

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jan Vyšín

Čechovy podněty pro vyučování matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 6, 313--317

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138191>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1980

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Čechovy podněty pro vyučování matematice*)

Jan Vyšín, Praha

Uplynulo více než 40 let od té doby, kdy se začal prof. Eduard Čech systematictěji zabývat školskou matematikou. Tehdy existovala sice pedagogická disciplína – didaktika matematiky – ale ta byla zcela v rukou pedagogů. Vědečtí tvůrčí matematikové většinou lhostejně pohlíželi na celkem nepatrné množství školských matematických poznatků; vyučovat jim, to znamenalo v nejlepším případě naučit se dobře jistým faktům, získat rutinu a zkušenosti a k tomu přidat „umění učit“. Ovšem už dávno zdůrazňovali profesionálové matematici, že by měl učitel matematiky umět víc, než má učit, že má být „nad žákem“.

Jeden z charakteristických rysů dnešní didaktiky matematiky je, že její vedoucí složka je matematika sama, nikoli pedagogická věda. Z této charakteristiky se odvozuje, že tvůrčí a pedagogická práce se nesmějí od sebe odtrhovat: má-li učitel tvořivé práci učit, třeba jen ve formě řešení úloh, nesmí mu být tvořivá práce cizí. Eduard Čech byl toho mínění, že i elementární úlohy, namnoze naivní, mohou v sobě skrývat vážné otázky; proto např. zkoušel učitele v postgraduálním studiu při státních zkouškách řešit slovní úlohy. To je malá ukázka myšlenky, kterou předběhl svou dobu.

Vezměme jinou stránku výuky matematice – její přesnost a logické souvislosti. Čech byl přesvědčen, že se žáci mají učit záhy odvozovat a tím že mají poznávat principy. Vzpomínám na jeho uvažování o otázce spojitosti, která měla do školní matematiky na nižším stupni zakázaný vstup. Prof. Čech se pokusil odstranit tuto nezdravou inhibici zavedením dvou tzv. *grafických axiomů*, které měly řešit aspoň částečně otázku spojitosti na geometrickém podkladě.

Precizace, kterou vnesl Čech do vyučování svými učebnicemi, byla pro tehdejší školskou veřejnost mocným úderem. Otázka, kterou bylo tehdy možno slyšet v kuloárech, zněla často: „Učíte podle Čecha nebo proti Čechovi?“ Nepřipravení učitelé, překvapení důkazy vět a důkazovými úlohami naříkali na obtížnost a neúnosnost; sám jsem však slyšel od Čecha jeho názor: „Nemusíte dokazovat všechno, ale nesmíte nedokazovat nic. Nesmí se však ztratit fakt, že matematika je systém. V tom je i odpověď na otázku, proč děláme některé věci v tu chvíli zdánlivě zbytečné.“ Také tyto myšlenky asi byly vysloveny předčasně nebo aspoň lidem, kteří je nepochopili.

Čech vůbec uplatňoval své myšlenky raději jejich realizací, v učebnicích, než honosnými proklamacemi. I tato skutečnost sama byla velmi progresivní a myslím, že by se z ní mohli mnozí lidé dneška poučit.

Čech nenáviděl polopravdy; snažil se vyhnout se jim třeba tím, že připouštěl nahradit

*) Výtah z proslovu předneseného 17. 3. 1980 na vzpomínkové slavnosti k 20. výročí úmrtí E. ČECHA.

důkaz ověřením speciálního případu. Tak např. doporučoval nahradit různá pochybná odvození vzorce pro objem jehlanu ověřením speciálního případu: krychle o hraně h se rozdělila v šest shodných neprostupujících se čtyřstěnů o výšce h a o objemu $\frac{1}{6}h^3$ a tím byl známý vzorec ověřen.

Porovnáme-li názory a výroky prof. Čecha o vyučování matematice s myšlenkami a názory dneška, poznáme, jak předbíhal svou dobu. Konstatování, že nezáleží tak na tom, *co* se učí, ale *jak* se učí, jsem slyšel od prof. Čecha o několik desetiletí dříve než od prof. Freudenthala. Slovíčko „jak“ znamenalo nepovrchně, logicky správně, jasně, zejména v pojmech. Nesnášel věty bez předpokladů nebo s neúplnými předpoklady a kvantifikátory a vyžadoval je, i když to vedlo někdy ke komplikovaným formulacím. Říkával se svou proslulou ironií, že matematická věta je buď stručná a pěkná, a pak je chybná, anebo je správná a pak jí nikdo nerozumí. Debatu o pojetí školské matematiky, která probíhala v jeho přítomnosti, uzavřel suchými slovy, že zná jen matematiku dobrou a špatnou. Špatná to byla ta, která se vyhýbala obtížím, místo aby je překonávala.

Učebnice nepodceňoval, ale také nepřeceňoval; spojoval je vždy s prací učitele, s jeho pochopením a podáním myšlenek v nich obsažených. Podle něho učitel musel vždy dotvářet text učebnice, ale ne deformovat. Známy je jeho ironický výrok, že dobrý učitel učí i podle špatné učebnice dobře a špatný učitel učí i podle dobré učebnice špatně. Kdo byl podle Čecha dobrý učitel matematiky? Podle mého poznání Čechových názorů to byl učitel, který stále promýšlel učivo, které měl předávat žákům, zastavoval se i u detailů a svou práci nekonal jen jako učitelské řemeslo. Akademik Čech sám dal ve své školské činnosti nesčetně příkladů takového pojetí práce učitele matematiky, a to ve větších úsecích i v detailech. V době, kdy přednášel s prof. Jarníkem a Vyčichlem na rodící se pedagogické fakultě, koncipoval v jednom ročníku svou přednášku o kuželo-sečkách dosti bizarně: pracoval jen v reálné rovině. Byl to pokus – dnes bychom řekli didaktický výzkum, a měl velmi zajímavé výsledky.

Oblíbené školské téma prof. Čecha byla absolutní geometrie. Zdálo se mu užitečné osvobodit aspoň dočasně geometrii od Eukleidova 5. postulátu a „vyloupnout“ z ní to, co nezáviselo na tomto axiómu, hlavně „čisté“ důsledky vět o shodnosti. Tak vznikla jeho čtveřice učebnic geometrie pro střední školy, z nichž 1., 3. a 4. byly založeny „eukleidovsky“ a proslulá G 2 absolutně. Není vinou Čechovou, že *nepřipravení učitelé* věc popletli a deformovali probírání učebnice G 2 na bezduché memorování vět očíslovaných po vzoru vědecké matematiky dekadickým systémem.

Když profesor Čech měl svou pracovnu v budově na Karlově, bylo jej možno často vidět stojícího v myšlenkách u mříže parčíku. A nepřemýšlel jen o problémech vědeckých. Kdysi mne kolemjdoucího zastavil otázkou: „Poslyšte, jak je to s větou o protínání tří těžnic trojúhelníka v bodě: je to věta absolutní geometrie nebo jen eukleidovské?“

U takovýchto drobností a detailů se často zastavoval, a i když je promýšlel a jasně říkal, „jak by to mělo být“, nestavěl se ve škole kategoricky na nekompromisní stanovisko; drobné nepřesnosti často rozumně likvidoval předem vyslovenými úmluvami; sem patří i jeho postoj k provádění determinace a diskuse úloh.

Klidně užíval leckdy promiskue názvů soubor – množina; ale v rámci množinové pojaté geometrie chtěl, aby se hovořilo o polopřímkách a polorovínách, ve svých učebnicích rád pracoval s funkčními tabulkami, rád měnil stereotypní označení proměnných

(např. v geometrii) a u formulí vyžadoval vždy legendu – význam proměnných – což se v podstatě krylo s požadavkem vyslovovat předpoklady.

K zmíněné jasnosti pojmů patří Čechovy úvahy nad trojím významem znaku minus. Dokonce rozlišoval v počáteční fázi aritmetiky zápisy -3 (záporné číslo) a minus 3 (odečti tři). Mimoto zde byl ještě třetí význam $-(-3)$: opačné číslo k zápornému číslu -3 . Neprosazoval tuto precizaci do školy pro žáky, ale podle jeho mínění učitel měl vědět, jak to vlastně je. Obdobnou situaci nejasností nacházel Čech u racionálních čísel: nebyl ochoten z principiálních důvodů ztotožňovat racionální číslo s jedním jeho reprezentantem, tj. prvkem množiny, i když se smířoval s takovými zápisy jako je $\frac{4}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{6}{9} = r$, kde r je označení racionálního čísla. V geometrii se snažil vždy udržet rovnováhu mezi názorem a dedukcí, hlavně tam, kde se sama motivovala; nemluvil o tom mnoho, ale spíše uváděl vhodné úlohy. Tak např. vezměme jednoduchou důkazovou úlohu: budiž D vnitřní bod trojúhelníka ABC ; má se dokázat, že je $AD + BD < AC + BC$. Obrázek s ostroúhlým trojúhelníkem svádí k pokusům dokázat, že platí $AD < AC$, $BD < BC$. V trojúhelníku s tupým úhlem $\sphericalangle ACB$ však tyto nerovnosti nemusí platit a přesto je nerovnost $AD + BD < AC + BC$ pravdivá pro všechny vnitřní body D trojúhelníka ABC ; k důkazu je ovšem třeba vhodně dvakrát užít trojúhelníkové nerovnosti.

Profesor Čech soustřeďoval svou pozornost hlavně na nižší stupeň střední školy, ať výběrové či nevýběrové. Snad proto, že se tehdy po roce 1945 rodila jednotná škola a že nižší stupeň byl nejzanedbanější a zásah nejvíce potřeboval. Jeho učebnice byly náročné – asi hlavně pro tehdejší učitele; ale Čech vycházel z přesvědčení, že i obtížné partie lze učinit přístupné žákům, jestliže se postup rozčlení na malé krůčky a metodicky dobře zpracuje.

Řešení úloh přisuzoval značný význam. Jeho přičiněním vtrhla do naší školské matematiky až do té doby nevidaná a neslýchaná kategorie *důkazových úloh*. U geometrických konstrukčních úloh vyžadoval diskuse; skrovného algebraicko-aritmetického aparátu, který měli žáci nižšího stupně k dispozici, využíval k řešení úloh z elementární číselné teorie a elementární funkční teorie. Sem zavedl úlohy s nerovnostmi, s absolutními hodnotami, lineární lomenou funkcí (to na vyšším stupni) a jiné novinky, a to jak obsahové, tak metodické.

Vzpomínám na zděšení, které vyvolal Čech na jednom shromáždění poznámkou, že odvození rovnic kuželoseček v analytické geometrii je ve většině učebnic uvedeno špatně. Vyjde se z fokální definice, výpočtem se odvodí např. rovnice $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ale obráceně se nedokáže, že každý bod, jehož souřadnice vyhovují této rovnici, splňuje i fokální definici. Zdá se neuvěřitelné, ale je příznačné pro stav tehdejšího vyučování, že mohli učitelé s vysokoškolským vzděláním obhajovat neúplné odvození s tím, že „by to bylo s obracením příliš dlouhé a nepřehledné“.

Své myšlenky o rekonstrukci vyučování matematice uložil Čech nejen do učebnic, ale i do populárních knížek určených pro nejširší veřejnost, hlavně však pro učitele. Jsou to: *Čísla a početní výkony*, *Elementární funkce* a *Co je a nač je vyšší matematika*. Ve formě skript, popřípadě vůbec nevydané zůstaly původní rukopis analytické geometrie, sbírky úloh z elementární aritmetiky a elementární geometrie, axiomaticky budované základy geometrie a možná ještě další.

Když mi kdysi před dávnými léty (bylo to tuším v r. 1946 nebo 1947) dával profesor Čech pokyny pro cvičení, která jsem vedl na pedagogické fakultě k jeho přednášce z geometrie, zdůrazňoval, že učitelé by měli pochopit dvě věci: za první rovnocennost postupů algebraizace geometrie a geometrizace aritmetiky a za druhé důležitost vektorového aparátu a jeho ovládnutí. Přišel se dokonce podívat na jedno moje cvičení do tehdejší budovy pedagogické fakulty na Letné a pochopitelně nebyl příliš spokojen. Ostatně mám dojem, že se vektorová algebra ještě dlouho potom nevžila, a to ani na gymnáziích.

Čech jako zastánce logického systému ve vyučování matematice nebyl odpůrce axiomů ve škole. Připouštěl však rozsáhlejší soubory výchozích vět – vlastně didaktické soustavy axiomů, kterých užíval – řečeno dnešními slovy – k lokálnímu uspořádání poznatků a zdůraznění logických souvislostí.

Nezažil jsem tzv. brněnské matematické besedy o školské matematice; podle toho, co jsem slyšel vyprávět, musely být velmi zajímavé a podnětné. Měl by promluvit někdo z tehdejších jejich účastníků. Hrozné období nacistické okupace mělo nechtě pro nás školské matematiky i jeden dobrý důsledek. Čech byl vyřazen uzavřením vysokých škol z práce na univerzitě a měl čas zabývat se školskou matematikou. Po osvobození r. 1945 a po svém přechodu do Prahy byl zavalen funkcemi a úkoly a pro středoškolskou matematiku mu nezbývalo mnoho času: to ovšem neznamená, že se jí vzdal úplně. Vedle své aktivity v přípravě učitelů matematiky intenzivně propagoval sovětskou didaktickou literaturu, překládal dokumenty na seminářích třeba z listu ruské předlohy a usměrňoval všechno vyučování matematice u nás, pokud mu to dovozovala oficiální úřední opatření a reformátorský chvat, kterým jsme tehdy stonali a snad ještě stůněme.

Lituji, jak jsem již řekl, že jsem nezažil brněnské schůzky, které vynikaly bezprostředností a neoficiálností styků. V Praze to už bylo jiné i při seminářích, natož při přednáškách, byť i improvizovaných. Ale Čech byl vždy zajímavý, neboť přicházel s čerstvými nápady, zkrátka, vždy měl co říci.

Za Čechova života jen sem tam probleskovala slovíčka „modernizace vyučování matematice“, která dnes ovládla všechny didaktické aktivity. Také didaktika prodělává pronikavé změny. Z celkem bezvýznamné pedagogické disciplíny se stává stále víc a více vážným ceněným mezivědním oborem. Způsobuje to tlak, který vykonávají na vyučování matematice požadavky společnosti; to je výrazně vidět zejména v socialistických zemích. V době před čtyřiceti léty bylo ve světě poměrně velmi málo tvůrčích matematiků formátu Čechova, kteří by se zabývali tak systematicky a do hloubky vyučováním matematice. A přece jen takovíto lidé mohou stanovit prognosticky vývojové tendence a linie a dodávat svým osobním angažováním vážnost nově se tvořící disciplíně.

Vytvoření mezivědního oboru „didaktika matematiky“ znamená kompromisy: matematika musí opustit svůj rigorózní deduktivní postup, pedagogické vědy však musí uznat dominantní postavení matematiky v její didaktice. Ovšem není možné připustit stanovisko, že se poznatek stane srozumitelnější, např. tím když se dopustíme chyby nebo nepřesnosti; to platí zejména o pojmech.

Řekli jsme na začátku, že vedoucí složkou didaktiky matematiky má být podle dnešního názoru matematika sama, matematika správná, matematika, která má vzdělá-

vací hodnotu. Tuto progresivní složku uskutečňoval už před 40 lety akademik Čech v plné míře, a to v teorii i ve vyučovací praxi.

Didaktika matematiky jako mezivědní disciplína se stará ještě o jiné věci, o otázky aplikability, o otázky psychologicko-pedagogické, o integraci postupů v různých oborech (školních předmětech) a v utvoření „blokových předmětů“, např. z matematiky, logiky a lingvistiky, na způsob myšlenkových postupů operačního výzkumu. Je patrné, že takováto didaktika matematiky není ani matematická disciplína, ani pedagogicko-psychologická disciplína, tj. ani přírodní, ani společenská věda. Obdobný vývoj prodělavá i její základní výzkum. Tato snaha o integraci je zřejmě reakce na přehnanou specializaci a na požadavek přebudování všeobecného vzdělání.

Je málo říci, že by nás zajímaly názory prof. Čecha o těchto věcech; my bychom je potřebovali znát. I když neprošel překotným vývojem posledních 20 let, anebo právě proto, měl by asi mnoho bystrých postřehů, nezatížených kruhy myšlenkových pochodů, v nichž se stále pohybujeme.

Je tolik nových didaktických pojmů, o kterých bychom se chtěli s prof. Čechem poradit: problémové vyučování, genetický postup, komunikační jazyky při vyučování matematice, metoda pedagogických šoků, otázky matematického obsahu při tzv. modernizaci, role experimentování a dedukce, strukturální a algoritmické vyučování, didaktický model, matematizace a mnoho jiných.

Profesor Čech měl v oblasti školské matematiky mnoho odpůrců, ale měl také mnoho žáků; rád bych se pokládal za jednoho z nich, i když on by asi nesouhlasil s mnoha věcmi, které dělám. Zdá se mi, že jsme si jeho odkazu ve vyučování matematice dosti nevážili. Nenechali jsme jeho učebnice rozvinout se tam, kde pro to byla příznivá půda.

Potřebovali bychom vědecké pracovníky, kteří by se šžili s problémy vyučování, nepodceňovali je, přinášeli didaktické podněty a vedli jejich realizování. Čím dále tím více poznáváme, že i v tomto směru byl Čech osobnost výjimečná, a historie naší školské matematiky bude trvale vzpomínat na světlou éru jeho činnosti.

AKADEMIK ČECH přednášel algebraickou geometrii; předpokládal, že je dán obor integrity, ke kterému sestrojí příslušné těleso, a nevěděl, má-li ho nazvat tělesem zlomků či podílovým tělesem. Prohlásil, že ví, že se s akademikem Kořínkem přeli, má-li se říkat těleso zlomků nebo podílové těleso. Profesor Kořínek prý chtěl říkat těleso zlomků a on, akademik Čech podílové těleso, nebo to bylo obráceně? Když jsme ho ujistili, že akademik Kořínek používá ve svých *Základech algebry* zásadně pojmu podílové těleso, řekl akademik Čech, že si úplně

jasně vzpomíná, že on byl vždy pro těleso zlomků.

PŘI PŘEDNÁŠCE akademika Čecha byl přítomen jeho tehdejší aspirant A. Švec, a když mluvil akad. Čech o jedničce oboru integrity, upozornil ho Švec, že by při zkoušce u akademika Kořínka moc dobře neobstál. Nemá se totiž říkat jednička, ale jednotkový prvek. „No dobře“, bránil se profesor Čech, „co kdybych ale řekl vše dobře, to by mi Kořínek napsal do indexu jednotkový prvek?“