(tím zároveň „odstraníme" otázku objektivní existence hmoty) a nakonec zbavíme i gnozeologii jejího vlastního významu. Člověk sice přestane být tulákem na okraji vesmíru, zařadí se mezi ostatní živočichy, ztratí sice někdejší pocit nadřazenosti, ale zároveň i poslední špetku lidské hrdosti. Netvrdím, že autoři komentované stati mínili jít takto daleko, ale v každém případě jsou nabízené závěry této krajnosti poplatné.

Závažným momentem je zde i ta okolnost, že autoři mlčky přecházejí právě společenský, resp. společenskohistorický aspekt lidského poznání a lidské sounáležitosti. Člověk je bytost jak přírodní, tak společenská, a je-li součástí obecnějšího fenoménu života, který ve vesmíru a jeho minulých a budoucích dějinách jistě není výjimkou, je člověk především součástí lidské společnosti a vztahy k ní je jako *člověk* formován. Odtud zvláštní postavení společenských věd a společenských zákonitostí, které přes některé rysy připomínající chování fyzikálních soustav nebo biologických společenstev nelze na tyto nižší zákonitosti redukovat. Stojí-li člověk na pokraji vesmíru a cítí se osamocen, měl by se vrátit mezi ostatní lidi a společně s nimi hledat smysl svého života a lepší uspořádání společnosti. Ani přírodověda není přitom záležitostí mezi vědcem a přírodou, nýbrž společenskou činností zásadního významu.

Stať Prigogina a Stengersové nastoluje tedy zásadní otázky a poskytuje čtenáři mnoho podnětů k zamyšlení, popř. k dalšímu studiu, ať fyzikálnímu či filozofickému. Stať obsahuje celou řadu formulací, s nimiž nelze bez výhrad souhlasit (hodnocení úlohy vitalismu, směšování subjektivního a objektivního, popírání možnosti poznání „preexistentní pravdy" nezávislé na pozorovateli, zavedení „nového typu srozumitelnosti, který už není založen na ideálu „objektivity" jakožto nezávislosti na tom, kdo popisuje" apod. — namátkou vzato), a při tom někdy nelze dobře odlišit, co je vlastním názorem autorů a co parafrází jiných stanovisek. Přesto však se domnívám, že základní, především fyzikální linie stati je dobrou školou živelného dialektického myšlení, otevírá nové pohledy a vede k zamyšlení nad vývojem a perspektivami moderní fyziky a přírodovědy.

Moderní perspektivy klasické teorie funkcí

Lawrence Zalcman, Maryland, USA

Před nedávnem se mi dostal do rukou článek slavného francouzského matematika, jednoho z nejpřednějších exponentů matematické školy Bourbakistů, jehož cílem bylo

Text vyžádaného, referátu předneseného na podzimním shromáždění Americké matematické společnosti v Charlestonu, Jižní Carolina, 4. listopadu 1978.

Uveřejněno v Rocky Mountains Journal of Mathematics, svazek *12*, č. 1, 1982.

popsat současné směry matematického bádání. Na konci třetího odstavce se mu podařilo odepsat teorii funkcí komplexní proměnné, která se údajně odtrhla od „hlavního proudu“ matematiky tím, že „se oddala příliš speciálním otázkám“. Nu, co lze rozumně očekávat od někoho, kdo tvrdí, že „vynalezení funktorů je jedním z hlavních mezníků moderní matematiky“? Shovívavé přezírání těmi, kdož jsou zaujati „Velkým Projektem“, není patrně tak zlé; dává možnost těm, kteří se zabývají komplexní analýzou, v klidu pracovat. Nikdo zatím aspoň nepoložil teorii funkcí na Prokrustovo lože své vlastní ideologie a nesnažil se ji přiříznout (hlavu, údy a vše ostatní) podle vlastního vkusu, rozmaru nebo záliby. Má-li být teorie funkcí pasována na „živou zkamenělinu“ (jako Židé v Toynbeeově schématu historie) – prosím.

Ve skutečnosti není situace tak zlá. Disciplína, která se může pochlubit současnými představiteli velikosti Nevanlinny, Ahlforse, Beurlinga a Schiffera (nemluvě o zářících hvězdách několika mladších generací), je daleka od vyčerpání. Po pravdě řečeno, jen málo rozumných lidí si to někdy myslelo. Dlouho a pracně jsem musel hledat nepříznivou kritiku; postupně jsem se naopak setkal s četnými nevyprovokovanými chvalořečmi tak vysoce rozumných lidí, majících tak odlišné zájmy, jako je Eugene Wigner, Felix Browder, Georg Kreisel a Clifford Truesdell – citace mohu na přání předložit. Pro tyto silné jedince, nepřístupné bláznivým chvilkovým nápadům, má komplexní analýza trvalou cenu.

A přece něco v hodnocení prof. Dieudonného ([4]) nutí k zamyšlení. Teorie funkcí je tak trochu podobná Eukleidovi. Každý z nás se z ní něco musel naučit, a základní teorie je tak koherentní, tak jednolitá, drží bez volných konců tak pohromadě, že jsme neustále v pokušení myslet, že jsme se ji naučili celou.

Není tomu tak. Mladá stopadesát let, teorie funkcí sílí, a pokud se její chamtiví a nevděční synovci a neteře shromažďují kolem jejího smrtelného lože a čekají na čtení poslední vůle, budou čekat dlouho. Jste-li však staří 150 let, potřebujete ne-li všemožnou pomoc, tedy aspoň příležitostně něco k posílení. Existuje však předpis na vyzkoušený účinný lék; je to neustálé objasňování a přehodnocování předmětu a jeho problémů jak v jasném světle dějin, tak i laserovým paprskem vedeným souběžným rozvojem v ostatních matematických disciplínách. I když se nezdá být nutné ospravedlňovat, že komplexní analýza (nebo kterákoli jiná disciplína) užívá metod jiných oborů matematiky, je v této souvislosti vhodné poznamenat, že teorie funkcí dala matematice tak mnoho (např. v topologii a v algebraické geometrii), že je zcela namístě, aby něco dostala zpět.

Takové tedy je kázání, které bych chtěl dnes proslovit před tímto, jak doufám, sympatizujícím shromážděním. O příklady není nouze. Stačilo by (prominete-li mou vlastní nevyprovokovanou chvalořeč) obrátit vaši pozornost k tomu, jak skvěle Albert Baernstein aplikoval ideje z reálných funkcí na široké spektrum problémů komplexní analýzy nebo jak bystře a důmyslně užil Carl Fitzgerald klasickou techniku v teorii univalentních funkcí a v příbuzných oblastech.

Protože však dnešní referát je můj, nikoli jejich, rozhodl jsem se místo toho mluvit o vlastních výsledcích, které znám nejlépe. A rád bych je užil jako jakýsi druh věšáku, na který bych chtěl pověsit svou oblíbenou tezi, že i základní tvrzení komplexní analýzy, soubor klasických vět, které jsou obsahem základního jednoročního kursu teorie funkcí, může být prostornou arénou zajímavého a cenného bádání. Tuto tezi bych rád ilustroval řadou typických příkladů ze samých základů teorie funkcí, z partií jednajících o Cauchyho a Morerově větě, o průměrové vlastnosti harmonických funkcí, o teorii normálních tříd a o Picardových větách. Ve všech případech se otevřely překvapivě nové pohledy, byly odhaleny netušené souvislosti; dosáhlo se toho buď přísnou revizí starých myšlenkových pochodů, nebo užitím nových způsobů myšlení, které dal k dispozici vývoj jiných částí matematiky. Opíšeme-li trochu od Felixe Kleina, bylo by myslitelné nazvat tento referát „Elementární komplexní analýza z pokročilého hlediska".

Dovolte mi nyní, abych po tak dlouhém úvodu začal.

1. První výsledek, o němž bych chtěl promluvit, je zároveň nejpokročilejší; je to malá Picardova věta, dokázaná skoro přesně před 100 lety. Není přehnané říci, že tato věta, která tvrdí, že nekonstantní celá funkce nabývá všech komplexních hodnot s výjimkou snad jedné, způsobila revoluci v matematice nebo aspoň v teorii funkcí. Poté, co byla dokázána poprvé, snažili se matematikové skoro 20 let najít „elementární důkaz". (Borelovi se to konečně podařilo; jeho myšlenkový pochod je však již dlouho překonán příjemnějšími způsoby argumentace.) V pokročilém kursu teorie funkcí se věta dokazuje (podobně, jako to původně učinil Picard) buď kombinováním modulární funkce s větou o monodromii, nebo „elementární" cestou pomocí Blochovy nebo Schottkyho věty.

Dovolte mi, abych se Picardovu větu pokusil „odhalit", jak v podobných souvislostech říkával Littlewood. Chci vám ukázat, že – aspoň pro širokou třídu celých funkcí zahrnující všechny funkce, se kterými se v praxi setkáváme – lze Picardovu větu dokázat úplnou indukcí! To je, pokud vím, nový výsledek; neznám aspoň nikoho, kdo by podobný důkaz někde dříve viděl ([12]).

Vyjdeme z toho, že Picardova věta je přirozeným zobecněním základní věty algebry (která tvrdí, že každý nekonstantní polynom nabývá všech konečných hodnot). Polynomy však charakterizuje nerovnost

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{\log r} < \infty ,$$

kde $M(r) = M(r,f) = \max\{|f(z)|;\ |z| = r\}$ je maximum modulu dané funkce. Zdá se být rozumné vyšetřovat funkce splňující nerovnost

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log_n M(r)}{\log r} < \infty , \tag{1}$$

kde $\log_n = \log \circ \log \circ \ldots \circ \log$ (složeno n-krát). Jsou to funkce, které – zhruba řečeno – nerostou rychleji než $\exp(\exp(\ldots(\exp z^k)\ldots))$, kde exponenciála je napsána $(n-1)$-krát. I když funkce, splňující (1) pro některé přirozené číslo n, množinu všech celých funkcí nevyčerpávají, jsou mezi nimi obsaženy všechny funkce, s nimiž se normálně setkáváme (a mnoho dalších). Např. funkce splňující podmínku (1) s $n = 2$ tvoří často studovanou třídu funkcí konečného řádu.*)

*) Říkáme, že celá funkce f je *konečného řádu*, existuje-li $A \in \mathbf{R}$ tak, že $\max\{|f(z)|;\ |z| \leqq R\} \leqq \exp R^A$ pro všechna dost velká R. (Pozn. překl.)

Před důkazem Picardovy věty pro funkce s vlastností (1) bude vhodné uvést užitečné tvrzení o souvislosti růstu maxima modulu holomorfní funkce s růstem její reálné části. Označme k tomu účelu

$$A(r) = A(r, f) = \max\{Re f(z); |z| = r\}.$$

Potřebujeme nerovnost tvaru

$$M(r) < K_1\, A(K_2 r) \quad (\text{pro velká } r), \tag{2}$$

kde K_1, K_2 jsou nějaké kladné konstanty. Takový odhad plyne ihned z klasického Borelova-Carathéodoryho lemmatu, podle něhož je

$$M(r) \leqq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)| \quad (r < R).$$

Důležité je, že tato nerovnost je zcela elementární; k důkazu není třeba ničeho komplikovanějšího, než je rozvoj holomorfní funkce v mocninnou řadu – takže žádné smetí nemeteme pod koberec.

Abychom dokázali Picardovu větu pro funkce splňující (1), předpokládejme, že věta platí pro $n = N$. Nechť f splňuje podmínku (1) s $n = N + 1$ a nechť nenabývá nějaké komplexní hodnoty w_0. Protože pak funkce $f - w_0$ nenabývá hodnoty 0 a splňuje opět podmínku (1), lze předpokládat, že $w_0 = 0$. Pak je $f = \exp \circ g$, kde funkce g je opět celá. Protože

$$\log_N A(r, g) = \log_{N+1} e^{A(r,g)} = \log_{N+1} M(r, \exp \circ g) = \log_{N+1} M(r, f),$$

je

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log_N A(r, g)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_{N+1} M(r, f)}{\log r} < \infty.$$

To spolu s (2) dává nerovnost

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log_N M(r, g)}{\log r} < \infty.$$

Z indukčního předpokladu vyplývá, že g nabývá všech komplexních hodnot s nejvýše jednou výjimkou. Při pevném $w \in \mathbf{C}$ nabývá tedy funkce g všech hodnot $w + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, s výjimkou snad jedné; v důsledku toho nabývá funkce $f = \exp \circ g$ hodnoty $\exp w$ nekonečněkrát. Tím je důkaz dokončen. Vidíme přitom, že jsme dokázali trochu více, než se žádalo, a to, že f buď nabývá všech komplexních hodnot, nebo jednu vynechává a každou jinou hodnotu nabývá nekonečněkrát.

Když jsem tento důkaz ukazoval, obvyklá reakce byla něco jako že „celý vtip Picardovy věty však spočívá v tom, že platí pro všechny celé funkce". Nemám chuť polemizovat s tímto stanoviskem (ačkoli stojí za zmínku, že přesně proti němu vášnivě protestoval sám Borel ([3])). I kdyby tomu tak bylo, zdá se mi, že se to stává patrné teprve ve světle takového důkazu, jako je právě uvedený. Síle určité techniky rozumíme teprve tehdy, když vidíme, co lze dokázat bez ní. Příčinou, proč je Picardova věta hlubokým výsledkem, je existence oněch nedosažitelných funkcí nedostupných důkazu indukcí.

To mne přivádí k příbuznému problému. Zřejmou otázkou (která se vždy klade) je, zdali lze úsudek doplnit např. užitím transfinitní indukce tak, aby zahrnul všechny celé funkce. Nevím. Zdali a proč bychom měli chtít Picardovu větu dokazovat takovým způsobem, je ovšem úplně jiná otázka.

Dříve než se obrátíme k poněkud jinému tématu, chtěl bych říci ještě toto: Myslím, že induktivní důkaz Picardovy věty má značnou pedagogickou cenu. I když každý student matematiky musí ve vyšších ročnících prostudovat něco z teorie komplexních funkcí, je mnoho škol (a bohužel musím říci, že Marylandská univerzita je jednou z nich), kde je zcela dobře možné vyhovět požadavkům z analýzy absolvováním ročního kursu z reálné proměnné a pouze semestru z komplexní analýzy. Mnoho studentů tak činí. Mají-li štěstí, dostanou se na samém konci semestru k Riemannově větě o konformním zobrazování; jen výjimečný přednášející by byl schopen zařadit do prvního semestru Picardovu větu. Nahoře uvedený důkaz je tak krátký, tak elementární, a hodí se tak přirozeně k výkladu elementární teorie, že dává příznivě nakloněnému učiteli příležitost vyložit jeden ze skutečně hlubokých výsledků předmětu poměrně brzy v prvním semestru.

2. Vždycky se mi zdálo být trochu tajuplné, oč snadněji lze dokázat malou Picardovu větu než velkou. Podle velké Picardovy věty nabývá funkce v každém (prstencovém) okolí své podstatné singularity nekonečněkrát každé hodnoty nejvýše s jednou výjimkou. Vzhledem k tomu, že okolí může být libovolně malé, stačí zřejmě dokázat, že funkce nabývá v (libovolném) okolí každé hodnoty (s výjimkou snad jedné) aspoň jednou. Tato formulace odhaluje podstatný rozdíl mezi oběma větami: V malé větě je funkce definována v celé komplexní rovině, singularita leží v nekonečnu a tvrzení je globální; ve velké větě stačí, když je funkce definována jen lokálně, v jistém okolí singularity (o níž můžeme, chceme-li, předpokládat, že leží v nekonečnu) a tvrzení o rozložení hodnot funkce je lokalizováno na toto okolí.

Ukazuje se, že nemá žádnou zvláštní výhodu odlišovat nekonečnou hodnotu od ostatních; obě věty lze formulovat zcela přirozeně jako tvrzení o meromorfních funkcích. Malá věta pak tvrdí, že nekonstantní funkce meromorfní v **C** nabývá všech hodnot z rozšířené roviny **S** až snad na dvě výjimky (neboť nyní připouštíme i hodnotu ∞), a velká věta konstatuje, že funkce meromorfní v prstencovém okolí podstatné singularity v něm nabývá všech hodnot z **S** s výjimkou nejvýše dvou. V dalším vyjdeme z těchto formulací.

Jeden z nejpříjemnějších důkazů velké věty vede přes teorii normálních tříd.*) Přes-

---

*) Říkáme, že třída A konečných funkcí v oblasti D ($\subset$ S) je *normální*, je-li možné z každé posloupnosti funkcí $f_n \in$ A vybrat posloupnost, která buď konverguje v D lokálně stejnoměrně (k jisté konečné funkci), nebo diverguje v D lokálně stejnoměrně do ∞ (tj. k funkci identicky rovné ∞). Viz např. Saks-Zygmund: Funkcje analityczne. Pojem normality lze rozšířit i na třídy zobrazení do S (speciálně; na třídy meromorfních funkcí), zavedeme-li do prostoru všech takových zobrazení vhodnou topologii; pojem normality pak úzce souvisí s pojmem relativní kompaktnosti. Topologie se do prostoru zobrazení do S zavede např. pomocí tzv. redukované (neboli chordální) metriky v S, která je definována např. v Jarníkově Diferenciálním počtu II. (Pozn. překl.)

něji, užije se Montelovy věty, která říká, že třída meromorfních funkcí, z nichž každá vynechává ve společném definičním oboru (stejné) 3 hodnoty $a, b, c \in S$, je normální. Vyvození velké Picardovy věty z věty Montelovy je velmi snadné a nyní i dobře známé, takže vás s ním nebudu obtěžovat. Montelova věta se zpravidla dokáže buď přes modulární funkci, nebo pomocí Schottkyho věty. Každá z cest však vede k cíli i bez oklíky přes Montelovu větu, i když ovšem rozšířením důkazu můžeme dostat jako další výsledek např. Juliovu větu.

Montelova věta se však vyznačuje zarážející rodinnou podobou s malou Picardovou větou. Malá Picardova věta říká, že meromorfní funkce vynechávající tři hodnoty z S je konstantní. Montelova věta vyvozuje z předpokladu v podstatě stejného normalitu třídy meromorfních funkcí. Je to více než náhodná shoda?

Spekulace v tomto směru vedou padesát let zpět k André Blochovi, skvěle originálnímu matematikovi, který byl zároveň maniakálním hromadným vrahem.*) Vyslovil heuristický princip o tom, že když nějaká vlastnost nutí celou (nebo globálně definovanou meromorfní) funkci, aby byla konstantní, pak každá třída holomorfních (meromorfních) funkcí majících tuto vlastnost v jisté oblasti je nutně normální třídou.

S Blochovým principem jsem se poprvé seznámil jako student při čtení druhého dílu Hilleovy *Teorie analytických funkcí* a hned jsem jej zase zapomněl. Nedávno jsem se s ním setkal znovu ve znamenité přednášce nyní již zemřelého Abrahama Robinsona ve Společnosti pro symbolickou logiku ([8]). V tomto projevu zařadil Robinson objasnění Blochova principu mezi dvanáct problémů hodných pozornosti logiků (a zobecněno, matematiků). Osud chtěl, že právě v té době jsem se dělil o pracovnu s Christianem Pommerenkem, jehož práce o hraničním chování holomorfních funkcí se ukázaly být lepším objasněním ([11]), než mohl Robinson předpokládat.

Než budu pokračovat, dovolte mi ukázat, že Blochův princip neplatí. Co je ještě horší, pravdivý ani být nemůže. Dovolte mi to vysvětlit. Vynechávání tří různých hodnot způsobuje, že funkce meromorfní v **C** je konstantní, ale nezpůsobuje, že třída funkcí (meromorfních v obecné oblasti D) je normální; protipříkladem je třída funkcí $f_n(z) = nz$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, v jednotkovém kruhu $|z| < 1$. Všechny funkce třídy musí totiž vynechávat *stejné* tři hodnoty. Pro jednu funkci ovšem obě vlastnosti splývají! Rozumný člověk nebude v tomto příkladu vidět ani nepatřičné hnidopišství, ani pobídku k zoufalství; příklad spíše ukazuje, že musíme přesně formulovat přiměřená omezení (o nichž doufáme, že jsou minimální) vlastností, které máme žádat. Robinson sám tuto nutnost pochopil a formuloval speciálnější verzi principu, jejíž důkaz by byl – jak doufal – přístupný nestandardní analýze. Nestandardní analýza se však ukázala být falešnou stopou; pokud se týká omezení, ukazuje se, že vystačíme ve skutečnosti s předpoklady mnohem slabšími.

---

*) Opojná směs matematiky a zločinu stěží začíná Blochem, a přetrvává do dneška. Vzpomínáme si na černou ovci Sherlocka Holmese, nepřekonatelného profesora Moriartyho, který napsal pojednání o binomickém vzorci. V současné době byl souzen slavný odborník v teorii automatů za zorganizování únosu přes mezinárodní hranice a vraždu. A v novém dobrodružném filmu se násilník, kterého hraje Charles Bronson, v jednom okamžiku přiznává k dlouholeté vědecké práci ve funkcionální analýze a kombinatorice; divákovi se přitom nešťastně dává na vybranou, zdali je to zločin navíc, nebo spíše přiměřený trest.

Máme-li v úmyslu dokazovat nějakou verzi Blochova principu, je vhodné užívat dosti pedantického označení funkcí a vlastností. Protože nemám v úmyslu zde nyní něco podobného dělat, dovolte mi místo toho popsat příslušný výsledek neformálním způsobem a prosit při tom o projevení dobré vůle.

Nechť P je vlastnost, která je

(i) dědičná (tj. stabilní vůči restrikci),
(ii) spojitá (tj. stabilní vůči konvergenci),
(iii) invariantní (tj. stabilní vůči lineárním substitucím).

Nechť jediné meromorfní (celé) funkce na **C**, které vlastnost P mají, jsou konstatní funkce. Pak je pro každou oblast $D \subset \mathbf{C}$ třída všech funkcí meromorfních (holomorfních) v D s vlastností P normální.

Je důležité všimnout si, že věta platí jak pro holomorfní, tak pro meromorfní funkce.

Jak se toto tvrzení dokáže? Užijeme síly negativního myšlení a podáme podmínku nutnou a postačující k tomu, aby třída funkcí nebyla normální.*) Přesněji: Má-li nenormální třída meromorfních funkcí vlastnost P, která splňuje podmínky (i)–(iii), lze sestrojit nekonstantní funkci meromorfní v **C** s vlastností P; a to je spor. Podobná konstrukce se objevila v práci Lohwatera a Pommerenka ([6]) o asymptotickém vnoření parabolických Riemannových ploch do množin limitních hodnot jistých funkcí, které byly celkem vhodně nazvány nenormální; konstrukce se snadno modifikuje tak, aby se hodila do naší situace. Je jednou z jemných ironií osudu, že v úvaze není nic, co by před padesáti lety nebylo dostupné Blochovi. Důkaz je ve skutečnosti zcela elementární a na jediném snad citlivém místě lze užít jednoduché metody zpopularizované Landauem v jeho důkazu Blochova slavného zobecnění „čtvrtinové" věty. Úvaha se navíc vyznačuje tím, že je jednou z mála příležitostí pro netriviální aplikaci dobře známého kritéria (jehož autorem je Felix Marty) normality založeného na sférické derivaci.

Kam toto vše vede? V případě, že daná vlastnost závisí pouze na hodnotách, kterých funkce nabývá, říká naše věta skoro všechno. Abychom např. dokázali Montelovu větu, nechť P znamená, že f buď vynechává (dané) hodnoty $a, b, x \in \mathbf{S}$, nebo je konstantní. Vlastnosti (i) a (iii) jsou splněny automaticky, vlastnost (ii) plyne snadno z Hurwitzovy věty. Do mlýnku přidáme malou Picardovu větu, zatočíme klikou a vypadne Montelova věta.

Není vlastně ani těžší dokázat komplikovanější variace na totéž téma. Nechť P např. znamená, že funkce f vynechává tři hodnoty a, b, c (které mohou záviset na f), součin jejichž chordálních vzdáleností $\chi(a, b)$, $\chi(b, c)$, $\chi(c, a)$ je oddělen od nuly jistou pevnou (malou) konstantou $\varepsilon > 0$. Pak má P opět vlastnosti (i)–(iii); z toho plyne, že každá třída funkcí majících vlastnost P je normální. Nebo – abychom podali trochu méně zřejmý příklad – předpokládejme, že funkce f je meromorfní v **C**, že všechny její póly mají násobnost aspoň l, všechny její kořeny násobnost aspoň m a všechny kořeny funkce $f(z) - 1$ násobnost aspoň n. Z Nevanlinnovy druhé základní věty ([7], str. 280) plyne, že v případě, že $l^{-1} + m^{-1} + n^{-1} < 1$, je f konstantní. Jako dříve z toho plyne důsle-

*) Když můj přítel Benjy Weiss tento důkaz viděl, poznamenal, že často studentům dost nezdůrazňujeme význam podmínek nutných a postačujících k tomu, aby něco neplatilo.

dek, že každá třída funkcí meromorfních v jisté pevně dané oblasti, z nichž každá splňuje vyslovenou podmínku o násobnostech, je normální třídou ([5], str. 238).

Žádná z těchto vět není nová, ale v každém jednotlivém případě ukazuje Blochův princip možný postup: věta se dokáže pro jedinou, globálně definovanou funkci. Aspoň v některých případech se tím velmi podstatně ulehčí práce a vyjasní situace. Princip má tedy přinejmenším cenu systematického přístupu.

Vede také k novým tvrzením? Ne, nebo aspoň zatím ne.*) Dovolte mi objasnit proč, protože odpověď zahrnuje řadu zajímavých otevřených problémů. Problémem je vlastnost (iii), u níž by se to čekalo nejméně. Typické vlastnosti holomorfních funkcí se netýkají pouze jejich hodnot, ale také hodnot jejich derivací. Není pravděpodobné, že by nějaká taková podmínka byla lineárně invariatní. Je např. dlouho známo a lze poměrně snadno dokázat, že celá funkce f splňující podmínky

$$f(z) \neq 0, f'(z) \neq 1 \tag{3}$$

je nutně konstantní. Je také pravda (jak ukázal Miranda), že třída funkcí, které splňují (např. v nějakém kruhu) podmínky (3), je normální. Předpoklad o lineární invarianci však splněn není, neboť (3) nezůstane v platnosti, nahradíme-li f funkcí $g(z) = f(az + b)$; Mirandovu větu tedy nemůžeme dostat jako speciální případ naší verze Blochova principu.

Abych udělal z nouze ctnost, dovolte mi poznamenat, že tato nemožnost má i optimistickou interpretaci. Clunie velmi nedávno dokázal (a je to velmi netriviální výsledek), že celá funkce f splňující podmínku

$$f(z)f'(z) \neq 1 \tag{4}$$

je nutně konstantní. Vlastnost (4) opět není lineárně invariantní, a zůstává otázkou, zdali třída s touto vlastností musí být normální. Lze rozumně očekávat, že nahoře uvedenou metodu lze rozpracovat tak, aby zvládla snadný případ (3). Protože potíže, na něž naráží aplikace Blochova principu v případě (4), se zdají být podobné jako v případě (3), lze přinejmenším doufat, že úspěšné zvládnutí (3) umožní zvládnout i (4). (Pesimisté ovšem mohou uvažovat právě obráceně.) Je samozřejmě zcela možné, že z podmínky (4) neplyne normalita třídy; v tom případě by naše formulace Blochova

*) Tato slova byla, jak se ukazuje, neaktuální, ještě než byla napsána, aspoň pokud se týká metody důkazu Blochova principu. Ta nalezla aplikaci v teorii komplexních variet, zejména v důkazu Brodyho věty, která říká, že kompaktní komplexní varieta neobsahující komplexní přímky je hyperbolická. (O diferenciálně-geometrickém pojmu hyperboličnosti viz S. Kobayashi, *Hyperbolické variety a holomorfní zobrazení*, Marcel Dekker, New York, 1970.) Příslušný výsledek byl nadhozen Griffithsem a upoutal značnou pozornost, dříve než byl s konečnou platností dokázán Robertem Brodym v jeho harvardské disertaci „Intrinsic metrics and measures on compact complex manifolds" (1975). Podle H. Wua (*Some theorems on projective hyperbolicity*, J. Math. Soc. Japan 33 (1981)), „Brodyho věta mohla být dokázána — po triviální změně terminologie — Zalcmanovým myšlenkovým postupem".

V trochu jiném směru rozšířila dr. Ruth Minowitzová („Normal families of quasiregular mappings", University of Maryland Technical Report 78—73) Blochův princip na kvaziregulární funkce v prostoru a užila jej k důkazu analogií velké Picardovy a Juliovy věty pro takové funkce.

principu poskytla jisté hrubé vysvětlení tohoto selhání. Za současného stavu poznání je toto vše pouze zbožné přání, otázka však stojí za vysvětlení.

Rád bych se ještě zmínil o dvou dalších směrech možného bádání, neurčitějších a riskantnějších. Nechť P je vlastnost funkcí definovaných na otevřených podmnožinách roviny. Přiřaďme každé otevřené množině $U \subset \mathbf{C}$ třídu všech funkcí meromorfních v U, které mají vlastnost P. V případě, že P je dědičnou vlastností, má systém všech těchto tříd (který můžeme ztotožnit s P) strukturu předsvazku, na což mne upozornil Mike Razar. I když se zdá být vysoce nepravděpodobné, že by tuto strukturu bylo možné využít k funkčně teoretickým účelům, nelze tuto možnost zcela vyloučit, a někdo to možná bude chtít prozkoumat.

Druhý směr možného výzkumu, který mi naznačil Yakar Kannai, souvisí s logickými vlastnostmi formulace různých vlastností. Zdá se být možné, že nové rozpracování Blochova principu, v němž by byla pozornost soustředěna na tyto logické vlastnosti, očekává svého objevitele. Moje omezená orientace v logice bohužel vylučuje každou podrobnější spekulaci v tomto směru.

Tedy - aspoň v této chvíli - principiální význam myšlenkového okruhu, o němž jsem mluvil, je (nezávisle na tom, jaký filozofický prospěch přikládám přeměně čistě heuristického nástroje v poctivou větu) pedagogický. Princip podává novou a celkem přímou cestu k Montelově větě a odtud k velké Picardově větě, k Juliově větě, k Schottkyho a Landauově větě a ještě dále.*)

---

*) G. Julia dokázal, že pro každou funkci f, která má v bodě 0 podstatnou singularitu, existuje číslo $\alpha_0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro každé $\varepsilon > 0$ funkce f nabývá v kruhové výseči $\{a \exp i\alpha;\ 0 < a < \varepsilon,\ |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon\}$ všech (konečných) hodnot s výjimkou snad jedné. Směr daný úhlem α_0 se pak nazývá Juliovým směrem. (Analogické tvrzení ovšem platí, má-li f podstatnou singularitu v obecném bodě $z_0 \in \mathbf{S}$.)

Schottkyho věta podává odhad funkcí tvaru

$$(+) \qquad f(z) = \alpha + \beta z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

které jsou holomorfní v kruhu $|z| < R$ a nenabývají v něm nikde hodnot 0 a 1; ukazuje se, že pak v kruzích $|z| \leqq (1 - \theta) R$, $0 < \theta < 1$, platí nerovnosti tvaru $|f(z)| \leqq \Omega(\alpha, \theta)$, kde pravá strana závisí jen na $\alpha = f(0)$ a θ. (Tyto odhady mj. ukazují, jak může maximálně růst výraz $\max\{|f(z)|;\ |z| \leqq r\}$ při $r \to R-$.) Konkrétní tvar funkce Ω závisí na metodě důkazu. R. Burckel ve své knize *An Introduction to Classical Complex Analysis, Vol. 1* (1979) dokazuje např. obecnější Mirandovu větu (1935), z níž pak za našich předpokladů při $R = 1$ plyne, že odhady platí s funkcí

$$\Omega(\alpha, \theta) = \exp\left[\theta^{-1}(12d + M \log(2\theta^{-1}))\right],$$

kde $d = \log \max(1, |\alpha|)$ a kde M je konstanta (nezávislá na f).

V Landauově větě se vyšetřují opět funkce tvaru (+), ale jen s $\beta \neq 0$. Ukazuje se, že maximální poloměr R kruhu $|z| < R$, v němž taková funkce nenabývá hodnot 0 ani 1, závisí pouze na koeficientech $\alpha = f(0)$ a $\beta = f'(0)$. Jinak řečeno: Existuje taková funkce L proměnných α, β, že každá funkce (+) (kde $\beta \neq 0$) holomorfní v kruhu $|z| < L(\alpha, \beta)$ nutně v tomto kruhu nabývá buď hodnoty 0 nebo 1.

Platí-li odhady $|f(z)| \leqq \Omega(\alpha, \theta)$ v kruzích $|z| \leqq (1 - \theta) R$ (s jistou funkcí Ω), lze volit např. $L(\alpha, \beta) = 2\Omega(\alpha, \frac{1}{2})\,|\beta|^{-1}$. (Viz např. knihu Sakse-Zygmunda.) (Pozn. překl.)

3. Zatím jsem se soustředil na výsledky dokázané již dříve starými metodami; jejich význam spočívá hlavně v tom, že vrhají nové světlo na známé jevy. Nyní bych chtěl provést ostrý obrat a začít mluvit o některých nových výsledcích otevírajících zcela nové perspektivy. Vyplynuly kupodivu (nebo, po chvilce zamýšlení, ne zas tak kupodivu) z nového přezkoumání některých zcela elementárních aspektů komplexní analýzy.

Dovolte mi začít tématem, které je mi velmi blízké, Morerovou větou. Jedna z verzí výsledku, jejímž autorem je Carleman, vypadá takto: Nechť D je oblast v $\mathbf{C}$ a nechť f je v D spojitá. Předpokládejme, že

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0 \tag{5}$$

pro všechny kružnice Γ obsažené i se svým vnitřkem v D. Pak je f holomorfní v D. Protože to není obvyklá verze věty, dovolte mi připomenout také důkaz. Nechť $f \in C^1(D)$. Zvolme pevně $z_0 \in D$ a nechť Γ_r je kružnice o středu z_0 a poloměru r. Pro dostatečně malá r dostaneme z Greenovy věty, že

$$0 = \int_{\Gamma_r} f(z)\, dz = 2i \iint_{\Delta_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dx dy\,,$$

kde Δ_r je kruh ohraničený kružnicí Γ_r. Z toho plyne, že

$$0 = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dx dy = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\,.$$

Protože z_0 byl libovolný bod, je $\partial f / \partial \bar{z} \equiv 0$ v D, a f je tam tedy holomorfní. Obecný případ, kdy nepředpokládáme $f \in C^1(D)$, z toho plyne jednoduchou aproximační úvahou (konvoluce s „uhlazovací funkcí").

Úspěšní matematikové se brzy ve své kariéře naučí klást tuto otázku: Co dalšího mohu dokázat touto úvahou? Nepříliš často kladou obrácenou otázku: Co mohu dokázat bez ní? Krátce se proto zastavme a snažme se porozumět, co dává možnost vést důkaz právě takto, abychom se toho mohli vzdát.

Protože holomorfnost je lokální vlastnost, je zřejmé, že stačí předpokládat, že (5) platí pouze pro malé kružnice (ve skutečnosti vyžaduje přechod k nehladkým funkcím jistou stejnoměrnost, což je delikátní okolnost, k níž se vrátíme později). Stejně je zřejmé, že úvaha stojí a padá s možností limitovat r k nule. Užijeme-li nahoře zmíněného principu negativního myšlení, můžeme se ptát na situaci, kdy (5) platí, ale jen pro velké kružnice, tj. pro kružnice, jejichž poloměr je aspoň roven jistému kladnému číslu.

Aspoň na začátku je přirozené omezit naši pozornost na funkce definované v celé rovině, protože jinak ne každý bod z D bude středem vhodného kruhu, který leží celý v D. Před několika lety jsem dokázal ([9]) tuto větu:

Věta. *Nechť $f \in C(\mathbf{R}^2)$ a nechť*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0 \tag{6}$$

pro každou kružnici s poloměrem r_1 nebo r_2. Pak je f celá funkce, není-li r_1/r_2 podílem kořenů Besselovy funkce $J_1(z)$. Pokud r_1/r_2 takovým podílem je, nemusí být f holomorfní nikde.

Myslím, že je to dost překvapující výsledek; mne aspoň překvapil. Je to také výsledek silně nestabilní, protože (spočetná) množina podílů kořenů funkce $J_1(z)$ je na reálné ose hustá, takže nejnepatrnější perturbace čísla r_1 nebo r_2 může vést od pozitivního výsledku k žádnému výsledku (a obráceně).

Odkud se zde berou Besselovy funkce? Byla doba, kdy jsem si myslel, že odpověď na tuto otázku znám; nyní si nejsem tak jist. Existuje už řada metod důkazu věty a v každé z nich se Besselovy funkce objevují v nepatrně odlišné souvislosti, ať již jako Fourierovy obrazy, nebo jako řešení jisté obyčejné diferenciální rovnice, nebo jako vlastní funkce laplasiánu. Nejpravdivější odpověď snad je, že jsou prostě částí přírody (jako Kroneckerova přirozená čísla) a že způsob, jakým se objeví, závisí spíše na tom, jak se na problém díváme, než na čemkoli jiném.

Nechci se zde zabývat detaily důkazu. Hlavní myšlenkou je pohlížet na (6) jako na dvojici konvolučních rovnic (jedna rovnice pro každou z hodnot poloměru), pak správným způsobem užít teorie distribucí a trochu Fourierovy analýzy. Je v tom ovšem obsažen i hluboký výsledek, fundamentální věta o funkcích jedné proměnné periodických v průměru, pocházející od Laurenta Schwartze a sama dokázaná (před třiceti lety) metodami komplexní analýzy. (V jistém smyslu zde tedy pojednáváme o úspěšném případu samooplodnění.)

Abychom pokračovali v našem vedlejším motivu ztracených příležitostí, měli bychom poznamenat, že není žádný dobrý důvod pro to, aby naše verze Morerovy věty nebyla dokázána před třiceti lety. Jsou ovšem špatné důvody. Především se snadno – příliš snadno – vidí, že neexistuje žádná „jednopoloměrová" věta, a zdá se, že tím celá věc končí. Měl jsem to štěstí, že jsem neviděl snadný důkaz tohoto faktu, a tak jsem došel k protipříkladu značně komplikovanějšímu, než bylo ve skutečnosti nutné, k protipříkladu, který naštěstí naznačoval, co by pravda být mělo. Kromě toho existuje i další, technický důvod. Rozpoznáme-li (6) jako dvojici konvolučních rovnic, je celkem přirozené pokusit se aplikovat Schwartzovu větu. Ta se však týká jedné proměnné, zatímco Fourierovy obrazy související s (6) jsou funkce dvou proměnných, x_1, x_2. Kdo si dá práci vypočítat výsledky explicitně, uvidí však, že ve skutečnosti závisejí jen na jedné (nové) proměnné $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, takže přece jen lze Schwarzovu větu žádaným způsobem aplikovat. Poučení z toho je zřejmé.

Rád bych se zmínil o dalších dvou funkčněteoretických výsledcích, které lze získat podobnou technikou. Nechť f je spojitá v celé rovině. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ bude mít restrikce f na kruh o středu z a poloměru 1 Fourierův rozvoj

$$f(z + e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z)\, e^{in\theta}\,,$$

kde

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + e^{i\theta})\, e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(z + \zeta)\, \zeta^{-n-1} d\zeta\,.$$

Z toho plyne v případě, že f je celá funkce, že

$$a_n(z) \equiv 0\,, \quad n = -1, -2, -3, \ldots . \tag{7}$$

Obráceně se snadno vidí, že když (7) platí pro některé pevné z, lze f spojitě rozšířit z kružnice $\Gamma(z) = \{\zeta; |\zeta - z| = 1\}$ na kruh $\Delta(z) = \{\zeta; |\zeta - z| \leqq 1\}$ tak, že rozšíření je uvnitř $\Delta(z)$ holomorfní.

Nechť (7) platí pro každé $z \in \mathbf{C}$. Musí být f celá funkce? Jistě, f lze rozšířit z kružnice $\Gamma(z)$ do jejího vnitřku holomorfně; není však vůbec evidentní, že rozšíření splývají ve dvou překrývajících se kruzích. Přesto však platí dokonce víc:

Věta ([10]). *Nechť $f \in C(\mathbf{R}^2)$ a nechť $n > 1$ je pevné (celé) číslo. Nechť*

$$\int_0^{2\pi} f(z + e^{i\theta})\, e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} f(z + e^{i\theta})\, e^{in\theta} d\theta = 0$$

pro každé $z \in \mathbf{C}$. Pak je f celá funkce.

Z nulovosti jediného Fourierova koeficientu se záporným indexem a nulovosti prvního Fourierova koeficientu plyne tedy holomorfnost. V této větě není žádná nepříjemná výjimečná množina. Tato poslední okolnost je konec konců závislá na tomto hlubokém Siegelově výsledku z teorie transcendentních čísel: Nenulové kořeny Besselovy funkce s racionálním indexem jsou transcendentní. A – jak si můžete domyslit – důkaz tohoto tvrzení podává opět teorie funkcí.

Druhý výsledek, o němž se chci zmínit, je analogií naší verze Morerovy věty pro hyperbolickou rovinu, tj. pro otevřený jednotkový kruh s neeukleidovskou geometrií indukovanou Poincarého metrikou $ds = 2|dz|/(1 - |z|^2)$. Nechť f je v tomto kruhu spojitá a nechť platí (6) pro všechny kružnice s poloměry r_1, r_2 (měřeno v hyperbolické geometrii). Pak je f holomorfní, jestliže rovnice

$$P_z^{-1}(\cosh r_j) = 0$$

nemají žádné společné řešení $z \in \mathbf{C}$. Úlohu Besselovy funkce zde hraje odpovídající Legendreova funkce P_z^{-1}; obě funkce souvisí limitním vztahem

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{P_{-iz/\alpha}^{-1}(\cosh \alpha r)}{\sinh \alpha r} = \frac{J_1(rz)}{rz},$$

takže naši předchozí větu lze (aspoň formálně) dostat z nynějšího výsledku jako jakýsi limitní případ.

Prostředky, kterých se užívá v důkazech podobných tvrzení, jsou tak obecné a pružné, že by nemělo být překvapující, že se podařilo dokázat analogické věty charakterizující řešení obecnějších rovnic, než je $\partial f / \partial \bar{z} = 0$. Vskutku, pro každý homogenní polynom $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ lze globální řešení rovnice $P(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n)\, u = 0$ charakterizovat ([10]) pomocí vhodné „dvojpoloměrové" podmínky. Podobně jsou možná i rozšíření na obecnější prostory. Tato zobecnění na prostory s konstantní křivostí a obecněji na symetrické prostory hodnosti 1 jsou provedena v [1] a [2]. Výsledky nejsou ani méně přesné, ani méně explicitní než výsledky, o nichž jsem právě mluvil. Nové objevy v teorii funkcí vedou tak k řadě paralelních výsledků v jiných partiích matematiky.

4. Poslední téma, o kterém bych chtěl dnes promluvit, souvisí dosti těsně s některými zobecněními zmíněnými výše. Je to výsledek mého pokusu porozumět přesné souvislosti mezi Cauchyho a Morerovou větou na jedné straně a Gaussovou větou o průměrové vlastnosti harmonických funkcí a Koebeho obrácením této věty na straně druhé.

Nechť μ je konečná komplexní borelovská míra s nosičem v jednotkové kouli $\mathbf{B}^n$ v $\mathbf{R}^n$. Nechť D je oblast v $\mathbf{R}^n$. Funkce $u \in C(D)$ má zobecněnou průměrovou vlastnost (ZPV) vzhledem k μ, platí-li rovnost

$$\int u(x + rt)\, d\mu(t) = 0\,, \tag{8}$$

kdykoli je $x \in D$ a $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial D)$.

ZPV je odvozena abstrakcí z podmínek Gaussovy-Koebeho a Cauchyho-Morerovy věty, o nichž již byla řeč. Abychom viděli souvislost se středními hodnotami explicitně, zvolme n pevně a buď $d\mu = d\Omega - \delta_0$, kde $d\Omega = d\Omega_{n-1}$ je rovnoměrné rozložení hmoty na jednotkové sféře $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ s celkovou mírou 1 a δ_0 je jednotková hmota v počátku. (8) pak přejde v rovnost

$$\int u(x + rt)\, d\Omega(t) = u(x),\ x \in D,\ 0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial D)\,, \tag{9}$$

což je klasická průměrová vlastnost. Položíme-li však $n = 2$ a za $d\mu$ zvolíme restrikci $d\zeta$ na jednotkovou kružnici, dostaneme z (8) rovnost

$$\int_{|\zeta|=1} f(z + r\zeta)\, d\zeta = 0,\ z \in D,\ 0 < r < \operatorname{dist}(z, \partial D)\,,$$

nebo – což je totéž – rovnost

$$\int_{|w-z|=r} f(w)\, dw = 0,\ z \in D,\ 0 < r < \operatorname{dist}(z, \partial D)\ ; \tag{10}$$

poslední vztah ukazuje souvislost s Cauchyho větou.

Co bychom si přáli, by byla jakási pravěta, která by jako speciální případy zahrnovala oba předcházející příklady. V ideálním případě by měla tvar nutné a postačující podmínky (harmoničnost pro (9), holomorfnost pro (10)) kladené na funkci $u \in C(D)$, aby splňovala ZPV vzhledem k dané míře μ. To se zdá být skoro příliš velkým přáním; podmínky podobné (8) se studují odedávna a bylo to vždy za dosti speciálních předpokladů o povaze míry μ.

Přesto lze takové podmínky najít a explicitně popsat. Není ani zvlášť obtížné je vyslovit. Při hořejším označení nechť

$$F(z) = \int e^{-i(z.t)} d\mu(t) \qquad (z.t = z_1 t_1 + \ldots + z_n t_n)$$

je Fourierův obraz míry μ. Protože μ má kompaktní nosič, je F celá funkce v $\mathbf{C}^n$ a má rozvoj

$$(11) \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z)$$

v homogenních polynomech.

Věta ([10]). *K tomu, aby funkce* $u \in C(D)$ *měla vlastnost* ZPV (8), *je nutné a stačí, aby* u *byla slabým (distributivním) řešením systému lineárních parciálních diferenciálních rovnic*

$$(12) \qquad Q_n(D)\, u = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ;$$

přitom $Q_n(D)$ *je diferenciální operátor, který se dostane nahrazením proměnné* $z = (z_1, \ldots, z_n)$ *symbolickým vektorem* $D = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_n)$.

Z Hilbertovy základní věty vlastně vyplývá, že nekonečný systém rovnic (12) je vždy ekvivalentní s jistým konečným podsystémem, ale není jasné, zdali tento fakt má nějakou praktickou cenu. Vyšetřujeme-li případy, které nás konkrétně zajímají, jeví se (12) jako zcela uspokojivé, a jistě není problém získat rozvoj (11).

Souvislost mezi (8) a (12) je zprostředkována operátorovou identitou, kterou nazývám zobecněným Pizzettiho vzorcem:

$$(13) \qquad \int u(x + rt)\, d\mu(t) = [F(-rD)\, u]\, (x)\,.$$

Předpokládá se zde, že u je reálná analytická funkce a že r je dostatečně malé. Ve speciálním případě, kdy $d\mu = d\Omega_1$ ($= d\theta/2\pi$ na jednotkové kružnici), je

$$F(z) = F(z_1, z_2) = J_0((z_1^2 + z_2^2)^{1/2})\,,$$

takže

$$(14) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta = J_0([(-r)^2\, ((-i\partial/\partial x)^2 + (-i\partial/\partial y)^2)]^{1/2})\, u(z) =$$

$$= J_0(r\sqrt{-\Delta})\, u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(n!)^2\, 2^{2n}}\, \Delta^n u(z)\,.$$

Poslední rovnost je známa jako Pizzettiho vzorec a pochází ze začátku tohoto století· Analogie pro nahoře zavedené plošné míry $d\Omega_n$ jsou známy a obsahují vyšší Besselovy funkce; zdá se však být pozoruhodné, že obecný vztah (13) nebyl nalezen dříve.

Pro ilustraci věty zvolme $n = 2$, $d\mu = d\Omega_1 - \delta_0$. Pak je

$$F(z) = J_0((z_1^2 + z_2^2)^{1/2}) - 1$$

a $Q_n(D) = 0$ pro $n = 0, 1, 3, 5, 7, \ldots$, zatímco $Q_n(D) = c_n \Delta^{n/2}$, kde $c_n \neq 0$, pro $n = 2, 4, 6, \ldots$. Soustava (12) se redukuje na rovnice $\Delta^n u = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, které jsou ekvivalentní s jedinou rovnicí $\Delta u = 0$. Podobně, zvolíme-li $d\mu = dz$ na kružnici $|z| = 1$, je $Q_{2n}(D) = 0$ a

$$Q_{2n+1}(D) = c_n \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\, \Delta^n\,,$$

kde $c_n \neq 0$. Rovnice $Q_n(D)\,u = 0$ jsou tedy ekvivalentní s jedinou (Cauchyho-Riemannovou) rovnicí $\partial u/\partial \bar{z} = 0$.

Trochu méně známou průměrovou podmínku lze získat volbou $d\mu = \cos 2\theta\, d\theta$ na jednotkové kružnici. Pak (8) přejde v rovnici

$$\int_0^{2\pi} u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\cos 2\theta\, d\theta = 0\,,$$

která, jak se ukazuje, je ekvivalentní s rovnicí $\square u \equiv u_{xx} - u_{yy} = 0$. Můžete zkusit dokázat tuto ekvivalenci přímo.

Pokud se týká (8), říkají předcházející výsledky vše. Měli bychom však pamatovat, že samo (8) vzniklo abstrakcí z klasické průměrové vlastnosti harmonických funkcí. Protože abstrakce zřídkakdy ukazují všechny podstatné rysy původní situace, může být prospěšné vrátit se zpět ke klasické teorii.

Koebeho obrácení věty o průměru pro harmonické funkce platí za podmínek slabších než (9). Stačí platnost (9) pro všechna dostatečně malá r, tj. splňující nerovnost $0 < r < \varepsilon(x)$, kde pro $\varepsilon(x)$ se nežádá kromě kladnosti žádná podmínka. Jinými slovy, lze se oprostit ode všech předpokladů stejnoměrnosti podmínky (9). Na druhé straně, i když pro účely ZPV lze podmínku $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial D)$ podstatně zeslabit – např. na podmínku $0 < r < \varepsilon(x)$, kde $\varepsilon(x)$ je na každé kompaktní části oblasti D omezená zdola nějakou kladnou konstantou – určitá stejnoměrnost je podstatná pro aplikaci uhlazovací techniky užité v důkazu věty. To je více než nedostatek metody. V dalším podáme jednoduchý příklad, v němž je

$$\int u(x + rt)\, d\mu(t) = 0,\ x \in D,\ 0 < r < \varepsilon(x)\,, \tag{15}$$

aniž je u řešením příslušné soustavy $Q_n(D)\,u = 0$.

To vrhá nejen nové světlo na obrácení věty o průměru, ale vyvolává takové otázky, jako je charakterizace funkcí, které splňují (15) při pevném μ, nebo charakterizace těch měr, pro něž je (15) ekvivalentní s (8). Případ $d\mu = dz$ (na jednotkové kružnici) vzbuzuje zvláštní zájem. Plyne z podmínky

$$\int_{|\zeta - z| = r} f(z)\, dz = 0,\ z \in D,\ 0 < r < \varepsilon(z)\,, \tag{16}$$

holomorfnost f? Pro hladké funkce je odpověď ovšem kladná; pokud však vím, obecný případ zůstává nerozřešen.

Dovolíme-li limitní procesy, stává se situace dokonce ještě zajímavější. Blaschke ukázal v r. 1916, že když u je spojitá funkce a když pro každé $z \in D$ je

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int u(z + re^{i\theta})\, d\theta - u(z) \right\} = 0\,, \tag{17}$$

je funkce u harmonická v D. (To je zřejmé z Pizzettiho vzorce (14); podstatné však zde je, že se nepředpokládá žádná regularita funkce u kromě vyslovené podmínky spojitosti.) Podmínku (17) můžeme pro obecné míry přeformulovat takto:

Nechť μ je konečná komplexní borelovská míra na $\mathbf{B}^n$ a nechť k je největší z celých čísel, pro něž je μ ortogonální ke všem polynomům celkového stupně menšího než k. Nechť $u \in C(D)$ ($D \subset \mathbf{R}^n$). Pak je (17) jen speciálním případem podmínky

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^k} \int u(x + rt)\, d\mu(t) = 0\,, \tag{18}$$

která se dostane volbou $d\mu = d\theta/2\pi - \delta_0$. Co je nutnou a postačující podmínkou (pro u), aby (18) platilo? V případě $u \in C^k(D)$ se snadno vidí, že hledanou podmínkou je $Q_k(D)\, u = 0$, kde Q_k je jako dříve homogenní polynom stupně k objevující se v Taylorově rozvoji Fourierova obrazu míry μ. K důkazu stačí prostě rozvést integrand v Taylorův rozvoj kolem x a integrovat člen po členu. Není-li u tak hladká, tento úsudek (zřejmě) selhává; a skutečně, při vhodné volbě μ nemusí funkce u splňující (18) splňovat příslušnou diferenciální rovnici.

Speciální případy (18) jsou známé z reálné analýzy. Je-li např. $n = 1$ a $\mu = \delta_1 - \delta_{-1}$, je $k = 1$ a $Q_1(D) = 2d/dx$. Podmínka (18) přejde v podmínku

$$\lim_{r \to 0} \frac{u(x + r) - u(x - r)}{r} = 0\,, \quad x \in D\,,$$

tedy v požadavek, aby symetrická derivace funkce u byla v intervalu D identicky rovna nule. Jedna z Chinčinových vět tvrdí, že taková funkce je nutně konstantní (tj. splňuje rovnost $Q_1(D)\, u = 0$). Podobně, volba $\mu = \delta_1 - 2\delta_0 + \delta_{-1}$ dává $k = 2$ a vede ke známé Schwarzově podmínce

$$\lim_{r \to 0} \frac{u(x + r) - 2u(x) + u(x - r)}{r^2} = 0\,,$$

která je ekvivalentní s identitou $Q_2(D)\, u \equiv d^2u/dx^2 = 0$ (tj. s linearitou u).

Malá modifikace posledního příkladu dává protipříklad. Položme $\mu = \delta_2 - 2\delta_1 + \delta_0$; pak je opět $k = 2$, takže očekávanou podmínkou je linearita u. Ale identitu

$$\lim_{r \to 0} \frac{u(x + 2r) - 2u(x + r) + u(x)}{r^2} = 0$$

bude splňovat každá pouze po částech lineární funkce, protože pro takovou funkci platí dokonce identita

$$u(x + 2r) - 2u(x + r) + u(x) = 0, \quad 0 < r < \varepsilon(x)\,.$$

Po částech lineární funkce jsou však husté v prostoru všech spojitých funkcí; jsme tedy skutečně hodně daleko od očekávané linearity. Na druhé straně takové funkce splňují bodovou rovnost $d^2u/dx^2 = 0$ na velké množině. Je důvod věřit, že toto chování je typické; řešení (18) by mělo splňovat rovnost $Q_k(D)\, u = 0$ na husté otevřené části D.

Ihned se sama vnucuje řada přirozených otázek. Jak špatná může být výjimečná množina (na níž diferenciální rovnice neplatí)? Pro které míry μ plyne z (18) podmínka $Q_k(D)\, u = 0$? (Odpověď na tuto otázku, aspoň pro diskrétní míry, velmi pravděpodobně souvisí s teorií stability aproximací diferenciálních rovnic konečnými diferencemi.)

Musí funkce třídy C^{k-1}, která splňuje (18), být řešením příslušné diferenciální rovnice? Vše se tomu zdá nasvědčovat (překlad: neznáme žádný protipříklad), ale nemáme ani náznak, jak provést důkaz. Dokonce i otázka, zdali podmínka

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \int_{|\zeta - z| = r} f(\zeta)\, d\zeta = 0\,, \quad z \in D\,,$$

(přirozené zeslabení podmínky (16)) implikuje holomorfnost, zůstává otevřena. Kladná odpověď by byla novou variací klasické Loomanovy-Menšovovy věty a byla by velmi zajímavá.

Je čas, abych končil. Doufám, že diskutované otázky, uvedené příklady a naznačené souvislosti s takovými oblastmi jako je logika a teorie čísel, harmonická analýza a parciální diferenciální rovnice, speciální funkce a reálná analýza ukazují dostatečně bohatě stálou životnost tohoto předmětu – ctihodného, ale živého, starého, ale stále nového. Řekl jsem již jednou a řeknu to znovu: komplexní analýza je živa a zdráva.

Přeložil Ilja Černý

Literatura

[1] C. A. Berenstein and L. Zalcman: *Pompeiu's problem on spaces of constant curvature*. J. Analyse Math. *30* (1976), 113—130.

[2] —: *Pompeiu's problem on symmetric spaces*. Comment. Math. Helv. *55* (1980), 593—621.

[3] E. Borel: *Méthodes et Problèmes de Théorie des Fonctions*. Gauthier-Villars, Paris, 1922.

[4] J. Dieudonné: *Present trends in mathematics*. Advances in Math. *27* (1978), 235—255.

[5] D. Drasin: *Normal families and the Nevanlinna theory*. Acta Math. *122* (1969), 231—263.

[6] A. J. Lohwater and C. Pommerenke: *On normal meromorphic functions*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, *550* (1973).

[7] R. Nevanlinna: *Analytic Functions*. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[8] A. Robinson, *Metamathematical problems*, J. Symbolic Logic *38* (1973). 500—516.

[9] L. Zalcman: *Analyticity and the Pompeiu problem*. Arch. Rat. Mech. Anal. *47* (1972), 237—254.

[10] —: *Mean values and differential equations*. Israel J. Math *14* (1973), 339—352.

[11] —: *A heuristic principle in complex function theory*. Amer. Math. Monthly *82* (1975), 813—817.

[12] —: *Picard's theorem without tears*. Amer. Math. Monthly *85* (1978), 265—268.

Autorova adresa: Department of Mathematics and Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, MD 20742

Človek pozná sám seba len vtedy, ak pozná svet, ktorý postihuje iba v sebe a seba iba v ňom. Každý nový dobre prebádaný predmet otvára v nás nový orgán.

Je príjemným zamestnaním skúmať zároveň prírodu a seba, a pritom neznásilňovať ani ju, ani svojho ducha, ale obidvoje miernym vzájomným pôsobením uvádzať do rovnováhy.