Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Břetislav Novák

O osmém Hilbertově problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 18 (1973), No. 1, 9--17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138298

Hilbertovy problémy

O osmém Hilbertově problému

Břetislav Novák, Praha

Osmý Hilbertův problém je v pořadí druhý z dvaceti tří problémů, který je věnován teorii čísel. Není vlastně formulován jako problém jediný, ale jako celá řada otázek souvisejících s prvočísly nebo obecnějšími podobnými objekty – prvoideály.

Otázky, které D. Hilbert v r. 1900 shrnul pod svůj osmý problém (nazvaný kuse „problém prvočísel"), lze shrnout obecně jako studium nulových bodů Riemannovy funkce $\zeta(s)$ (a případných jejich analogií v jiných číselných tělesech) a vztahů mezi vlastnostmi této funkce a vlastnostmi prvočísel (studium rozložení prvočísel, Goldbachův problém, problém tzv. prvočíselných dvojčat atp.)

Všimneme si v následujících odstavcích nejdůležitějších metod a výsledků v této problematice, a to jak z hlediska historického, tak i z hlediska nejlepších současných výsledků. Připomeňme, že v knize [1] píše o tomto problému známý leningradský matematik Ju. V. Linnik, jehož práce velmi podstatnou měrou přispěly k rozvoji této problematiky. Ze starších i nových monografií, které se ve větší nebo menší míře těchto otázek dotýkají, lze čtenáři k podrobnějšímu studiu doporučit zejména díla [3]–[6]. Současně upozorňujeme na obsáhlou a přístupnou stať profesora V. Jarníka [2], která je vlastně mistrovsky psaným nástinem celé problematiky a na jeho některé recenze knih v *Časopise pro pěstování matematiky* (*67* (1937), D 54–56, *74* (1949), D 87–88, *85* (1960), 364–392).

Jak známo, prvočíslem rozumíme takové přirozené číslo p větší než jedna, jehož jediní celočíselní dělitelé jsou čísla ± 1, $\pm p$. Již Eukleidovi bylo známo, že existuje nekonečně mnoho prvočísel. Označíme-li tedy pro kladná x symbolem $\pi(x)$ počet prvočísel nepřesahujících x, je $\pi(x)$ neklesající a neomezená funkce. Naskýtá se přirozená otázka, jak „rychle" roste funkce $\pi(x)$, tj. hledáme nějakou „jednoduchou" funkci $f(x)$, aby rostla „stejně" jako funkce $\pi(x)$, tzn., aby podíl $\pi(x)/f(x)$ ležel pro všechna $x \geqq 2$ mezi dvěma kladnými konstantami. Jemnější problém je nalézt funkci $f(x)$ tak, aby $\lim_{x \to +\infty} f(x)/\pi(x) = 1$, tj. tak, aby funkce $f(x)$ a $\pi(x)$ si byly asymptoticky rovny nebo dokonce tak, aby rozdíl $\pi(x) - f(x)$ byl „podstatně" menší než $f(x)$.

Prvou domněnku vyslovil v tomto směru LEGENDRE v r. 1789 (přesně ji formuloval až v r. 1808): $f(x) = x/\lg x$, tj.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\lg x}{x} = 1\,. \tag{1}$$

Legendre ovšem vztah (1) nedokázal. Prvý pokrok vůbec zaznamenal ruský matematik P. L. ČEBYŠEV až v letech 1851–2. Čebyšev nejprve poznal, že funkce $\int_2^x \mathrm{d}u/\lg u$ (tzv. integrállogaritmus) se „lépe“ hodí k aproximaci funkce $\pi(x)$ než funkce $x/\lg x$. V prvém přiblížení jsou si obě tyto funkce asymptoticky rovny, přesněji však máme pro každé přirozené q

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} - \left(\frac{x}{\lg x} + \frac{1!\,x}{\lg^2 x} + \frac{2!\,x}{\lg^3 x} + \ldots + \frac{(q-1)!\,x}{\lg^q x}\right)}{\dfrac{q!\,x}{\lg^{q+1} x}} = 1\,. \tag{2}$$

Čebyšev nyní ukázal, že pro každé přirozené q je

$$\begin{aligned} &\limsup_{x\to+\infty} \frac{\lg^q x}{x}\left(\pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u}\right) \geqq 0 \\ &\liminf_{x\to+\infty} \frac{\lg^q x}{x}\left(\pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u}\right) \leqq 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Existuje-li tedy pro některé přirozené q limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg^q x}{x}\left(\pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u}\right),$$

je tato limita rovna nule. Speciálně pro $q = 1$ dostaneme použitím (2): Existuje-li limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\lg x}{x},$$

je rovna jedné. Existenci této limity se však Čebyševovi nepodařilo dokázat. Ukázal však – a to byl v té době veliký pokrok – že funkce $x/\lg x$ dobře aproximuje funkci $\pi(x)$ pro velké hodnoty x, přesněji Čebyšev ukázal, že platí

$$a \leqq \liminf_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\lg x}{x} \leqq \limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\lg x}{x} \leqq \frac{6}{5}\,a\,, \tag{4}$$

kde $a = \lg\left(\sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}\,\sqrt[5]{5}\right) - \lg \sqrt[30]{30} = 0{,}9129\ldots$

Všimneme-li si metodického přínosu Čebyševových prací, je možno zdůraznit dvě věci:

Čebyšev ve svých vyšetřováních podstatně využil vlastností funkce $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ pro reálná $s > 1$. Vztah této funkce k prvočíslům byl znám již Eulerovi:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \tag{5}$$

pro $s > 1$, kde vpravo v nekonečném součinu probíhá p všechna prvočísla. EULER ve svém známém důkazu nekonečnosti množiny všech prvočísel využil vlastně vztahu $\lim_{s \to 1+} \zeta(s) = +\infty$, který plyne z divergence harmonické řady (kdyby bylo prvočísel jen konečně mnoho, byl by vpravo součin jen konečně mnoha členů, který by měl pro $s \to 1+$ konečnou limitu). Čebyšev ve svém důkazu vztahů (3) využil naproti tomu mnohem jemnějších vlastností funkce $\zeta(s)$ (např. že existuje konečná limita $\lim_{s \to 1+} (\zeta(s) - 1/(s - 1))$. Druhým Čebyševovým přínosem bylo zavedení funkce

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \lg p$$

(sčítáme přes všechna prvočísla p nepřesahující x). Snadno lze totiž nahlédnout, že asymptotické vlastnosti funkcí $\vartheta(x)$ a $\pi(x)$ se vzájemně přenášejí. Speciálně „prvočíselná věta" (1) je ekvivalentní se vztahem

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1 .$$

Dokonce čím „lepší" odhad pro rozdíl $\vartheta(x) - x$ získáme, tím lepší bude náš odhad pro rozdíl

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\lg u} .$$

S funkcí $\vartheta(x)$ se současně velmi dobře pracuje (zhruba řečeno: prvočísla jsou definovaná multiplikativně a logaritmováním se multiplikativní vlastnosti převedou na aditivní). Uveďme ještě, že z nerovnosti (4) odvodil Čebyšev důkaz tzv. BERTRANDOVA postulátu: pro každé celé x leží mezi x a $2x$ alespoň jedno prvočíslo.

Zdálo by se, že podrobnějším studiem vlastností funkce $\zeta(s)$ pro $s \to 1+$ by bylo možno prvočíselnou větu dokázat. Skutečně je to možné, ale v tehdejších podmínkách bylo zřejmě nevyhnutelné sáhnout k metodám, které jsou sice podle dnešních znalostí k důkazu vztahu (1) zbytečně silné, ale které znamenají dalekosáhlý pokrok v celém problému. Za tento krok vděčíme německému matematikovi BERNARDU RIEMANNOVI, o němž lze bez nadsázky říci, že svou jedinou prací z r. 1860, která má přibližně deset stran, založil celou moderní teorii prvočísel.

Riemannova myšlenka je v základě velmi jednoduchá: vyšetřovat funkci $\zeta(s)$ (nazývanou také Riemannovou dzeta funkcí) jako funkci komplexní proměnné s. Je zajímavé, že Riemann ve své práci dokázal poměrně málo; řadu výsledků však uvedl jen s jistým odůvodněním a řadu výsledků předpověděl.

Snadno nahlédneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ konverguje (absolutně a lokálně stejnoměrně) v oboru $\operatorname{Re} s > 1$. Riemann ukázal, že funkci $\zeta(s)$ lze definovat dokonce pro všechna komplexní s (jde tedy o tzv. analytické pokračování z poloroviny $\operatorname{Re} s > 1$ do celé roviny), přičemž dostaneme funkci, která má jediný pól v bodě $s = 1$ s reziduem 1 (a je to jednoduchý pól), tj. funkce $(s - 1)\,\zeta(s)$ i $\zeta(s) - 1/(s - 1)$ jsou celé funkce. Dále ukázal, že funkce

$$\xi(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\,\zeta(s)$$

($\Gamma(s)$ znamená známou funkci gamma) má jediné póly pro $s = 0$ a $s = 1$ a platí pro ni vztah (funkcionální rovnice pro funkci $\zeta(s)$)

(6) $$\xi(s) = \xi(1 - s)\,.$$

Z tohoto vztahu plyne ihned (neboť funkce gamma je nenulová a má jednoduché póly $s = 0, -1, -2, \ldots$), že funkce $\zeta(s)$ má (jednoduché) nulové body pro $s = -2, -4, \ldots$ a všechny ostatní její nulové body leží v pásu $0 \leqq \operatorname{Re} s \leqq 1$ a jsou symetricky rozloženy podél přímek $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s = 0$ a nejsou reálné.

To je vše, co Riemann skutečně dokázal. Na základě heuristických úvah však Riemann předpokládal, že funkce $\zeta(s)$ má řadu klíčových vlastností. Je pozoruhodné, že všechny tyto vlastnosti – až na jedinou – byly poměrně brzy skutečně dokázány. Poslední tzv. Riemannova domněnka není však dodnes dokázána. Tak např. Riemann předpokládal, že funkce $N(T)$ označující počet nulových bodů funkce $\zeta(s)$ v oboru $0 \leqq \operatorname{Re} s \leqq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leqq T$ splňuje vztah

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}\,T \lg T - \frac{1 + \lg 2\pi}{2\pi}\,T + O(\lg T)^{*})\,.$$

Speciálně tedy má mít funkce $\zeta(s)$ v uvedeném pásu nekonečně mnoho kořenů. Z této vlastnosti lze snadno odvodit, že řada $\sum 1/|\varrho|$ diverguje, kdežto řada $\sum 1/|\varrho|^2$ konverguje (ϱ probíhá všechny netriviální tj. různé od $-2, -4, \ldots$ kořeny funkce $\zeta(s)$). Konečně Riemann předpokládal (a to je jeho slavná domněnka), že všechny netriviální kořeny funkce $\zeta(s)$ leží na přímce $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ a že mezi funkcemi $\pi(x)$ a $\zeta(s)$ je tento vztah ($x \geqq 2$)

(7) $$\pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \tfrac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \ldots = \operatorname{Li}(x) - \sum_{\varrho}(\operatorname{Li}(x^{\varrho}) + \operatorname{Li}(x^{1-\varrho})) + {} + \int_x^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 - 1)\,t \lg t} - \lg 2\,,$$

kde sčítáme přes všechny kořeny ϱ funkce $\zeta(s)$ v oboru $\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re} s \leqq 1$, $\operatorname{Im} s < 0$ uspořá-

*) V tomto vzorci měl Riemann chybu: předpokládal zbytek tvaru $O(1/T)$. Symbolem $f(x) = O(g(x))$ přitom míníme, že existují čísla x_0, C tak, že pro $x \geqq x_0$ je $|f(x)| \leqq Cg(x)$.

dané podle rostoucí imaginární části. Symbolem $\mathrm{Li}(z)$ Riemann míní hodnotu

$$\lim_{\delta \to 0+} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + \int_{1+\delta}^{z} \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} \right) = \int_2^z \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + \text{konstanta}$$

pro $z > 1$ a hodnotu

$$\int_{-\infty}^{u} \frac{\mathrm{e}^{t+\mathrm{i}v}}{t + \mathrm{i}\,v} \, \mathrm{d}t + \pi \mathrm{i} \operatorname{sgn} v$$

pro $z = \mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}$. Abychom si učinili představu o vztahu (7), uvažme, že vzhledem k Čebyševovu odhadu (4) je levá strana v tomto vztahu tvaru $\pi(x) + O(\sqrt{x})$ (nenulových členů je nejvýše $\lg x/\lg 2$, neboť $\pi(\sqrt[k]{x}) = 0$ pro $k > \lg x/\lg 2$). Integrál vpravo je $O(1/x^2 \lg x)$ – jeho příspěvek je malý a odhlédneme-li od konstant zbývá odhadnout součet

$$\mathrm{Li}\,(x^{\varrho}) + \mathrm{Li}\,(x^{1-\varrho})\,.$$

Je-li $\operatorname{Re} \varrho = \frac{1}{2} + \alpha$, $\alpha \geqq 0$, zjistíme snadno, že tento výraz je nejvýše (C je vhodná konstanta)

$$C(x^{\frac{1}{2}+\alpha} + x^{\frac{1}{2}-\alpha}) \leqq 2Cx^{\frac{1}{2}+\alpha}\,,$$

tj. zmíněný součet se dá tím lépe odhadnout, čím blíže leží kořen ϱ Riemannovy funkce k přímce $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Odtud je patrná souvislost mezi rozložením nulových bodů funkce $\zeta(s)$ a velikostí rozdílu

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u}\,.$$

Riemann ke své formuli (7) došel vyšetřováním integrálu

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} \frac{\lg \zeta(s)}{s} \, x^s \, \mathrm{d}s$$

(integrujeme přes přímku $\operatorname{Re} s = a > 1$), který vyjadřuje levou stranu v (7) a dosazuje za $\zeta(s)$ její vyjádření ve tvaru nekonečného součinu, jehož jednotlivé členy (po jistých obtížích technického rázu) dávají pravou stranu v (7). Riemannova zásluha záleží tedy zejména v nastínění cesty k důkazu prvočíselné věty s jasnou formulací jednotlivých kroků.

Je však vidět, že Riemann zašel vzhledem k tehdejším (a i vlastně současným) možnostem matematiky velmi daleko. Třebaže jsme v současné době daleko od důkazu jeho domněnky, máme tím větší obdiv k jeho geniální matematické invenci.

Jak pokračoval vývoj dále? Trvalo skoro čtyřicet let, než v letech 1898–9 (nezávisle na sobě) Hadamard a de la Vallée Poussin dokázali využitím Riemannových myšlenek vztah (1). De la Vallée Poussin dokázal ve skutečnosti ještě více:

(8)
$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + O\left[x\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{(\lg x)}}\right],$$

kde c je jistá kladná konstanta. Podívejme se, co vlastně tento vztah říká. Protože při daných kladných m a ε je zřejmě pro všechna dostatečně velká x

$$\varepsilon \lg x > c \sqrt{(\lg x)} > m \lg\lg x\,,$$

znamená vztah (8) „více" než

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + O\left(\frac{x}{\lg^m x}\right)$$

(pro sebevětší m), ale „méně" než

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + O(x^{1-\varepsilon}) \tag{9}$$

(pro sebemenší $\varepsilon > 0$)*). Další pokrok znamenaly WEYLOVY práce, s jejichž pomocí v r. 1924 dosáhl LITTLEWOOD zlepšení (8) na (C je opět jistá kladná konstanta)

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + O[x\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{(\lg x \lg\lg x)}}]\,. \tag{10}$$

Je jasné, že (10) je opět slabší než (9) pro libovolné $\varepsilon > 0$. Nejostřejší výsledek současné doby (publikovaný i s důkazem) vznikl na základě prací I. M. VINOGRADOVA a N. M. KOROBOVA z r. 1958**)

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + O[x\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{(\lg x)^{3/5}(\lg\lg x)^{-1/5}}}]\,. \tag{11}$$

Postupy, jichž se užívá v současné době, vycházejí z jisté úpravy Riemannovy metody.

Vraťme se však ještě k Riemannově domněnce. Označíme-li symbolem Θ supremum reálných částí nulových bodů Riemannovy funkce ζ, víme v současné době jen, že platí $\frac{1}{2} \leqq \Theta \leqq 1$. Není tedy ani známa nerovnost $\Theta < 1$. (Riemannova domněnka říká, že $\Theta = \frac{1}{2}$). Současně lze ukázat, že Θ je infimum všech těch α, pro něž je

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + O(x^\alpha)\,.$$

Riemannova domněnka dává přesněji vztah

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + O(x^{\frac{1}{2}} \lg x)\,.$$

Z výsledků, které jsme uvedli, je patrné, jak daleko jsme od jejího důkazu. Uveďme

*) Všimněme si, že ve vztahu (8) vzhledem k (2) nemůžeme integrál nahradit funkcí $x/\lg x$. Integrállogaritmus tedy podstatně lépe sleduje funkci $\pi(x)$.

**) V těchto pracích se uvádí vztah (11) dokonce bez faktoru $(\lg\lg x)^{-1/5}$. Viz k tomu [6] str. 226 neb [3] str. 111.

některé výsledky, které svědčí o její platnosti. Již HARDY ukázal v r. 1914, že funkce $\zeta(s)$ má na přímce $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ nekonečně mnoho nulových bodů. Označíme-li $N(\delta, T)$ počet nulových bodů funkce $\zeta(s)$ v oboru $0 < \operatorname{Im} s \leqq T$, $|\operatorname{Re} s - \frac{1}{2}| \leqq \delta$, ukázali BOHR a LANDAU v r. 1914, že pro každé $\delta > 0$ je

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{N(\delta, T)}{N(\frac{1}{2}, T)} = 1 ,$$

tj. „skoro všechny" nulové body funkce $\zeta(s)$ leží na přímce $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Norský matematik A. SELBERG ukázal v r. 1940 nerovnost

$$N(0, T) \geqq N(\tfrac{1}{2}, T)\, \eta ,$$

pokud $N(0, T) > 0$, kde η je pevná (i když velmi malá) kladná konstanta (připomeňme, že Riemannova domněnka má tvar $N(0, T) = N(\frac{1}{2}, T)$ pro všechna T).

Z řady dalších výsledků, které podporují Riemannovu domněnku, uvedeme tři velmi rozdílné.

Pomocí složité a důmyslné metody lze postupně lokalizovat a přibližně s libovolnou přesností určit všechny nulové body funkce $\zeta(s)$ v oboru $0 < \operatorname{Im} s < T$ pro libovolné předem zadané T (např. prvé nulové body jsou s přesností na dvě místa u imaginární části $0{,}5 + 14{,}13\,i$, $0{,}5 + 21{,}02\,i$, $0{,}5 + 25{,}01\,i$) a rozhodnout, zdali leží nebo neleží na přímce $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. V r. 1966 bylo tak např. ukázáno, že prvé dva miliony nulových bodů na této přímce leží.

Řada výsledků byla odvozena za předpokladu platnosti Riemannovy domněnky a byla nalezena řada tvrzení s ní ekvivalentních. Je vysoce zajímavé, že v poslední době byly dokázány výsledky mnohem silnější, než jaké vyplývají z Riemannovy domněnky nebo vlastně z jejího zesílení pro tzv. DIRICHLETOVY L-řady.

Konečně uveďme, že v r. 1941 se francouzskému matematikovi A. Weylovi podařilo dokázat analogon Riemannovy domněnky pro jistou třídu funkcí tvaru $\sum_{n=1} a_n n^{-s}$ (tzv. kongruentní L-funkce). Abychom byli spravedliví, uveďme, že na druhé straně funkce

$$\sum_{m,n} (m^2 + 5n^2)^{-s}$$

(sčítáme přes všechna celá m, n, která nejsou současně nulová) má nulové body i v polorovině $\operatorname{Re} s > 1$ i v oboru $0 < \operatorname{Re} s < 1$, které neleží na přímce $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$*).

Snad je i z uvedeného kusého nástinu celé problematiky patrné, že obtížnost důkazu (nebo vyvrácení) Riemannovy domněnky s největší pravděpodobností přesahuje současné možnosti matematiky. I. M. Vinogradov, jehož metoda dovolila relativně velký pokrok v této oblasti (viz vztahy (10) a (11)) o tom píše ve své knížce z r. 1971, že k důkazu platnosti odhadu (9) i pro sebemenší $\varepsilon > 0$ (tj. i k důkazu toho, že $\zeta(s) \neq 0$ v oboru

*) Pro zajímavost uveďme, že před několika lety vydal sovětský matematik GAVRILOV „důkaz" Riemannovy domněnky. Aby se ho podařilo přesvědčit o chybnosti jeho úvah, musel A. I. Vinogradov sestrojit příklad funkce, pro niž platily jednotlivé „úvahy" a neplatila Riemannova domněnka.

Re $s < 1 - \varepsilon$) nebude stačit další zdokonalování jeho postupu, nýbrž další podstatnější pokrok v celé teorii funkce $\zeta(s)$; jinak řečeno: je potřeba hledat novou metodu.

Nebudeme se podrobněji zabývat analogií celé problematiky v některých číselných tělesech (zde jde o asymptotiku počtu prvoideálů, jejichž norma nepřesahuje x; analogie Riemannovy funkce $\zeta(s)$ se nazývá obvykle Dedekindova dzeta funkce), neboť klasické výsledky lze přenést prakticky stejně a novější přesahují rámec těchto řádek. Zmiňme se na závěr o GOLDBACHOVĚ problému, o němž se Hilbert domníval, že může být řešen na základě vyšetřování funkce $\pi(x)$ a problému tzv. prvočíselných dvojčat. Omezíme se přitom na hlavní výsledky.

Goldbachův problém (formulovaný v dopise L. Eulerovi v r. 1742) zní takto: každé sudé číslo větší než dvě je součtem dvou prvočísel. Tzv. ternární Goldbachův problém je jeho důsledkem a zní: každé liché číslo větší než sedm je součtem tří prvočísel. Prakticky jediný definitivní výsledek pochází od I. M. Vinogradova z r. 1937 (viz podrobněji [2]): každé dostatečně velké (tj. větší než jisté n_0) liché číslo n je součtem tří prvočísel. Metoda důkazu této věty je analytická; potřebuje však více než znalost chování funkce $\pi(x)$. Využívá totiž asymptotiky obecnější funkce $\pi_{k,l}(x)$ – počtu prvočísel tvaru $kn + l$ nepřesahujících x. Metodou jako u funkce $\pi(x)$ (místo Riemannovy funkce zde vystupují složitější Dirichletovy L-řady) lze ukázat, že pro nesoudělná k, l, $0 < l < k$ je

$$\pi_{k,l}(x) = \frac{l}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\lg u} + O\left[x\, \mathrm{e}^{-c(\lg x)^{3/5}(\lg\lg x)^{-1/5}}\right],$$

kde $\varphi(k)$ (Eulerova funkce) označuje počet přirozených čísel menších než k a s číslem k nesoudělných. Lze ukázat, že odhad je stejnoměrný pro všechna $k \leqq \lg^A x$ pro každé konstantní A. Lze-li tedy říci, že ternární Goldbachův problém je „v podstatě“ vyřešen (hodnota n_0 je totiž hodně velká), jsou známy u Goldbachova původního problému jen částečné výsledky. Zvolíme-li např. přirozené číslo m platí pro počet $\tau(x)$ sudých čísel nepřesahujících x, která se nedají napsat jako součet dvou lichých prvočísel odhad $\tau(x) = O(x \lg^{-m} x)$, tj. pro „skoro všechna“ sudá čísla platí Goldbachova domněnka.

Podobná je situace u „prvočíselných dvojčat“, tzn., že se zde ptáme na řešení rovnice $p - q = 2$, kde p a q jsou prvočísla. Označme $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$ posloupnost všech prvočísel a buď $d_i = p_i - p_{i-1}$. Existenci nekonečně mnoha prvočíselných dvojčat lze vyjádřit také tak, že vztah $d_i = 2$ je splněn pro nekonečně mnoho indexů i. Pro orientaci uvažme, že z prvočíselné věty plyne vztah

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{n \lg n} = 1\,.$$

Nyní je např. známo „jen“, že

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{d_n}{\lg p_n} < 1\,.$$

Z prvočíselné věty dále snadno plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ diverguje. V r. 1920 dokázal

VIGGO BRUN konvergenci řady

$$\sum_{d_n=2} \frac{1}{p_n}$$

(tj. sčítáme pouze přes prvočíselná dvojčata). Označíme-li počet prvočíselných dvojčat nepřesahujících x symbolem $\pi_2(x)$, lze dokonce dokázet, že

$$\pi_2(x) = O\left(\frac{x}{\lg^2 x}\right)$$

(srovnejte s (1) – odtud snadno plyne Brunnova věta). Je zajímavé, že všechny výsledky uváděné v tomto odstavci jsou výsledkem nikoli vyšetřování funkce $\zeta(s)$, tzn., že nebyly dosaženy analytickou cestou, nýbrž zcela elementární (i když velmi komplikovanou) metodou „síta", která je vlastně důmyslným zobecněním známého Eratosthenova síta. Touto metodou lze dokázat i dílčí výsledky ke Goldbachově problému (A. I. Vinogradov 1957): každé dostatečně velké sudé číslo je součtem dvou „skoro" prvočísel, tj. čísel, která mají ve svém rozkladu nejvýše tři prvočinitele.

Literatura

[1] Problémy Gil'berta (sborník), Moskva 1969.
[2] V. JARNÍK, *Tři sovětské knihy o analytické teorii čísel*, Časopis pro pěst. mat. *76*, (1951), 35—65.
[3] K. CHANDRASEKHARAN, *Arithmetical Functions*, Springer Verlag 1970.
[4] K. PRACHAR, *Primzahlverteilung*, Springer Verlag 1957.
[5] E. C. TITCHMARSH, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford 1951.
[6] A. Z. WALFISZ, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, VEB Berlin 1963.

Zajisté s určitostí mohu počítat s tím, Svatý Otče, že někteří, jakmile se doslechnou, že jsem v těchto knihách, které jsem napsal o obězích sfér světa, přisoudil Zemi některé pohyby, ihned strhnou pokřik, že si zasloužím, abych byl pro takovou domněnku rázně umlčen...

MIKULÁŠ KOPERNÍK, De revolutionibus, začátek věnovacího dopisu papeži Pavlovi III.

A tak já při tom uspořádání pohybů, které Zemi ve svém díle připisuji, jsem konečně po mnohém a dlouhém pozorování shledal, že jestliže se pohyby ostatních planet přenesou na oběh Země a to se stane základem pro oběh kterékoli planety, nejen že tak vyjdou jejich zdánlivé pohyby, ale i pořadí a velikosti všech planet a sfér a celé nebe se tak dokonale navzájem propojí, že v žádné jeho části není možno cokoliv přemístit, aniž by se uvedly v nepořádek všechny ostatní části a celý vesmír.

MIKULÁŠ KOPERNÍK, De revolutionibus, věnovací dopis papeži Pavlovi III. z r. 1542.
