování je dnes oboustranné) a rozvoj *experimentální matematiky* (neboli simulování), za nějž vděčíme užívání počítačů, které začínají panovat ... Konec věže ze slonoviny!"

Také mnozí další přední matematikové dnes konstatují, že tzv. aplikovaná matematika a tzv. čistá matematika jsou v současnosti spolu svázány více než kdykoliv v tomto století. Tyto vazby se přitom zdaleka netýkají jen rutinního využití počítačů. Některé z Cartierem jmenovaných aplikačních motivací dnes hluboce souvisejí s nejryzejším základním matematickým výzkumem.

V současné době činnost bourbakistické skupiny pravidelně pokračuje formou organizování semináře. V r. 1985 jsem měl to potěšení jednoho z těchto seminářů se zúčastnit. Je to velká vědeckospolečenská událost, při níž je největší matematická posluchárna na Sorbonně až nepříjemně přeplněna. Tradice zůstává zachována v tom, že přednášející jsou mladí a že Bourbaki zůstává anonymní — semináři nikdo nepředsedá. Referáty nejsou převážně o vlastních výsledcích, ale výběr látky je dán snahou pokrýt vše nejdůležitější v současném vývoji matematiky. To ovšem znamená, že náplň přednášek naprosto nemá „fundamentální" charakter. Moji pařížští přátelé mne pak informovali, že se už pravděpodobně nepočítá s tím, že by Bourbaki vydával další knihy. Uváděli k tomu i některé technické důvody; obecně je však možno konstatovat, že Bourbaki své nejvlastnější poslání — položit široké základy pro celou moderní matematiku — již fakticky naplnil.

Vznik bourbakismu v matematice a její přechod do postbourbakistického období byly tedy přirozeným vývojovým procesem. Dovolte mi zdůraznit, že postbourbakistické období je dialektickou negací negace předbourbakistického období. Jestliže by chtěl někdo z vědeckého hlediska ztotožňovat postbourbakistické období s předbourbakistickým, může to být jen projev konzervatismu.

Odlišná je však situace s uplatňováním některých tzv. bourbakistických tendencí ve vyučování matematice a zejména pak ve vyučování geometrii. Zde už v mnoha případech nejsme oprávněni hovořit o dialektické negaci negace jako vyšším vývojovém stadiu, ale musíme konstatovat, že jde o opravování chyb, které vznikly z nedostatečně hlubokého pochopení celé problematiky. Začněme jednoduchým empirickým poznatkem: každý vědecky pracující matematik ví, že Bourbakiho knihy nelze — až na drobné výjimky, které však jen potvrzují pravidlo — užívat jako učebnice. Snad se mi v mém předchozím výkladu podařilo dostatečně osvětlit, že cíle, které si kladl Bourbaki, jsou naprosto odlišné od úkolů vyučovacího a výchovného procesu. Tak např. dnes je zcela jasné, že pojem množiny je základem logického myšlení vůbec a matematiky zejména. Přitom je zřejmé, že studium teorie množin není onou „královskou cestou" k porozumění matematice nebo k úspěchu v matematickém výzkumu. Mnozí matematici dnes s mírnou nadsázkou prohlašují, že při výuce teorie množin vůbec matematiku neučíme. Vlastní matematika začíná až za elementární teorií množin a osvojovat si ji můžeme jedině aktivním řešením problémů a prováděním konstrukcí nejrůznějších typů. I zde plně platí známý Hegelův výrok, že plavat se nelze naučit povídáním o plavání na břehu řeky – to musíme skočit do vody.

Dovolte mi ještě poznamenat, že logika a teorie množin zdůrazňují algoritmické aspekty matematiky. Ale matematika svou podstatou naprosto není vědou o algoritmech. To může dosvědčit každý tvůrčí matematik, který se při vlastní výzkumné práci setkal se dvěma zcela různými důkazy téhož tvrzení.

René Thom podal důvtipnou kritiku některých rysů bourbakismu v článku z r. 1971 nazvaném *Moderní matematika: výchovný a filozofický omyl?* Nemusím to již rozebírat v celé šíři. Můj výklad pokročil již natolik, že se zde mohu omezit jen na ty aspekty, které se v užším smyslu dotýkají geometrie. Bourbakistické tendence k algebraizaci geometrie jsou pedagogicky neopodstatněné. Jedním z jejích rysů je *přílišné* užívání transformačních grup se snahou využít geometrie k výuce těch vlastností transformačních grup, které budou užitečné jinde v matematice. Formálnost tohoto přístupu šla ve Francii až tak daleko, že se předkládal obecný pojem transformace žákům, kteří neznali jiný příklad transformací než transformace lineární. Je třeba tedy doufat, že upouštění od přílišné algebraizace umožní renesanci geometrické složky výuky. Opravdu moderní pohled na matematiku jasně ukazuje, že současná matematika vyžaduje sjednocení geometrie a algebry, nikoli nahrazování geometrie algebrou.

Doufám, že bude správně pochopeno, že moje argumentace nesměřovala proti teorii množin jako takové, ale pouze proti jejímu nepřiměřenému zařazování do výuky. Já se proto pokusím shrnout svoje úvahy o bourbakismu a vyučování geometrie konstatováním, že podle mého soudu jsou obě tyto množiny disjunktní.

Po podrobném rozboru axiomatické metody a jejího postavení v opravdu současné matematice, který má pro výuku geometrie zásadní význam, proberu ještě stručně některé další obecné ideje, jimiž geometrie obohatila celou matematiku.

Geometrie vytvořila teorii modelů jako nástroj k prokazování nedokazatelnosti jistých matematických vět. Nejdříve šlo o konstrukci modelů neeuklidovských geometrií, které prokazují nezávislost Euklidova postulátu o rovnoběžkách na ostatních geometrických axiómech. Projektivní model Lobačevského roviny, který je tvořen vnitřkem elipsy s obvyklými přímkami a vhodně zavedeným měřením délek, je natolik srozumitelný každému studentovi, že by neměl chybět v žádném univerzitním kursu geometrie. Sám fakt nedokazatelnosti Euklidova postulátu o rovnoběžkách je tak matematicky i obecně kulturně významný, že mu můžeme věnovat jednu vyučovací hodinu, která k tomu bohatě postačuje.

Felix Klein ve svém slavném erlangenském programu ukázal, že klasické geometrie lze chápat jako geometrie určitých transformačních grup. V dnešní terminologii jde o tzv. hladké transformační grupy, které dnes hrají významnou úlohu v řadě oblastí teoretické fyziky. Ve výuce matematiky se to však stále dostatečně neodráží. Je to škoda – v prvé řadě pro matematiku.

Další obecnou ideou, která vznikla v geometrii, je princip duality. Tento prostý princip záměny bodu nadrovinou vypadá zpočátku velmi jednoduše, ale již po krátkém čase se ukazuje, že takto se získávají opravdu netriviální výsledky.

Dnes se už vyskytují studenti, kteří o principu duality slyšeli pouze v teorii kategorií. Nejsem si jist, zda s tím vystačí na celý svůj matematický život.

V dosavadních úvahách jsem snad dostatečně zdůvodnil, že geometrické myšlení je podstatnou složkou matematického myšlení vůbec. Ve zbývajícím čase chci ještě ukázat, že neméně významné je i postavení geometrie v současné matematice. V Cartierově hodnocení ICM 86 jsme slyšeli o vzkříšení mechaniky ve formě modernizované užitím diferenciální geometrie a topologie. Topologií se zde rozumí především algebraická topologie. Dnes se opět často připomíná jaksi pozapomenutá historická skutečnost, že topologii vytvořil Henri Poincaré při studiu problémů analytické mechaniky. Takto obnovená mechanika má i své významné analytické a algebraické aspekty – je to velmi pěkný příklad určitého mezioborového výzkumu. Přitom mezioborové zaměření je v dnešní matematice velmi důležité. Geometrie se bezprostředně dotýká i Cartierova zmínka o obnovené symbióze s velkou tradicí matematické fyziky. Je velmi zajímavé, že nejen v obecné teorii relativity, která může zkoumat globálně celý vesmír, ale i v teorii interakcí elementárních částic se objevují hluboké globální geometrické problémy.

Geometrické metody mají významné místo i v současné analýze, která stále více přechází ke studiu globálních analytických problémů. Zde mohu jen namátkou jmenovat současnou teorii singularit, v níž dobrá geometrická intuice je neocenitelnou pomůckou k řešení složitých analytických problémů. Dalším příkladem může být třeba globální variační počet.

V těchto souvislostech bude asi užitečné oblasnit, jakým způsobem se dnes geometrie vlastně definuje. Sovětská Matematická encyklopedie z r. 1977 praví: „Geometrie je část matematiky, jejímž původním předmětem bylo studium prostorových vztahů a forem těles. Geometrie studuje prostorové vztahy a formy abstrahujíc od ostatních vlastností reálných předmětů (hustota, váha, barva, atd.). V následujícím vývoji geometrie se předmětem geometrie stávají také další vztahy a formy reality, které se shodují s prostorovými." Toto vymezení samozřejmě zdaleka není jednoznačné, takže určité nejednotnosti v chápání obsahu současné geometrie vznikat mohou. To však není podstatné ani v matematice samotné a zcela nedůležité je to pro problematiku vyučování geometrie. Podobně jako Shakespeare u růže i já bych u geometrie považoval za podstatnou její vůni – a tu jsem se snažil v dosavadní přednášce podrobně charakterizovat.

V současné fyzice hraje významnou úlohu i tzv. komplexní geometrie, přičemž pro geometrii samotnou je velmi důležité, že při takovémto jejím využití se objevují vysoce podnětné nové matematické problémy. Jako významné ocenění těchto směrů můžeme uvést, že přední teoretický fyzik Roger Penrose byl na ICM 78 v Helsinkách poctěn tím, že dostal možnost přednést jednu z nemnoha plenárních přednášek, a svého úkolu se úspěšně zhostil vynikajícím referátem na téma *Komplexní geometrie přirozeného světa*. Upozorňuji, že v této oblasti se opět uplatňují Plückerovy teorie z druhé poloviny minulého století o zobrazování lineárních podprostorů n-rozměrného projektivního prostoru jako bodů jistých algebraických variet, které mnozí matematici považovali již jen za historickou záležitost. Je zajímavé, že tento geometrický aparát (zhruba řečeno jde o Penrosovu twistorovou teorii) je dnes v mnoha fyzikálních problémech důležitým nástrojem, a stejně zajímavé je, že k úplnému řešení takovýchto fyzikálních problémů je třeba ještě využít hlubokých výsledků z globální analýzy.

Obecně je třeba zdůraznit, že v mnoha hlavních proudech současné teoretické fyziky tvorba vhodných modelů reality probíhá výrazně jiným způsobem, než tomu bylo v předchozí generaci. Při tvorbě takovýchto modelů nebo hypotéz se již od samého počátku používá náročný pojmový aparát současné geometrie. K základním nástrojům zde patří tzv. hladké variety, které lze stručně charakterizovat jako vícerozměrné analogie dvourozměrných hladkých ploch v trojrozměrném euklidovském prostoru. Důležitou úlohu hrají rovněž jejich tečné prostory. Často se však využívá i značně složitých konstrukcí z algebraické topologie, algebraické geometrie a teorie funkcí několika komplexních proměnných. Dále je třeba připomenout, že v poslední době se na této kvalitativně nové úrovni opět objevuje plodnost fyzikální intuice jako zdroje nových matematických výsledků.

Kdybych měl z předchozího přehledu vyvodit praktický závěr a vyslovit jej co možno nejjednodušeji, formuloval bych jej ve tvaru této teze: *Neučíme-li žáka nebo studenta dostatečně geometrii, podstatně jej ochuzujeme jako moderního matematika.*

Čím můžeme podpořit tyto moderní směry geometrie a jejích aplikací v současné vysokoškolské výuce? K tomu stačím uvést jen několik dílčích komentářů. Již v analytické geometrii bychom měli věnovat více pozornosti kvadratickým plochám a jejich tečným rovinám. Např. ta skutečnost, že tečná rovina jednodílného hyperboloidu v určitém bodě jej protíná právě v obou povrchových přímkách, které tímto bodem procházejí, je zcela jednoduchá, geometricky velmi obsažná a pěkně procvičuje studentovu prostorovou představivost. I při výuce diferenciální geometrie bychom měli věnovat více pozornosti všem názorným úlohám, které se na základní látku váží, a měli bychom probírat i některé globální výsledky. A dobrý kurs algebraické topologie by měl být v každém odborném univerzitním studiu matematiky samozřejmostí.

Jak jsem již řekl úvodem, ocenění úlohy geometrie v současné matematice se výrazně odráží na udělených Fieldsových medailích. Uveďme nejprve, že John Charles Fields byl profesorem matematiky v kanadském Torontu a vůdčím organizátorem ICM 24, který se tam konal. Zemřel r. 1932 a zanechal značnou částku peněz, které se staly základem pro dotování medailí nesoucích jeho jméno. Fieldsovy medaile se udělují při příležitosti ICM, který se koná vždy jednou za čtyři roky. První dvě Fieldsovy medaile byly uděleny na ICM 36 v Oslo. Pak nastala přetržka způsobená válkou, která trvala až do r. 1950. K dnešnímu dni bylo uděleno celkem 30 medailí. Pierre Cartier ve vzpomínaném článku tvrdí, že 22 z nich dostali geometři. Já jsem si to přepočítával a vzhledem k nedostatečně přesné definici geometra se mi k tomuto číslu dospět nepodařilo. Mohu však zaručit, že alespoň polovina z oněch 30 laureátů Fieldsových medailí nesporně geometry jsou.

Dovolte mi, abych svůj pohled na postavení geometrie v současné matematice doplnil stručnou informací o tom, za co byly poslední Fieldsovy medaile r. 1986 uděleny. Laureáty byli Freedman, Donaldson a Faltings. U každého z nich mohu ovšem uvést jen ten nejvýznamnější z jejich výsledků. Freedman dokázal tzv. Poincarého hypotézu v dimenzi 4. Ta říká, že čtyřrozměrná topologická varieta, která je jednoduše souvislá, kompaktní, orientovatelná a má stejné celočíselné homologické grupy jako čtyřrozměrná sféra, je homeomorfní čtyřrozměrné sféře. V dimenzích 1 a 2 je problém triviální, pro dimenzi alespoň 5 hypotézu dokázal Smale r. 1961; v dimenzi 3 problém zůstává otevřený. Z Donaldsonových prací vyplynul zcela nečekaný výsledek, který se považuje za velmi oslnivý: na čtyřrozměrném euklidovském prostoru lze vedle klasických diferencovatelných funkcí zavést diferencovatelné funkce ještě určitými exotickými způsoby, které se od klasického způsobu podstatně liší. Přitom již dříve bylo známo, že v žádné jiné dimenzi to možné není. Faltings dokázal určitou větu o algebraických křivkách, jejímž důsledkem je, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ má pro každé $n \geqq 4$ nejvýše konečný počet nesoudělných celočíselných řešení. To je zatím největší pokrok v historii tzv. velké Fermatovy hypotézy, která předpokládá, že zmíněná rovnice nemá pro $n \geqq 3$ žádná kladná celočíselná řešení (neexistence těchto řešení pro $n = 3$ byla známa již dříve).

Moje přednáška se chýlí k závěru a já si uvědomuji, že zůstává ještě řada důležitých otázek, kterých jsem se ve svém referátu nestačil dotknout. Zejména se to týká vztahu geometrie k technickým vědám. Z konferenčního programu však usuzuji, že tato mezera bude vyplněna v následující diskusi. Musím rovněž konstatovat, že po dohodě s organizačním výborem konference jsem se nesnažil ve své přednášce hovořit o osnovách nebo počtech hodin na jednotlivé partie geometrie. Šlo jen o zdůraznění základních principů, z nichž by takovéto konkrétní diskuse měly vycházet. A úplně nakonec musím ještě prohlásit, že s organizačním výborem jsem diskutoval pouze základní teze své přednášky, nikoli její konkrétní obsah. Tedy veškerá odpovědnost za vše, co jsem zde uváděl, padá výlučně na moji hlavu.

jubilea & zprávy

ZA PROFESOREM FRANTIŠKEM KRUPKOU

Po dlouhé nemoci zemřel dne 24. dubna 1988 ve věku 68 let prof. ing. dr. František Krupka, CSc., dlouholetý pracovník na katedře fyziky fakulty strojní ČVUT v Praze.

Narodil se ve Vídni 25. listopadu 1920. Zde i vyrůstal a získal středoškolské vzdělání na české reálce spolku Komenský, kde v roce 1938 maturoval s vyznamenáním. Po okupaci Rakouska v r. 1938 se přestěhovala rodina do Prahy. Zde v témže roce začal studovat na Vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství ČVUT. Jeho studium bylo však ve druhém ročníku přerušeno po násilném uzavření českých vysokých škol. V této době absolvoval dvouletý abiturientský kurs při vyšší průmyslové škole strojnické v Praze, na které v r. 1942 maturoval rovněž s vyznamenáním. V dubnu 1943 byl nasazen na práci v Německu, kde pracoval u firmy Junkers Flugzeug v Dessau a potom ve Fritzlaru. Z Německa se mu podařilo dostat se opět do Prahy v červnu 1944.