nové knihy

F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon (with assistance from J. Pál): **Walsh series — an introduction to dyadic harmonic analysis.** *Akadémiai Kiadó, Budapest 1990, 560 pp.*

Student, který absolvoval základní kurs matematické analýzy na univerzitě si pravděpodobně pod slovy „ortogonální řada“ představí nejvýše trigonometrickou Fourierovu řadu, popřípadě si vzpomene ještě na některé aplikace těchto řad v matematické fyzice. Zmínka o ortogonálních systémech tvořených „po částech konstantními“ funkcemi, které v první čtvrtině tohoto století systematicky zavedli A. Haar (1909), H. A. Rademacher (1924), J. L. Walsh (1923) a další, se pak objeví v přednáškách možná jen sporadicky; o případných aplikacích těchto systémů se asi posluchač nedozví během studia vůbec nic. Pokud se rozhodne rozšířit své znalosti v tomto směru samostudiem, pak mu naše knihovny z publikací, které se zabývají dotyčnou teorií, nabídnou klasické knihy [1] a [3], v lepším případě pak modernější přehlednou knihu [4]. Přitom v uplynulých dvaceti letech enormně vzrostl zájem o výše zmíněné systémy, zejména o Walshův ortonormální systém. Příčinou toho je vskutku efektivní využití právě zmíněného systému ve výpočetní technice, při modelování „obdélníkových“ signálů, vytváření vhodných kódů apod. (Tak tomu bylo konkrétně např. i při realizaci permanentního spojení s vesmírnou sondou Mariner.) Odborníci proto velice uvítali, když se nedávno objevila kniha [2], která vedle základů teorie Walshových řad (resp. transformací) přináší — na více než šedesáti stránkách — též informace o jejich aplikacích. Nicméně stále však chyběla obsáhlejší kniha, která by systematicky shrnovala pokud možno všechny dosavadní teoretické výsledky z tohoto oboru, publikované zatím často jen v časopisech, resp. ve sbornících celé řady konferencí (např. v USA), která by stručně řečeno byla jistou moderní „dyadickou verzí“ známé klasické knihy [6].

Recenzovaná, velmi rozsáhlá (9 kapitol + dodatky) monografie takovou knihou podle mého mínění je a dává nyní čtenáři možnost, aby se podrobně seznámil s celou teorií Walshova ortonormálního systému, Walshových–Fourierových řad a Walshovy–Fourierovy transformace.

První dvě kapitoly této knihy jsou souhrnem základních poznatků o Walshových funkcích a Walshových–Fourierových řadách.

V 1. kapitole se čtenář mj. seznámí s dyadickou grupou a s její reprezentací, s dyadickými moduly spojitosti, s Walshovým ortonormálním systémem a s Walshovými–Fourierovými řadami, s Walshovým–Dirichletovým (resp. s Walshovým–Fejérovým) jádrem a s jejich vlastnostmi.

V 2. kapitole je nejdříve zkoumána „velikost“ Walshových–Fourierových koeficientů pro různé třídy funkcí. Potom jsou uvedeny standardní výsledky o absolutní konvergenci, bodové konvergenci a $(C,1)$ sčítatelnosti Walshových–Fourierových řad.

Velice originální a přitažlivá je látka 3. kapitoly. Autoři zde mj. netradičním a zajímavým způsobem ukazují, že Walshovy funkce jsou elegantním spojovacím článkem např. mezi teorií pravděpodobnosti a harmonickou analýzou. Čtenáře zde totiž nejdříve seznámí s teorií dyadických martingálů, dále s „martingale transforms“, s dyadickými prostory Hardyho atd. Potom na základě pěkného odhadu maximální funkce (nerovnost (77) na str. 127) a pomocí jednoho výsledku Banachova–Steinhausova typu (Theorem 2, str. 81–82) již celkem jednoduše odvozují, že Walshova–Fourierova řada pro funkce z L^p $(p > 1)$ konverguje skoro všude v $\langle 0,1)$. (Standardní důkaz právě uvedeného tvrzení Carlesonovou–Huntovou metodou je (srov. [2], § 9.2.) dosti nepřehledný.)

Problematika konvergence a $(C, 1)$ sčítatelnosti Walshových–Fourierových řad je pak velmi podrobně probrána ve 4. kapitole a v 6. kapitole. Tak jsou např. ve 4. kapitole uvedeny základní věci , týkající se konvergence (resp. divergence) Walshových–Fourierových řad v L^p – normě ($p \geqq 1$), jejich stejnoměrné konvergence apod. V 6. kapitole najde čtenář např. i podmínky pro to, aby Walshova–Fourierova řada funkcí z L konvergovala skoro všude v $\langle 0, 1)$, seznámí se s konstrukcí divergentních Walshových–Fourierových řad atd.

V 5. kapitole jsou nejdříve uvedeny fundamentální výsledky o aproximaci funkcí pomocí Walshových polynomů, resp. jejich $(C, 1)$-průměrů. Najdeme zde tedy např. analogii klasické Jacksonovy věty, dále některá tvrzení o aproximaci funkcí z Lip $\alpha(\alpha \leqq 1)$, větu o saturaci pro $(C, 1)$-průměry atd. V druhé části této kapitoly je pak přehledně ukázáno, jakou roli hrají některé ortogonální systémy (Haarův, Walshův, Franklinův a event. další) při konstrukci bází v prostorech funkcí.

Látka 7. kapitoly a 8. kapitoly se týká tzv. obecných Walshových řad. Je např. zkoumána jednoznačnost vyjádření funkcí pomocí těchto řad a tzv. U-množiny (v 7. kapitole) a reprezentace měřitelných funkcí pomocí těchto řad (v 8. kapitole).

Poslední 9. kapitola obsahuje především základy Walshovy–Fourierovy transformace a tzv. „rychlé“ Walshovy transformace.

Ke každé kapitole je vždy připojena řada cvičení, z nichž některá jsou lehká (např. po 1. kapitole), jiná pak těžší, a to zvláště tehdy, jde-li už vlastně o prezentaci hlubších výsledků z citované literatury. Některá tvrzení z cvičení jsou, jak pečlivý čtenář zjistí, jistými „dyadickými dvojníky“ odpovídajících tvrzení z knihy [6].

Po cvičeních k 9. kapitole pak následuje celkem 7 dodatků, v kterých jsou pro úplnost předchozího výkladu dokázána některá důležitá tvrzení např. z teorie Hilbertových prostorů, z teorie lokálně kompaktních Abelových grup, o Vilenkinově systému apod.

Závěr knihy tvoří, stejně jako v knize [6], rozsáhlé bibliograficko-historické poznámky a samozřejmě seznam literatury.

Látka nové knihy je dokonale vyložena a vzhledem k velkému množství materiálu vskutku efektivně. Přitom obsahuje též řadu nových výsledků (např. Theorem 1 na str. 77, v textu §4.5 apod.) Grafická úprava textu je výstižná a elegantní, jak je už ostatně u tohoto nakladatelství zvykem.

Knihu vřele doporučuji každému, kdo se chce přesně dozvědět, co všechno je z této teorie známo od r. 1909 do r. 1990. Bude tedy především užitečná pedagogům i vědeckým pracovníkům, kteří se s danou problematikou setkávají ve své učitelské činnosti (např. při výběrových přednáškách, resp. seminářích) nebo publikační. Bude jistě vhodná i pro diplomanty a doktorandy, kteří se zaměřují na styčné partie harmonické analýzy a teorie funkcí reálné proměnné. O aplikacích Walshových–Fourierových řad a Walshovy–Fourierovy transformace se recenzovaná kniha zmiňuje velice málo, prakticky jen na konci 9. kapitoly. Kolegům, kteří mají zájem o tyto partie aplikované matematiky, bych proto vedle publikací citovaných v poznámce 9.7 na str. 529 recenzované knihy doporučil ještě navíc téměř současně vydanou obsáhlou knihu [5].

František Štěpánek

Literatura

[1] ALEXITS G.: *Convergence Problems of Ortogonal Series.* Budapest, Akadémiai Kiadó 1961.

[2] GOLUBOV B. I., EFIMOV A. V., SKVORCOV V. A.: *Rjady i preobrazovanija Uolša — těorija i primeněnija.* Moskva, Nauka 1987.

[3] KACZMARZ S., STEINHAUS H.: *Theorie der Orthogonalreihen.* Warsaw, Monogr. Mat. *6*, 1935.

[4] KAŠIN B. S., SAAKJAN A. A.: *Ortogonalnyje rjady.* Moskva, Nauka 1984.

[5] ZALMANZON L. A.: *Preobrazovanija Furje, Uolša, Chaara i ich priměněnije v upravleniji, svjazi i drugich oblastjach.* Moskva, Nauka 1989.

[6] ZYGMUND A.: *Trigonometric Series.* Cambridge Univ. Press 1959.