J. Dillinger; S. Halúsková; M. Dillingerová

Metóda najmenších štvorcov v laboratórnom cvičení

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37 (1992), No. 2, 114--117

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137893`

vyučování

METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV V LABORATÓRNOM CVIČENÍ

J. Dillinger, S. Halúsková, Bratislava, M. Dillingerová, Trnava

Výpočtová technika sa presadzuje i v laboratórnom cvičení študentov. V nasledujúcom príspevku chceme poukázať na dôsledky počítačového spracovania matematického modelovania fyzikálneho problému, resp. metód najmenších štvorcov pri prekladaní kriviek experimentálnymi bodmi, na myslenie študenta.

Jedným z cieľov laboratorného cvičenia je naučiť študentov zhodnotiť výsledky merania. Študent v protokole o meraní musí urobiť i rozbor chýb merania. V priamom spojení s počítačom sa veľmi často stretávame s predstavou študenta, že zdrojom chýb výsledku merania je len samotný experiment a nie aj jeho matematické spracovanie. Vplyv matematického spracovania na výsledok merania možno ukázať na jednej z najčastejších foriem využitia počítača v experimente — prekladaní rôznych funkcií nameranými experimentálnymi bodmi funkčnej závislosti $y = f(x)$ metódou najmenších štvorcov. Výstupom z počítača je spravidla grafické zobrazenie a hodnoty konštát hľadanej funkcie.

Predpokladajme, že experimentálnymi bodmi $[x_i, y_i]$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, n je počet meraní, prekladáme lineárnu regresnú funkciu

(1)
$$y = b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + \ldots + b_p\varphi_p(x),$$

kde $p < n$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_p(x)$ sú funkcie premennej x, majú známy tvar a neobsahujú neznáme parametre, $b_1, b_2, \ldots b_p$ sú neznáme parametre.

Odhady b_1^*, b_2^*, …, b_p^* sa určia z podmienky

(2)
$$S = \sum_{i=1}^{n}[y_i - b_1^*\varphi_1(x) - \ldots - b_p^*\varphi_p(x_i)]^2 = \min,$$

t.j. riešia sa rovnice

$$\frac{\partial S}{\partial b_h^*} = 0, \quad (h = 1, 2, \ldots, p). \tag{3}$$

Rovnice (3) sú sústavou lineárnych rovníc

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\varphi_h(x_i)\varphi_j(x_i)b_j^* = \sum_{i=1}^{n}\varphi_h(x_i)y_i,$$

ktoré možno prepísať v maticovom tvare

$$\mathsf{U}b^* = \mathsf{a}, \tag{4}$$

kde pre prvky a_{hj} $(h, j = 1, 2, \ldots, p)$ štvorcovej matice U platí

$$a_{hj} = \sum_{i=1}^{n}\varphi_h(x_i)\varphi_j(x_i),$$

RNDr. Juraj Dillinger, CSc., (1940) je docentom, RNDr. Marta Dillingerová, CSc., (1940) a RNDr. Soňa Halusková (1953) sú odbornými asistentkami na Katedre fyziky Strojníckej fakulty STU, nám. Slobody 17, 812 31 Bratislava.

a pre prvky a_h vektora a platí $a_h = \sum_{i=1}^{n} \varphi_h(x_i)y_i$. Prvkami stĺpcového vektora b^* sú hľadané parametre b_h^*.

Parametre b_h^* sa dajú určiť pomocou inverznej matice U^{-1}

$$b^* = U^{-1}a \tag{5}$$

Pre prvky inverznej matice U^{-1} platí: $a^{hj} = \frac{A_{hj}}{A}$, A je determinant matice U, A_{hj} je subdeterminant determinantu A.

Odhady smerodajných odchyliek možno urobiť pomocou nasledujúcich všeobecných vzťahov: odhad smerodajnej odchylky s (veličiny y)

$$s = \sqrt{\{\sum_i [y_i - f(x_i)]^2\}/(n-1)},$$

odhad smerodajnej odchylky nepriamo meranej veličiny b_j^*

$$s_{b_j^*} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial b_j^*}{\partial y_i} s_{y_i}\right)^2}.$$

To v konkrétnom prípade vyjadrujú vzťahy:

odhad smerodajnej odchylky veličiny y: $s = \sqrt{S_0/(n-p)}$,

odhad snerodajnej odchylky veličiny

$$b_j^* : s_{b_j^*} = s\sqrt{a^{jj}},$$

a^{jj} je prvok inverznej matice U^{-1}, S_0 je reziduálny súčet štvorcov

$$S_0^0 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x_i)b_j^*]^2 = \\ = \sum_{i=1}^{2} y_i^2 - \sum_{j=1}^{p} a_j b_j^*.$$

Najčastejšie používanou regresnou funkciou je všeobecná priamková závislosť y na x: $y = kx + q$. Pre takúto funkciu na úrovni prvého fyzikálneho praktika sú odvodené z rovníc (5) vzťahy pre k^*, q^* a odhady smerodajných odchyliek [1].

V prípade nelineárnych regresných funkcií podmienka (3) nevedie na sústavu lineárnych rovníc (4). Postupuje sa preto tak, že vhodnou transformáciou premenných sa funkcia upraví na funkciu lineárnu [2]. Ak sa tak nedá urobiť, možno použiť iteračný postup určenia paremetrov b_k^*. Najprv sa vo funkcii $y = f(x; b_1, b_2, \dots, b_p)$ z experimentálnych hodnôt $[x_i, y_i]$ určia približne parametre b_1^0, b_2^0, ..., b_p^0. potom sa funkcia $y = f(x;\, b_1, b_2, \dots, b_p)$, ako funkcia parametrov b_k v okolí bodu $[b_1^0, b_2^0, \dots, b_p^0]$ rozvinie do Taylorovho radu a vynechaním druhého a vyšších rádov dostávame

$$y = f(x; b_1^0, b_2^0, \dots, b_p^0) + \sum_{k=1}^{p} f_k(b_k - b_k^0), \tag{6}$$

kde

$$f_k = \\ = \frac{\partial f(x; b_1, b_2, \dots, b_p)}{\partial b_k}\bigg|_{[b_1,\dots,b_p]=[b_1^0,\dots,b_p^0]}.$$

Funkcia (6) je lineárna funkcia premenných $b_k - b_k^0$ a lineárnou regresnou analýzou sa určia parametre b_k^*. Po dosadení týchto hodnôt miesto b_k^0 možno celý cyklus zopakovať.

Jednou z úloh laboratorného cvičenia [1] je určiť tiažové zrýchlenie g a moment zotrvačnosti vzhľadom na ťažisko J zo závislosti doby kyvu T fyzikálneho kyvadla od vzdialenosti a osi otáčania ťažiska. Vzťah pre dobu kyvu $T = \pi\sqrt{J'/mga}$, kde J' je moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania $J' = J + ma^2$, m je hmotnosť kyvadla, upravíme na tvar

$$T = \sqrt{(q/a + ka)}, \tag{7}$$

kde $k = \pi^2/g$, $q = \pi^2 J/mg$.

Fyzikálne kyvadlo je zhotovené tak, že má viac úchytov, ktoré umožňujú ho zavesiť na rôzne, navzájom rovnobežné osi. Študent nájde polohu ťažiska, zmeria vzdialenosti a_i jednotlivých osí od ťažiska a príslušné doby kyvu T_i. Koeficienty k a q vo funkčnej závislosti $T = f(a)$ sa vypočítajú metódou najmenších štvorcov. Pretože študenti majú odvodené vzťahy pre lineárnu regresiu lineárnej funkcie, je vzťah (7) upravený na tvar

$$y = q + kx, \quad \text{kde} \quad y = aT^2, \quad x = a^2.$$

Ďalší postup je jednoduchý — zadaním nameraných hodnôt do počítača študent dostáva priamo hodnoty q, k, odhady ich smerodajných odchyliek a nasledujúcim výpočtom g s chybou merania s_g.

Jedno z konkrétnych meraní uvedené v Tabuľke I. dáva výsledok merania

$$g = (9{,}73 \pm 0{,}16)\,\mathrm{m/s^2}.$$

V diskusii, ktorú študent v protokole musí urobiť, sa uspokojí s nameranou hodnotou pri porovnaní s tabuľkovou (pre Bratislavu $g = 9{,}8090\,\mathrm{m/s^2}$). Príčiny chyby merania hľadá v nepresnom odčítaní času, vzdialenosti, trením v osi, odporom prostredia, len nie v metóde výpočtu — počítal to počítač a ten sa nemýli. V skutočnosti súčet štvorcov odchyliek v rovnici (7) nemá minimum pre to isté k a q ako v rovnici (8). Stačí, aby sme urobili lineárnu regresiu funkcie $T^2 = q/a + ka$ podľa všeobecnej rovnice (5) a dostávame hodnotu g, ktorej stredná hodnota je mimo uvedeného intervalu

$$g = (9{,}49 \pm 0{,}17)\,\mathrm{m/s^2}.$$

Odchylka od skutočnej hodnoty je dokonca väčšia, tabuľková hodnota je mimo vypočítaného intervalu, čo poukazuje na systematickú chybu merania.

Výpočet koeficientov nelineárnej regresnej funkcie metódou uvedenou vyššie rozvojom do Taylorovho radu je mimo matematickej pripravenosti študenta. Ak by ho urobil, už po troch iteračných krokoch dostáva ďalšimi iteráciami nezmenenú hodnotu

$$g = 9{,}49\,\mathrm{m/s^2}.$$

Len diskusiou učiteľa so študentom si študent uvedomí, že metódu spracovania

Tabuľka I.

Namerané hodnoty (výsledky súboru meraní)

i	1	2	3	4	5	$n = 5$
a_i (mm)	32	83	169	180	278	$m = 3{,}05$ kg
T_i (ms)	795	569	539	549	593	

Vypočítané výsledky

spôsob výpočtu	zo vzťahu (7)	zo vzťahu (8)	nelineárna regresia
k ($\mathrm{m^{-1}s^2}$)	1,01417	1,03962	1,03994
q ($\mathrm{ms^2}$)	0,0199952	0,0192512	0,0193192
g ($\mathrm{ms^{-2}}$)	9,732	9,493	9,490
s_g ($\mathrm{ms^{-2}}$)	0,160	0,174	
J ($\mathrm{kg\,m^2}$)	0,05974	0,05611	0,05629
s_J ($\mathrm{kg\,m^2}$)	0,00221	0,00120	

zvolil on, a nech je počítač akokoľvek presný, výsledok ovplyvnila aj zvolená metóda.

Laboratórne cvičenia na mnohých školách na príkladoch merania fyzikálnych veličin predstavujú všeobecný úvod do merania. Sú v ňom zaradené úlohy, na ktorých sa študent oboznamuje so štatistickým súborom, jeho meraním a spracovaním. Spojením experimentu s počítačom sa úloha nesmie stať „čiernou skrinkou", ktorá chŕli výsledky. Aj v rozoberanom príklade študent sám na problém matematického spracovania nepríde, na to ho môže priviesť len učiteľ. V príspevku sme však chceli poukázať, že je potrebné pripraviť cvičenia, v ktorých je kladený dôraz na matematické spracovanie, ktoré umožní študentovi rôznym spôsobom modelovať a interpretovať namerané výsledky. V laboratórnom cvičení preto zaraďujeme úlohy, kde relatívne jednoducho nameria študent súbory hodnôt, na ktorých potom sleduje štatistické vlastnosti súborov pri ich rôznom matematickom modelovaní.

L i t e r a t ú r a

[1] DILLINGER J. a kol.: *Fyzika, Návody na laboratórne cvičenia.* Bratislava, Alfa 1988.

[2] REKTORYS K. a kol.: *Přehled užité matematiky.* Praha SNTL 1968.

ČINNOST NĚMECKÉ FYZIKÁLNÍ SPOLEČNOSTI V OBLASTI VZDĚLÁVÁNÍ

Jitka Brockmeyerová-Fenclová

Německá fyzikální společnost (Deutsche Physikalische Gesellschaft, DPG) navazuje na tradice Fyzikální společnosti, založené r. 1845. Jejími členy byli v minulosti mnozí tvůrci moderní fyzikální vědy, např. Roentgen, Planck, Siemens, Nernst, Sommerfeld, Hahn, Meitnerová, Laue, Born, Franck, Hund, Maier-Leibnitz a řada dalších [1]. V r. 1990 se s DPG spojila Fyzikální společnost Německé demokratické republiky. Dnes zastupuje DPG se svými 20 600 členy celou německou fyzikální veřejnost. **DPG má sloužit výhradně a bezprostředně čisté a aplikované fyzice**, což bylo převzato i do jejích obměněných stanov, publikovaných 1991 ve spolkovém časopise Physikalische Blätter [2, str. 670]. Vedle své hlavní úlohy — **vědecké komunikace** — se DPG věnuje také oblasti **vzdělávání**. Ze zpráv společnosti, publikovaných pravidelně v červencovém čísle spolkového časopisu, [2] a [3], je patrno, že se DPG angažuje ve vzdělávání vědeckého dorostu a učitelů, ale i v oblasti vzdělávání na nižších školách. Přijímá do svých řad i učitele.

Učitelé přitom mají své profesní spolky. Nejznámější z nich je spolek pro podporu výuky matematiky a přírodních věd (Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, MNU), založený před 100 lety a sdružující gymnaziální učitele [4]. Tento spolek tvoří jednu z osmi asociací DPG; asociace mají své zastoupení v předsednické radě a pořádají akce za účasti DPG. Užší **předsednictvo DPG**, vedené prezidentem a viceprezidentem, pracuje ve čtyřech **základních oblastech**: vědecké programy a ceny; vzdělávání a příprava na povolání; profesionální otázky a vědecký dorost; oblast informací a tisk. Zprávy z těchto oblastí podávají členové předsednictva na Sjezdu fyziků, který se koná jednou za rok pro plénum celé DPG. Na sjezdu v r. 1990 re-