Věra Pohlová

Fraktální geometrie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 34 (1989), No. 5, 267--277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138364

Fraktální geometrie

Věra Kůrková, Praha

Harmonie světa se zjevuje ve formě a čísle a v pojmu matematické krásy je ztělesněna veškerá poezie filozofie přírody.

D'ARCY THOMPSON: *On Growth and Form* (*Epilog*)

Fraktální geometrie se stala v poslední době díky rozvoji počítačové grafiky velice populární. Barevné fotografie obrazovek počítačů s nádhernými ornamenty připomínajícími orientální koberce a s obrázky krajin s horami a jezery, které byly vytvořeny na základě algoritmů pro generování fraktálních množin, jsou dnes známy široké veřejnosti z časopisů a dokonce i z výstav tzv. artware.

Fraktální geometrie však byla vytvořena již před více než dvaceti lety matematikem B. B. Mandelbrotem. Představuje nový pohled na geometrii — nové paradigma. Mandelbrot sám ji charakterizoval jakožto morfologii amorfního. Zhruba v téže době, kdy Mandelbrot vytvářel fraktální geometrii, objevil E. N. Lorenz podivný atraktor (r. 1963), což vedlo ke vzniku teorie tzv. deterministického chaosu. Jako kdyby se nezávisle na různých místech vynořilo nové téma ve vědě — hledání řádu v chaosu.

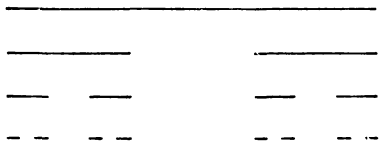
Jak zůstalo zachováno v názvu ($\gamma\varepsilon$ je řecky země a $\mu\varepsilon\tau\varrho o\nu$ je míra, měřítko), vyvinula se geometrie ve starověkém Řecku ze zeměměřičství. Zeměměřičství používalo kolík a provaz — odtud kružítko a pravítko (které však umožňovaly méně konstrukcí). Pod vlivem platónské filozofie se geometrie věnovala studiu ideálních pravidelných útvarů jako jsou kružnice, čtverce a pravidelné mnohoúhelníky a mnohostěny. Např. čtverec nebyl považován za speciální případ obdélníku, ale obdélník za nedokonalý čtverec. Fyzikálně platným se eukleidovský prostor stal teprve v novověku, kdy do něj Newton umístil svou mechaniku.

Teprve v minulém století se matematici začali zabývat velmi členitými útvary. První z nich byly spojité funkce, které nemají nikde derivaci, popsané Weierstrassem a Riemannem*). Koncem minulého a na počátku tohoto století byla objevena celá řada konstrukcí podivných útvarů jako např. r. 1883 Cantorovo diskontinuum (obr. 1), r. 1890 Peanova křivka (spojité zobrazení úsečky na čtverec) (obr. 3) a r. 1904 křivka Kochové (křivka nekonečné délky ohraničující konečnou plochu) (obr. 2). Objevy těchto konstrukcí byly některými matematiky přijímány s odporem, byly považovány za patologické a nazývány matematická monstra.**)

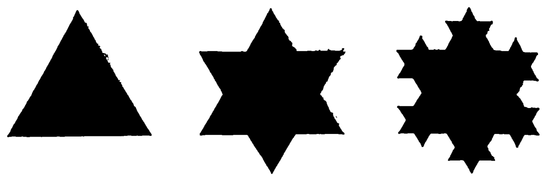
Teprve Mandelbrot ukázal, že logika vedla matematiky blíže ke skutečnosti, než sami tušili, že to, co bylo považováno za pouhé domýšlení myšlenkových konstrukcí

*) K. Weierstrass šokoval berlínskou akademii r. 1872 spojitou funkcí, která nemá v žádném bodě derivaci. První takovou funkci popsal již r. 1830 B. Bolzano, ale jeho objev byl publikován později.

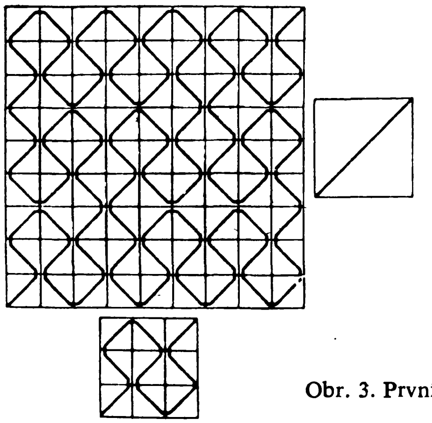
**) Ch. Hermite napsal v dopise T. Stieltjesovi (r. 1893), že se „odvrátil s hrůzou a ošklivostí od toho politováníhodného zla, jímž jsou funkce bez derivací“.



Obr. 1. První čtyři aproximace Cantorova diskontinua.



Obr. 2. První tři aproximace křivky Kochové.



Obr. 3. První tři aproximace Peanovy křivky.

ad absurdum, může sloužit jako základ pro modelování mnohých přírodních tvarů. „Matematická monstra" jsou vlastně limity posloupností množin, které se vyznačují opakováním téhož vzoru ve stále menším měřítku. Mandelbrot si povšiml, že i v přírodě jsou mnohé tvary více méně invariantní vůči změně měřítka. Např. mapy pobřeží zobrazeného v určitém měřítku vykazují jakousi podobnost se zobrazeními v měřítku jiném, větším či menším – způsob, jakým je pobřeží členité, nezávisí na tom, jak detailně tvar křivky zaznamenáváme. Rovněž růst rostlin a některých krystalů, Brownův pohyb mikroskopických částeček, agregace molekul v elektrolytu, turbulence tekutin, tvar elektrického výboje, vzduchové bublinky v oleji, prosakování vody skrz zem, roztoky, aerosoly, některé polymery a dokonce distribuce galaxií se vyznačují opakováním téhož vzoru ve stále jemnějším detailu.

Vlastnost být invariantní vůči změně měřítka nazval Mandelbrot soběpodobnost (anglicky self-similarity) a učinil z ní ústřední pojem celé své teorie. Zatímco klasická geometrie se zabývá objekty invariantními vůči transformacím představujícím různé symetrie, fraktální geometrie se zabývá invarianty vůči transformacím představujícím změnu měřítka.

B. B. Mandelbrot se narodil r. 1924 ve Varšavě, vystudoval v Paříži École polytechnique a věnoval se aplikované matematice. Od r. 1958 působí v USA u firmy IBM ve Výzkumném středisku Thomase J. Watsona u New Yorku, kde r. 1964 vytvořil pojem soběpodobnosti.

Se soběpodobností se setkal poprvé při studiu chyb při přenosu telekomunikačních signálů. V datech, která studoval, se střídaly intervaly bez chyb s intervaly, v nichž byl přenos chybný. Po zvýšení přesnosti měření se intervaly, které se při méně přesném měření jevily jako bezchybné, rozpadly na střídající se správné a chybné intervaly. To se opakovalo při libovolném zpřesňování měření. Mandelbrotovi to připomnělo Cantorovo diskontinuum (obr. 1).

Když se Mandelbrot setkal se soběpodobností podruhé — bylo to při studiu fluktuací tržních cen, jejichž krátkodobý i dlouhodobý časový průběh si byly podobné — začal se Mandelbrot o soběpodobnost zajímat. K podstatnému objevu ho však přivedlo teprve studium empirických dat týkajících se délek různých pobřeží, která nashromáždil a r. 1961 publikoval anglický excentrický vědec L. F. Richardson.

Měření délky pobřeží je problematické, neboť závisí na délce tyče, kterou pobřeží měříme. Kdybychom užívali stále kratší tyč, naměřená délka by se zvětšovala. Došli bychom tak k závěru, že všechna pobřeží jsou stejně, a to nekonečně dlouhá. L. F. Richardson odvodil na základě svých měření různých pobřeží empirický vzorec vyjadřující délku pobřeží měřeného tyčí délky ε ve tvaru $L(\varepsilon) = K \,.\, \varepsilon^{1-D}$, kde obě konstanty K i D jsou pro dané pobřeží invariantní. Takže charakteristikou pobřeží nebyla délka, která závisela na přesnosti měření, ale jakési dvě podivné konstanty, jejichž význam byl nejasný. B. B. Mandelbrotovi se podařilo dát těmto konstantám význam a učinit z nich základní pojmy fraktální geometrie. Richardsonův vzorec přepsaný do tvaru $K = N(\varepsilon) \,.\, \varepsilon^D$, kde $N(\varepsilon) = L(\varepsilon) \,.\, \varepsilon^{-1}$ je počet úseků délky ε, mu totiž připomněl Hausdorffovu míru a dimenzi.

Myšlenka definovat pojem míry jakožto zobecnění pojmů délky, plochy a objemu pro složitější podmnožiny eukleidovského prostoru je poměrně nová. Borel (r. 1895) užíval míry k odhadu velikostí množin při konstrukcích určitých „patologických" funkcí. Lebesgue (r. 1904) využil jeho myšlenku pro vytvoření základního pojmu pro svou konstrukci integrálu. Carathéodory (r. 1914) zavedl mnohem obecnější tzv. Carathéodoryho vnější míry. Mimo jiné definoval též 1-dimenzionální neboli lineární míru na n-dimenzionálním eukleidovském prostoru a naznačil, že obdobně může být pro libovolné přirozené číslo d definována d-dimensionální míra. Hausdorff (r. 1919) poukázal, že Carathéodoryho míra má smysl i pro necelá čísla d. Ukázal, že Cantorovo diskontinuum má kladnou konečnou d-dimenzionální Carathéodoryho míru právě pro $d = \log 2/\log 3 \approx 0{,}6309$. Proto nese tato míra a dimenze Hausdorffovo jméno.

Hausdorffova d-dimenzionální vnější míra, kde d je libovolné nezáporné číslo, je definována pro podmnožinu E n-dimenzionálního eukleidovského prostoru E_n předpisem:

$$\mathscr{H}^d(E) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \sum_{i \in \omega_0} (\operatorname{diam} U_i)^d \,, \quad \{U_i,\, i \in \omega_0\} \text{ je } \varepsilon\text{-pokrytí } E \Big\}$$

(pokrytí $\{U_i, i \in \omega_0\}$ množiny E se nazývá její ε-pokrytí, jestliže pro všechna $i \in \omega_0$ je $\operatorname{diam} U_i \leqq \varepsilon$). Tato limita může být rovna i ∞. Pro každou podmnožinu E eukleidovského prostoru E_n je $\mathscr{H}^d(E)$ jakožto funkce parametru d definována na množině $\langle 0, \infty)$ nerostoucí a jestliže pro některé d je $\mathscr{H}^d(E) < \infty$, pak pro všechna $\delta > d$ je $\mathscr{H}^d(E) = 0$ (pro všechna $\delta > n$ je $\mathscr{H}^d(E) = 0$). Jestliže pro některé $\delta > 0$ je $\mathscr{H}^\delta(E) > 0$, pak pro všechna $d \in \langle 0, \delta)$ je $\mathscr{H}^d(E) = \infty$. Existuje tedy právě jedna hodnota D parametru d $(0 \leqq D \leqq n)$ taková, že $\mathscr{H}^\delta(E) = 0$ pro všechna $\delta > D$ a $\mathscr{H}^\delta(E) = \infty$ pro všechna kladná $\delta < D$. D je tedy jediná hodnota parametru vyjadřující smysluplnou míru (umožňující srovnávání typu větší/menší). Toto číslo D se nazývá Hausdorffova dimenze množiny E.

Pojem Hausdorffovy dimenze nejlépe pochopíme, uvědomíme-li si, že plocha úsečky je rovna nule, stejně tak jako objem čtverce, zatímco délka čtverce i krychle je nekonečná. Chceme-li tedy zjišťovat míru úsečky, čtverce a krychle, musíme zvolit pro úsečku délku, pro čtverec plochu a pro krychli objem, abychom dostali smysluplnou míru. Matematicky můžeme tyto úvahy vyjádřit takto: Pokryjeme-li jednotkový čtverec $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon^2$ malých čtverečků o straně ε dostaneme ve vzorci $\lim_{\varepsilon \to 0} 1/\varepsilon^2 \,.\, \varepsilon^d$ pro exponent $d = 2$ hodnotu 1, zatímco pro exponent $d = 1$ dostaneme ∞ a pro exponent $d = 3$ dostaneme 0. Výše uvedená definice Hausdorffovy míry a dimenze je zobecněním tohoto postupu.

Hladké křivky mají Hausdorffovu dimenzi rovnou 1, avšak s rostoucí členitostí tato dimenze roste; dokonce existují křivky, jejichž Hausdorffova dimenze je rovna 2. Hausdorffova dimenze se tedy liší od dimenze topologické, která je invariantní vůči spojitým transformacím (Hausdorffova dimenze libovolné podmnožiny n-dimenzionálního eukleidovského prostoru je větší nebo rovna její dimenzi topologické). Hausdorffova dimenze není tedy pojem topologický, ale geometrický. Síla tohoto pojmu spočívá v tom, že je mírou členitosti. Proto také Mandelbrot použil tento pojem pro exaktní definici členité množiny, kterou nazval fraktál (fractus znamená latinsky lomený, zlomený) a definoval ji jako množinu, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než její dimenze topologická. Pojem fraktál vytvořil Mandelbrot r. 1974, když psal svou první knihu [4] věnovanou geometrii amorfního.

Definice fraktálu není úplně uspokojivá, neboť existují velmi členité množiny, jejichž Hausdorffova dimenze je rovna dimenzi topologické, např. tzv. ďábelské schodiště (obr. 4). Je to graf schodovité funkce definované na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Schody jsou v bodech Cantorova diskontinua. Hausdorffova dimenze grafu této funkce je rovna 1 (jeho délka je totiž rovna 2 a křivky konečné délky mají Hausdorffovu dimenzi rovnou 1). Ve většině případů však velmi členité množiny vyhovují Mandelbrotově definici.

Obr. 4. Ďábelské schodiště.

Určení Hausdorffovy dimenze je vzhledem ke složitosti její definice často obtížné a ještě obtížnější bývá nalezení nebo alespoň odhadnutí Hausdorffovy míry (většinou se těžko získávají dolní odhady). Naštěstí však pro dosti velkou třídu soběpodobných množin lze Hausdorffovu dimenzi spočítat podle velmi jednoduchého vzorce.

Mandelbrotův intuitivní pojem soběpodobnosti matematizoval Hutchinson [2]. Vyšel z toho, že soběpodobné množiny, jako např. Cantorovo diskontinuum (obr. 1) a křivka Kochové (obr. 2), jsou sestaveny z částí, které jsou geometricky podobné celku zmenšenému v určitém poměru. Definoval soběpodobnou podmnožinu E n-dimenzionálního eukleidovského prostoru E_n jakožto takovou neprázdnou kompaktní množinu, pro niž existuje konečně mnoho kontrahujících podobných zobrazení (= složení zmenšení, posunutí, rotace a popř. reflexe) $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$: $E_n \to E_n$ $(m \geqq 2)$ takových, že platí

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i(E) .$$

Kromě toho je ještě v jeho definici určitá podmínka zajišťující, že se obrazy množiny E pro jednotlivá φ_i příliš neprotínají (tato podmínka je např. splněna, když průniky $\varphi_i(E) \cap \varphi_j(E)$ pro $i \neq j$ jsou konečné množiny bodů). Hausdorffovu dimenzi takto definovaných soběpodobných množin lze snadno počítat, neboť pro tyto množiny je Hausdorffova dimenze rovna tzv. podobnostní dimenzi (angl. similarity dimension). Jsou-li $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ kontrahující podobná zobrazení, pak existují kladná čísla $r_1, \ldots, r_m < 1$ taková, že pro všechna $x, y \in E_n$ platí $|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| = r_i|x - y|$. Podobnostní dimenze je jediné kladné číslo D splňující rovnost

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^D = 1 .$$

V případě, že všechna zobrazení $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ mají tentýž poměr podobnosti r, platí $m \,.\, r^D = 1$ a odtud dostaneme vzorec $D = \log m/\log 1/r$, podle něhož můžeme spočítat Hausdorffovu dimenzi mnoha soběpodobných množin. Např. Cantorova diskontinua (obr. 1), které je sjednocením dvou kopií sebe sama zmenšených na třetinu: $D = \log 2/\log 3 \approx 0{,}6309$. Pro horní část křivky Kochové (obr. 2), která je sjednocením čtyř svých vlastních kopií, zmenšených na třetinu a překrývajících se pouze v krajních bodech, dostaneme $D = \log 4/\log 3 \approx 1{,}2618$. Pro Peanovu křivku (přesněji řečeno množinu) (obr. 3), která je sjednocením 9 svých kopií zmenšených na třetinu), dostaneme $D = \log 9/\log 3 = 2$.

Kromě jednoduchého vzorce pro výpočet Hausdorffovy dimenze má Hutchinsonova věta také existenční část. Pro libovolnou konečnou množinu kontrakcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ eukleidovského prostoru E_n (zobrazení $\varphi : E_n \to E_n$ se nazývá kontrakce, jestliže existuje $c < 1$ takové, že platí $(\forall x, y \in E_n)(|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqq c|x - y|)$ existuje právě jedna neprázdná kompaktní podmnožina $E \subseteq E_n$ taková, že

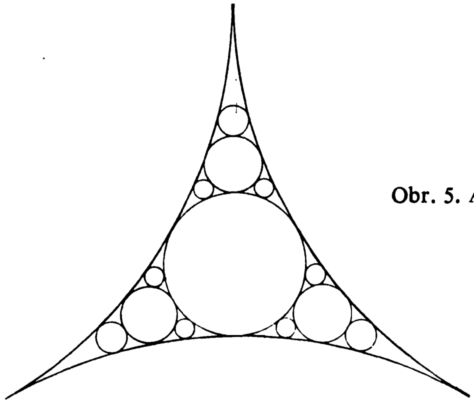
$$E = \bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i(E)$$

a tato E je uzávěrem množiny všech pevných bodů zobrazení z pologrupy transformací generované kontrakcemi $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ (tj. složení všech konečných posloupností těchto zobrazení)*)

*) Elegantní důkaz této věty dostaneme, přejdeme-li k prostoru $\mathscr{K}(E_n)$ všech neprázdných kompaktních podmnožin prostoru E_n s Hausdorffovou metrikou. Jsou-li A, B podmnožiny E_n, jejich vzdálenost v Hausdorffově metrice je definována předpisem

$$\delta(A, B) = \inf \{\delta > 0, A \subseteq \{x \in E_n, \inf \{|x - y|, y \in B\} < \delta\} \;\&\; B \subseteq \{x \in E_n, \inf \{|x - y|, y \in A\} < \delta\}\} .$$

Hutchinsonova definice však nevystihuje plně intuitivní pojem soběpodobnosti. Např. množina na obr. 5, kterou Mandelbrot nazval Apolloniova síť (angl. Apollonian gasket podle řeckého matematika Apollonia žijícího ve 2. století př. n. l., který nalezl konstrukci kružnice vepsané do sférického trojúhelníku vytvořeného třemi tečnými kružnicemi) není soběpodobná ve smyslu Hutchinsonovy definice, neboť trojúhelníky vzniklé v následujících krocích nejsou geometricky podobné trojúhelníkům z předchozího kroku. Hausdorffova dimenze této množiny není známa *).



Obr. 5. Apolloniova síť.

Soběpodobné obrazce se dají velice dobře generovat počítačem. Opakování téhož vzoru lze realizovat opakovaným voláním téhož podprogramu se stále se zmenšujícími parametry. Pokud do těchto algoritmů zavedeme náhodný prvek (např. v případě Cantorova diskontinua nebudeme úsečky dělit stále na třetiny, ale na každém kroku budeme náhodně volit dva body), dostaneme tzv. statisticky soběpodobné fraktály. Pomocí takových algoritmů můžeme velmi dobře simulovat mnohé přírodní tvary jako např. tvary rostlin, pohoří či pobřeží. Fraktální geometrii se tak podařilo vystihnout jiný druh krásy, než je dokonalá krása ideálních útvarů klasické geometrie. Krása statisticky soběpodobných fraktálů spočívá v křehké harmonii mezi pravidelností a nahodilostí. V této harmonii spočívá také krása přírody. V lese nepanuje chaos, přestože je každý strom jedinečný. Proto se nám les zdá krásnější než sídliště, vyznačující se umělou pravidelností, i než smetiště, které je úplně chaotické.

Jsou-li $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ kontrakce, je zobrazení $\varphi : \mathcal{K}(E_n) \to \mathcal{K}(E_n)$ definované předpisem

$$\varphi(X) = \bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i(X)$$

pro každou podmnožinu $X \subseteq E_n$, také kontrakce. Protože $\mathcal{K}(E_n)$ je úplný metrický prostor, můžeme užít větu o pevném bodu, z níž plyne existence právě jedné množiny $E \in \mathcal{K}(E_n)$ splňující

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i(E) .$$

*) Zřejmě $1 \leqq D \leqq 2$, ale již důkaz, že nerovnosti jsou ostré, je nečekaně obtížný. Nejlepší doposud získaný odhad je $1,300197 < D < 1,314534$.

Mnohé fraktály se však vyznačují jiným druhem krásy – je to krása složitých vzorů nekonečně členitých množin připomínajících nádherné ornamenty. Tyto fraktály patří do nejnovější oblasti fraktální geometrie, která se rozvinula teprve v 80. letech. V předchozím období studovala fraktální geometrie soběpodobné množiny a podařilo se jí matematicky uchopit a modelovat mnohé přírodní tvary pomocí statisticky soběpodobných fraktálů. Vrcholem tohoto období byly počítačem generované obrázky krajin s horami a jezery, planet s pevninami a ostrovy a jejich měsíců s krátery, působící tak přirozeně, že bychom je nedokázali rozlišit od fotografií.

Soběpodobné fraktály jsou invariantní vůči lineárním transformacím. V r. 1980 začal Mandelbrot hledat fraktály mezi množinami, které jsou invariantní vůči nelineárním transformacím. Již v oblasti iterací těch nejjednodušších nelineárních komplexních polynomů objevil nepřeberné množství krásných a zajímavých fraktálů. Tím došlo ke spojení fraktální geometrie, která se doposud zabývala morfologií některých přírodních tvarů, s teorií dynamických systémů, která se zabývá modelováním a zkoumáním morfologie množin možných stavů různých systémů měnících se v čase. Změnu takového systému vyjadřuje transformace na množině možných stavů daného systému. V případě tzv. diskrétního dynamického systému, kdy předpokládáme, že se systém mění v diskrétních časových intervalech, popisují iterace této transformace postupně nabývané stavy tohoto systému. Množiny, k nimž dynamický systém v nějaké oblasti konverguje, se nazývají atraktory. Ukázalo se, že mnohé atraktory i hranice oblastí přitažlivosti některých atraktorů jsou velice zajímavé fraktální množiny.

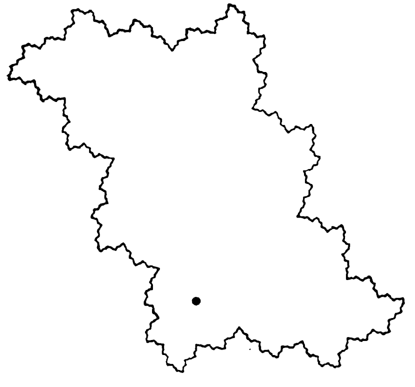
První fraktály tohoto druhu, které Mandelbrot zkoumal, byly tzv. Juliovy množiny. Gaston Julia a Pierre Fatou se v době kolem r. 1918 zabývali studiem iterací racionálních komplexních funkcí, tj. zobrazení

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} : \bar{C} \to \bar{C},$$

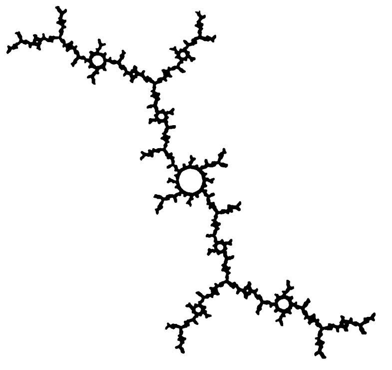
kde $P(z)$ a $Q(z)$ jsou polynomy bez společného dělitele a $\bar{C}$ je tzv. Riemannova sféra, což je $C \cup \{\infty\}$, kde C značí komplexní rovinu. Nejjednodušší nelineární racionální komplexní funkce je kvadratický polynom $f_c(z) = z^2 + c$, kde c je komplexní parametr. Juliova množina J_c této funkce je hranice množiny těch z, pro která je posloupnost $\{f_c(z), f_c f_c(z)) = f_c^2(z), \ldots\}$, vytvořená postupným iterováním této funkce, omezená. Počítačová grafika zpřístupnila neočekávaně bohatý svět tvarů Juliových množin.

S výjimkou $c = 0$ (J_0 je jednotková kružnice) a $c = -2$ (J_{-2} je reálný interval $\langle -2, 2 \rangle$) jsou Juliovy množiny soběpodobné fraktální množiny nejrůznějších tvarů. Pro některá c jsou to Jordanovy křivky (tj. jsou homeomorfní s kružnicí) (obr. 6), pro jiné hodnoty parametru c jsou to tzv. dendrity (obr. 7) (tak se nazývají ty Juliovy množiny, které jsou totožné s množinami těch z, pro která je výše uvedená posloupnost omezená) a pro mnohé hodnoty c se J_c rozpadnou na totálně nesouvislé množiny, kterým se říká Cantorovy, neboť jsou dvoudimenzionální obdobou Cantorova diskontinua (obr. 8).

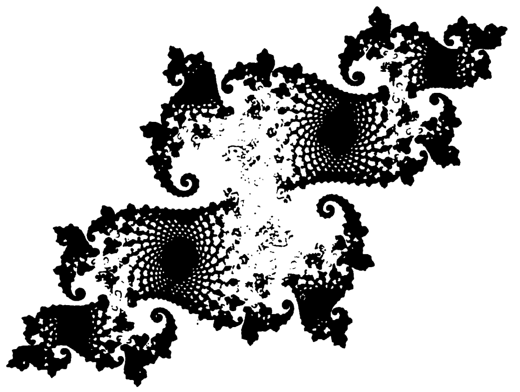
Klíčem ke klasifikaci chování funkcí $f_c(z) = z^2 + c$ v závislosti na parametru c je tzv. Mandelbrotova množina $M = \{c \in C, J_c \text{ je souvislá}\}$ (obr. 10). Je pojmenována po



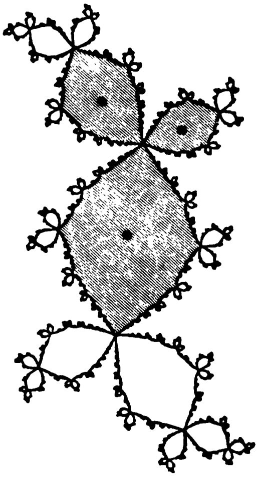
Obr. 6. Juliova množina (Jordanova křivka).



Obr. 7. Juliova množina (dendrit).

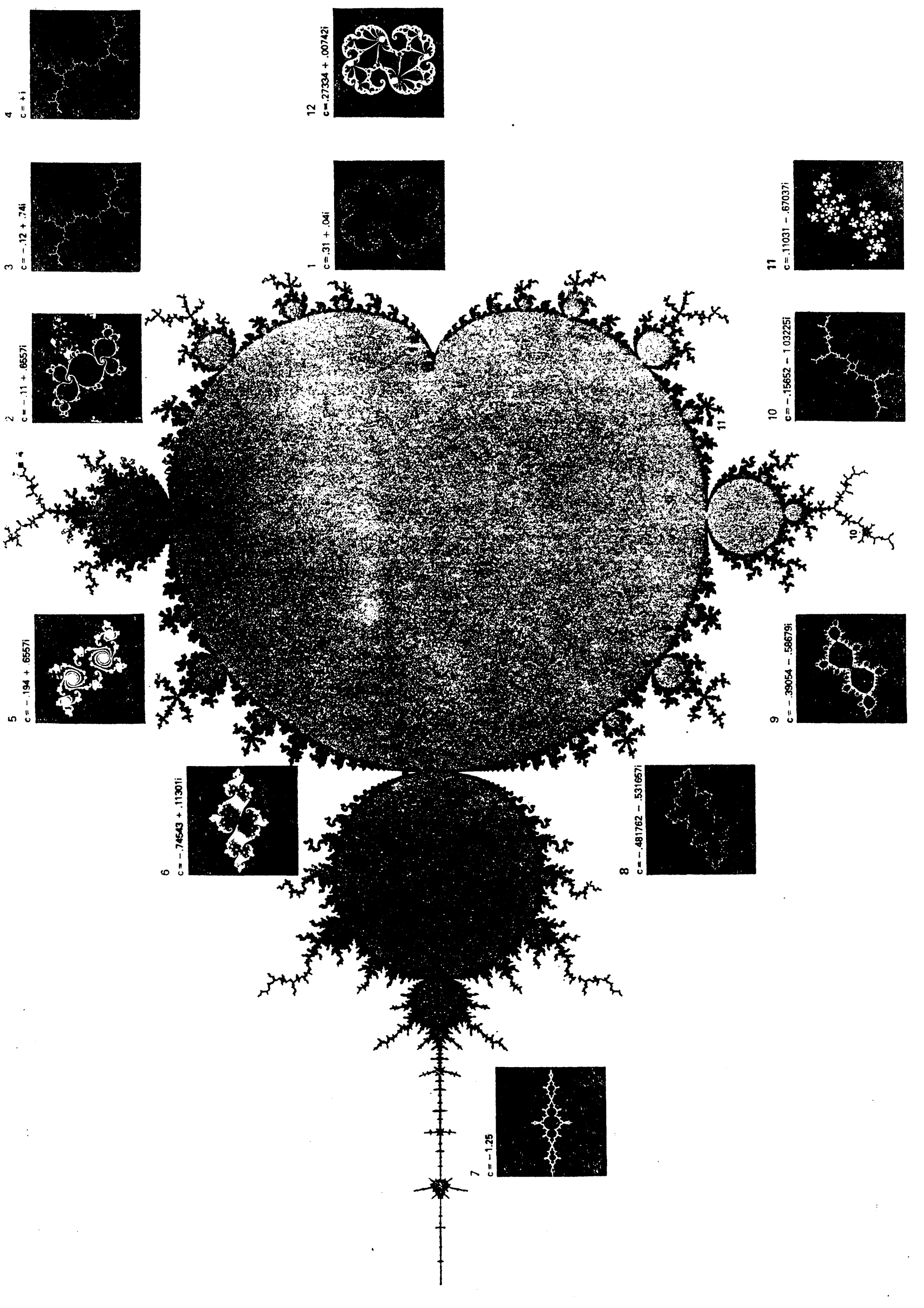


Obr. 8. Juliova množina (Cantorova množina).



Obr. 9. Juliova množina (trojcyklus).

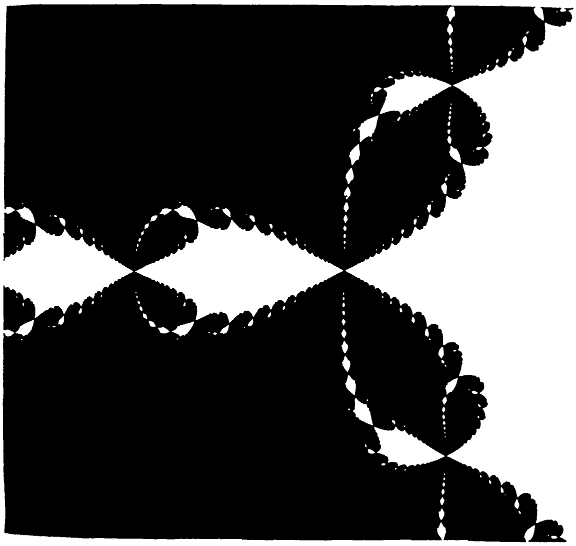
B. B. Mandelbrotovi, který ji jako první zobrazil pomocí počítačové grafiky. Je to fraktální množina, která obsahuje nekonečně mnoho libovolně malých kopií sama sebe. Poměr zmenšení těchto kopií se však mění v závislosti na místě, takže tato množina není soběpodobná ve smyslu Hutchinsonovy definice (není invariantní vůči žádné lineární transformaci). Mandelbrotovu množinu lze snadno generovat na počítači, neboť podle výsledku P. Fatou a G. Julia z r. 1919 je množina J_c souvislá, právě když je posloupnost $\{c,\ c^2 + c,\ (c^2 + c)^2 + c, \ldots\}$ omezená. Topologická dimenze Juliových množin J_c závisí na poloze parametru c vzhledem k Mandelbrotově množině M: Je-li c uvnitř M, má příslušná J_c topologickou dimenzi 2, je-li c na hranici M, má J_c topologickou dimenzi rovnou 1 a je-li c mimo M, má J_c topologickou dimenzi rovnou 0. Poloha c vzhledem k M také určuje, jakého typu jsou atraktory dynamického systému f_c. Dynamika f_c na všech Juliových množinách je chaotická, tj. je citlivá vůči počátečním podmínkám, což znamená, že existuje určitá konstanta taková, že v libovolně malém okolí každého bodu vždy existuje bod, který má tu vlastnost, že po dostatečném počtu iterací bude



Obr. 10. Mandelbrotova množina.

vzdálenost obrazů obou bodů větší nebo rovna této konstantě. Juliova množina J_c tvoří hranici mezi oblastí přitažlivosti bodu ∞ Riemannovy sféry a oblastmi přitažlivosti ostatních atraktorů dynamického systému $f_c(z) = z^2 + c$.*)

To, že pro obecnou komplexní racionální funkci mají všechny oblasti přitažlivosti společnou hranici a že na této hranici je dynamika chaotická, bylo známo již kolem r. 1918 G. Juliovi a P. Fatouovi. Pěkným příkladem takové funkce je $(2z^3 + 1)/3z^2$, pomocí níž lze tzv. Newtonovou iterační metodou najít kořeny rovnice $z^3 - 1 = 0$. Tento dynamický systém má tři jednobodové atraktory (kořeny rovnice $z^3 - 1 = 0$), V oblasti přitažlivosti každého z těchto tří atraktorů je Newtonova metoda účinná. neboť vyjdeme-li z libovolného bodu oblasti, dostaneme postupným iterováním funkce $(2z^3 + 1)/3z^2$ posloupnost konvergující k příslušnému kořenu rovnice. Tyto tři oblasti přitažlivosti mají společnou hranici, Juliovu množinu funkce $(2z^3 + 1)/3z^2$, na níž je Newtonova metoda neúčinná. Tato hranice je zajímavě členitá fraktální množina s chaotickou dynamikou (obr. 11).

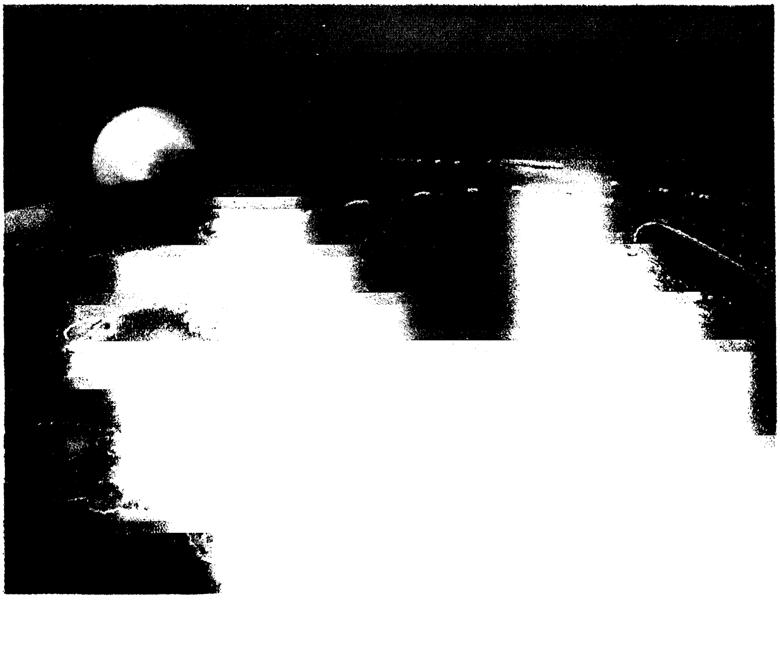


Obr. 11. Newtonova metoda řešení rovnice $z^3 - 1 = 0$.

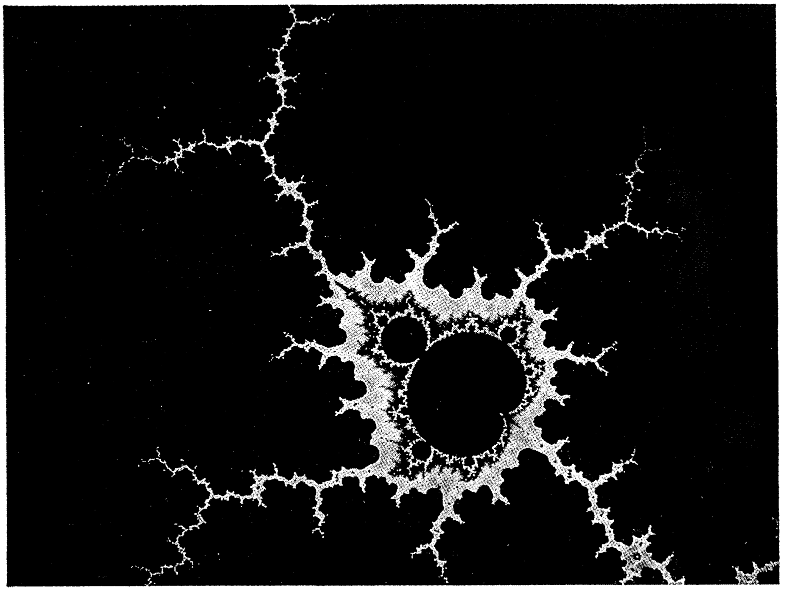
H. O. Peitgen a P. H. Richter z univerzity v Brémách zkoumali Mandelbrotovu množinu, Juliovy množiny různých funkcí a další dynamické systémy pomocí barevné počítačové grafiky. Podle rychlosti konvergence nebo divergence přiřadili oblastem roviny různé barvy. Barevné fotografie obrazovek jejich počítačů byly natolik krásné, že byly vystaveny v řadě západoevropských zemí. Kniha [7] vznikla rozšířením a přepracováním katalogu k této výstavě.

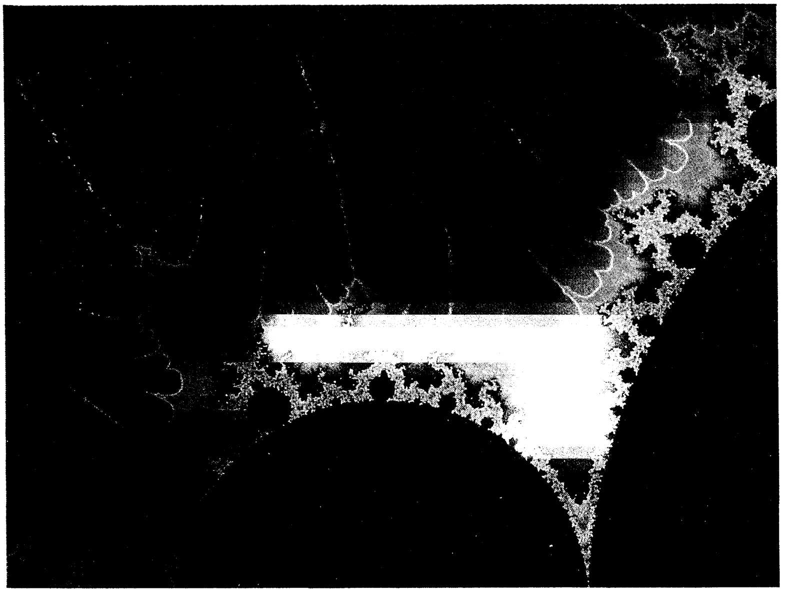
V posledních letech se začala rozvíjet experimentální matematika využívající možností, které poskytuje současná počítačová grafika, pro získávání intuice v oblastech příliš

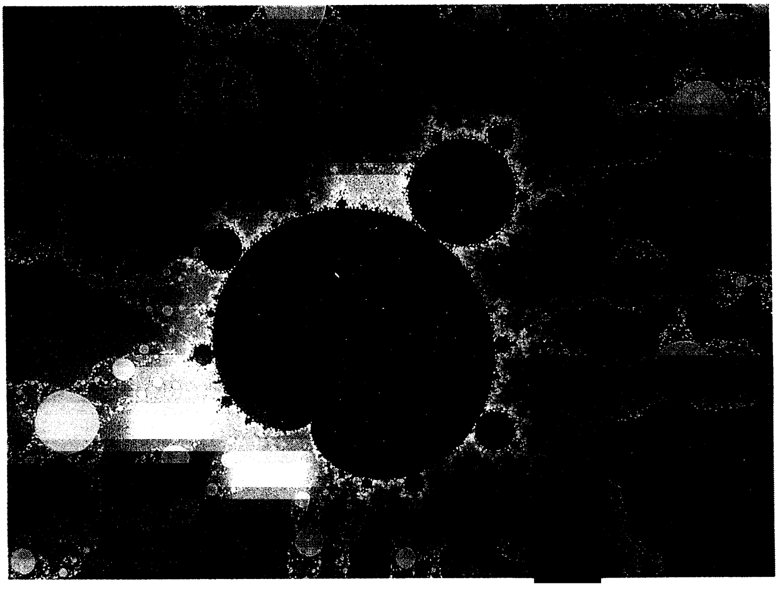
*) Mandelbrotova množina je vlastně projekcí bifurkačního diagramu dynamického systému $f_c(z) = z^2 + c$ (což je diagram znázorňující závislost atraktorů na parametru c). Pro komplexní funkci je tento diagram čtyřrozměrný.

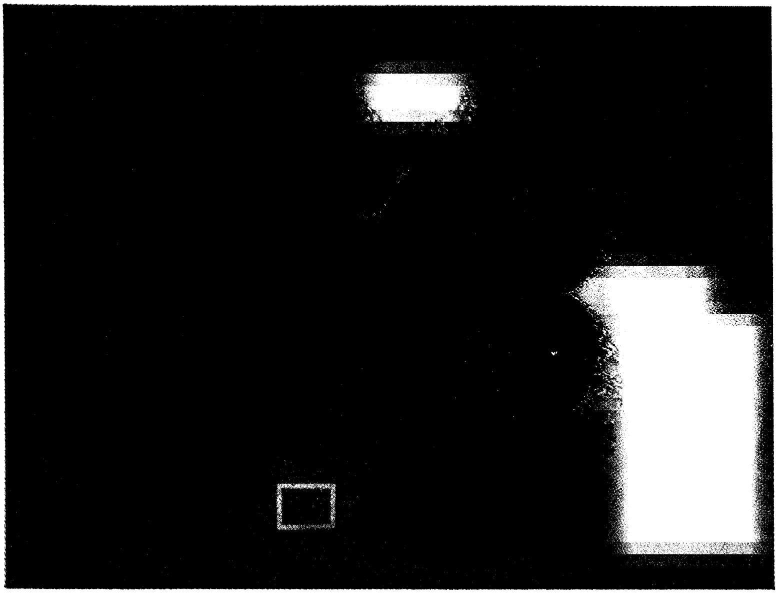


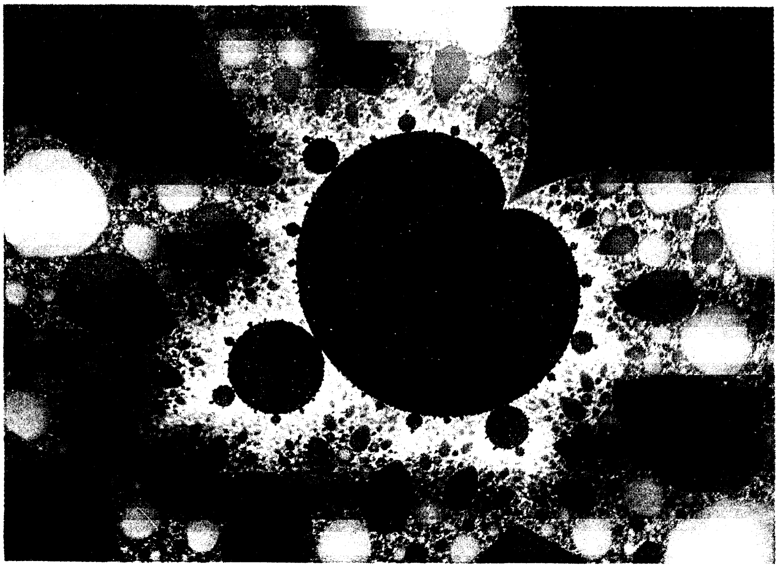
Průběhy různých komplexních dynamických systému znázorněné pomocí barevné počítačové grafiky nám ukazují, kde a jak rychle takový systém konverguje, a navíc nám poskytují estetický zážitek. Tyto obrázky byly vytvořeny v laboratoři počítačové grafiky na univerzitě v Brémách pod vedením H. O. Peitgena a P. H. Richtera. Barevné obrázky (a většina černobílých) jsou převzaty z knihy [7].

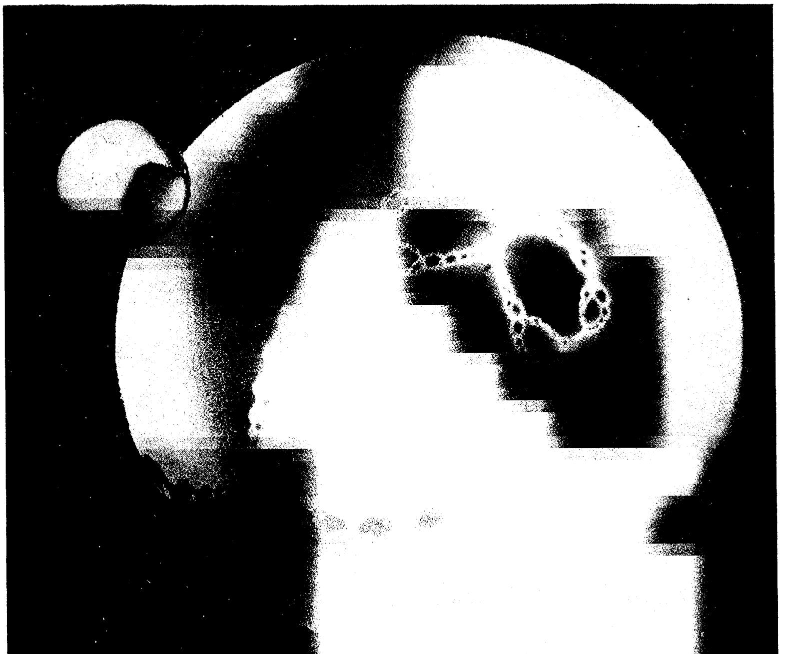




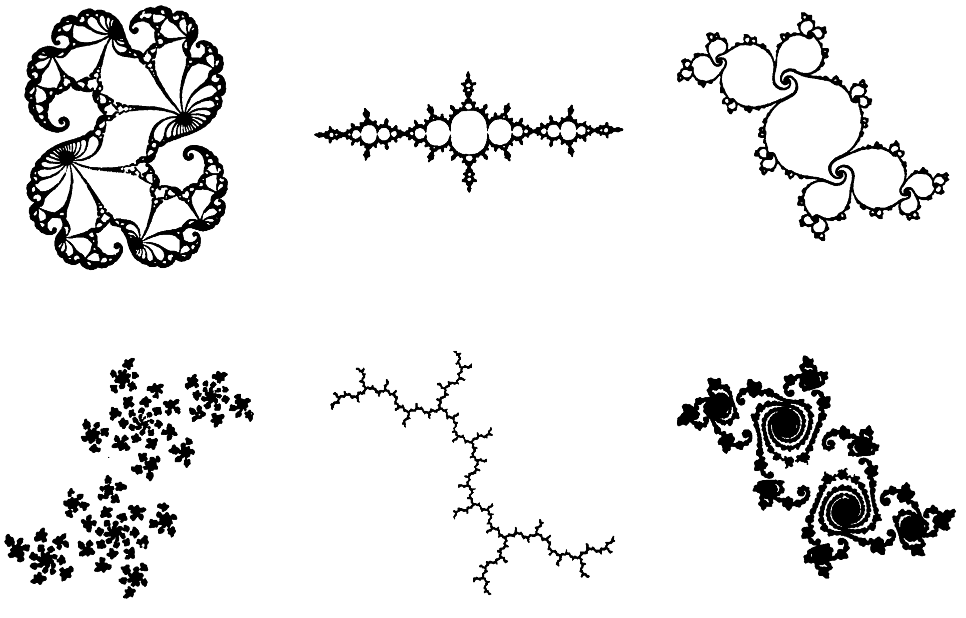








Obr. 12. Juliovy množiny J_c pro různé hodnoty c.



složitých pro lidskou představivost. Snad se tak podaří pomocí počítačů zvládnout některé z oblastí, které doposud svou složitostí vzdorovaly úsilí matematiků.

Literatura

[1] FALCONER K. J.: *The Geometry of Fractal Sets*. 1985, Cambridge University Press.

[2] HUTCHINSON J. E.: *Fractals and self-similarity*. 1981, Indiana University Mathematics Journal, *30*, 713—747.

[3] KŮRKOVÁ V.: *Mandelbrotova fraktální geometrie*. 1988, Vesmír *8*, 458—464.

[4] MANDELBROT B. B.: *Les objects fractals: forme, hasard et dimension*. 1975, Flammarion, Paris.

[5] MANDELBROT B. B.: *The Fractal Geometry of Nature*. 1982, W. H. Freeman & Co., San Francisco.

[6] MANDELBROT B. B.: *Comment j'ai découvert les fractals*. La recherche, 1985, *175* (III), 16—20.

[7] PEITGEN H. O., RICHTER P. H.: *The Beauty of Fractals*. 1986, Springer, Berlin.

[8] PEITGEN H. O., SAUPE D.: *The Science of Fractal Images*. 1988, Springer, Berlin.

Klaniam sa vám a túžim po vás, čísla!
Slobodné, nehmotné ste — sestry tieňa.
Ste dúhou, ktorá preklenuje v mysliach
vrcholy tvorivého zanietenia.

V. Briusov

Rozdiel medzi typom myslenia vedca exaktných vied a obrazným myslením umelca vôbec nie je taký veľký, ako si to niekedy ľudia predstavujú.

P. Kapica