Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Miroslav Katětov

Matematické metody v psychologii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 4, 187--199

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138498

matiků a fyziků. Byl jejím prvním místopředsedou právě v době oslav stého výročí jejího založení a byl za svou záslužnou práci při této příležitosti vyznamenán Řádem práce. Má velké zásluhy o knihovnu Jednoty i o fakultní matematickou knihovnu. Vždy kladl velký důraz na sledování vědecké literatury. V letech 1953—1955 plnil náročnou funkci děkana. Jako vysokoškolský učitel byl v roce 1960 vyznamenán stříbrnou medailí University Karlovy za „mimořádné zásluhy o rozvoj University Karlovy" a v roce 1968 „Pamětní medailí University Karlovy".

Laskavý čtenář nechť promine autorovi těchto řádků, že není možné vystihnout šíři Kořínkovy činnosti, zejména v poválečných letech, aniž by nebylo opomenuto mnoho důležitého. Krátkým zamyšlením nad jeho životním dílem jsme chtěli toliko připomenout dobu, ve které vznikala moderní československá matematika. Současně však měly být naše řádky i povzbuzením všem, kteří touží po vědecké dráze a k dosažení svého cíle jsou připraveni obětovat mnoho osobního pohodlí.

Přejeme jubilantovi, jehož krásné lidské vlastnosti máme neustále na paměti, mnoho pevného zdraví do dalších let.

Matematické metody v psychologii

Miroslav Katětov, Praha

Tento článek vznikl z přednášky na schůzi vědeckého kolegia matematiky ČSAV v březnu 1973. Při přípravě přednášky a článku bylo použito podnětů a připomínek několika kolegů — matematiků i psychologů — z různých pracovišť; odpovědnost za text má ovšem jedině autor.

Použití matematických metod v psychologii je v zásadních rysech obdobné jejich použití v jiných vědách. Ve srovnání např. s aplikacemi ve fyzice a technických vědách jsou však zde také důležité rozdíly a nezvyklé rysy, které namnoze vyplývají ze specifičnosti psychologické vědy. Věnujeme proto úvodní část obecným otázkám; pak přejdeme k jednotlivým aplikacím.

Čtenáře, který by se chtěl poněkud blíže seznámit s charakterem a obsahem současné psychologie, odkazujeme např. na úvodní knížky [1], [2], v nichž najde další literaturu. Z literatury o aplikacích matematiky v psychologii lze uvést stručnou úvodní knížku [3], knihu [4], jež má charakter vysokoškolské učebnice, a rozsáhlou třísvazkovou monografickou příručku [5].

Úvod

Psychologie zkoumá duševní život a chování (v širokém slova smyslu) lidí; to ovšem nemíníme jako definici, ale jako hrubé výchozí vymezení. Je velmi členitou oblastí.

Zahrnuje obecnou část včetně obecné experimentální psychologie i řadu speciálních oborů, např. klinickou psychologii, inženýrskou psychologii atd. Úzce souvisí s četnými obory. Zásadní význam má souvislost s teorií nervové činnosti (s neurofyziologií), i když názory na charakter této souvislosti se liší. Z hlediska matematického modelování je velmi důležitá souvislost s otázkami tzv. umělého intelektu. Směrem k aplikacím souvisí psychologie, jak známo, teoreticky i prakticky s lékařstvím, s technickými vědami, se sociologií, s pedagogikou atd.

Po dlouhou dobu se psychologie převážně skládala jednak ze shrnutí zkušeností denního života, jednak ze spekulativních úvah, leckdy správných, avšak neověřených soustavnými experimenty. Skutečným vědním oborem se začala stávat zhruba před sto lety — do značné míry souběžně s rozvojem experimentální metodiky.

Specifické rysy psychologie, které způsobují některé odlišnosti aplikací matematiky, vyplývají jednak z jejího předmětu a přístupu, jednak z toho, že jako věda vznikla poměrně pozdě. Obdobné rysy se ovšem najdou i v jiných vědních oborech, většinou však v podstatně menší míře.

Ve fyzice, chemii atd. lze často činit závěry o celku z údajů o složkách nebo z „lokálních" dat (v čase nebo prostoru). V psychologii mnohem častěji záleží na vzájemném působení mnoha složek, na celém předchozím průběhu apod.

Tzv. exaktní vědy se zaměřují především na hledání dosti obecných zákonitostí, které se pak aplikují. Psychologie to činí také; byly zjištěny a leckdy dosti exaktně vyjádřeny četné zákonitosti, týkající se např. vnímání, paměti, struktury inteligence. Zaměřuje se však také a vlastně více na zkoumání jisté unikátní struktury, totiž obecné struktury lidské psychiky, jakož i na zkoumání struktury psychiky u jednotlivců. Přitom zkoumá také způsoby jejího rozboru a popisu; pod to spadá jako speciální případ např. teorie psychologických testů.

V psychologii má velkou úlohu vzájemné působení experimentátora a pokusné osoby, popř. psychologa a osoby, které předkládá testy, apod. Něco poněkud podobného je ve fyzice (vztah pozorovatele a mikroobjektu). Toto vzájemné působení se dosti často dá do značné míry eliminovat, někdy se však dá kontrolovat jen těžko, někdy je ani nelze předem odhadnout. Je to jedna z okolností, pro kterou mnohem častěji než třeba ve fyzice zdánlivě stejné experimenty dávají různé výsledky.

Principiálně důležitým rysem (jenž se však neodráží ve způsobu použití matematických metod) je introspekce (sebepozorování), která stále má v psychologii význam. Akceptuje se ovšem vlastně jen pokud vede k objektivně ověřitelným výsledkům.

Pro současný stav psychologie jsou charakteristické ještě další rysy, které značně ovlivňují také použití matematiky. Základní pojmy psychologie nejsou ještě zdaleka ustáleny v té míře, jak se ustálily třeba běžné fyzikální pojmy. V psychologii zatím neexistují žádné teorie, jež by vystihovaly širší oblast psychických jevů a dějů způsobem, který by se aspoň poněkud přibližoval po pojmové stránce (nemluvě vůbec o matematickém vyjádření) tomu, jak třeba Maxwellova teorie vystihuje širokou třídu elektromagnetických jevů; existuje vlastně jen řada dílčích teorií.

Již na počátku vývoje psychologie jako vědy se v ní uplatňovaly metody matematické statistiky týkající se zpracování dat včetně výpočtu čísel charakterizujících náhodné veličiny a jejich vzájemnou závislost (korelační koeficienty atd.). Použití těchto metod je velmi důležité, týká se skoro všech oborů psychologie, má však podobnou povahu jako v mnoha jiných oborech (biologii apod.); nebudeme proto o něm zde mluvit.

Jinak však z příčin, které jsme uvedli, je k matematickému vyjádření různých psychologických teorií často třeba velmi rozmanitých matematických prostředků, a také jejich matematická hloubka a dosah se velmi liší.

V psychologii se mnohem častěji než ve většině jiných oborů vyskytují situace, kdy matematické vyjádření neboli, přesněji řečeno, vhodný matematický model určitého druhu jevů není znám. Model se musí teprve hledat, potom se zkoumají jeho matematické vlastnosti a zjišťuje se, do jaké míry vystihuje skutečnost. Obtížnost aplikací matematiky v psychologii není většinou ve složitosti aparátu, nýbrž právě ve vyhledávání modelů a ověřování, popř. vyvracení jejich vhodnosti. Přitom někdy jde spíše o modelování některých aspektů samotných psychologických dějů, někdy spíše (nebo jedině) o modelování výsledků těchto dějů (takové výsledky patří často spíše do oblasti tzv. umělého intelektu).

Tak např. pro počítače se sestavují programy, podle kterých hrají šachy zhruba na úrovni šachisty nižší výkonnostní třídy. Zde není cílem modelovat uvažování šachisty, nýbrž modelovat výsledky, tedy prováděné tahy; při sestavování programu se ovšem podle potřeby používá některých poznatků o tom, jakým postupem se člověk rozhoduje, který tah učiní. Podstatně jiná by byla situace, kdybychom chtěli modelovat – aspoň po některých důležitých stránkách – reálný průběh lidského myšlení při šachové hře.

K obecné problematice patří ještě dvě otázky: zda pro úspěšné aplikace nejsou nutné jakési matematické disciplíny zcela nového druhu, které by se měly teprve vytvořit, a zda psychologie již svou podstatou nevylučuje hlubší aplikace matematiky. Na první otázku lze odpovědět subjektivní domněnkou: nynější matematika se může v psychologii uplatnit daleko více než dosud; dá se však očekávat, že pro některé aplikace budou nutné zcela nové matematické metody a nový přístup. Ke druhé otázce lze říci dosti objektivně tolik, že o tom nelze rozhodnout pouhým uvažováním; je třeba jít s aplikacemi co nejdále a nejhlouběji, a pak se případně projeví jejich meze.

V souvislosti s první otázkou je třeba ještě poznamenat, že matematické modelování psychologických teorií vede nezřídka k novým pohledům na některé matematické obory; konkrétní příklad uvedeme později. Tyto nové pohledy a z nich vznikající nové matematické výsledky někdy mají přímý vztah k aplikacím, jindy s nimi souvisí jen myšlenkově, mohou však vytvářet širší konceptuální bázi pro pozdější aplikace.

Aplikace matematiky v psychologii by se daly roztřídit podle používaných matematických disciplín nebo podle charakteru použití matematiky, např. podle toho, zda matematika slouží pouze jako jistý jazyk nebo hlavně jako nástroj kvantitativního vyjadřování vlastností nebo jako prostředek pro vyjadřování jistých zákonitostí atd. Zde však od toho upustíme a probereme stručně několik jednotlivých důležitých oblastí aplikací; o některých dalších se jen zmíníme.

Faktorová analýza

Mezi rozsáhlejšími ucelenými oblastmi hlubších aplikací matematiky v psychologii je faktorová analýza asi nejstarší; základní monografie vznikly již ve dvacátých, resp.

třicátých letech (viz např. [6]). Tato oblast se často ani nezařazuje do tzv. matematické psychologie – asi hlavně proto, že v jistém smyslu zde nejde o matematický model, ale jen o matematický popis. Je-li však řeč o aplikacích matematiky v psychologii, sotva lze faktorovou analýzu pominout.

Z matematického hlediska jde vlastně o přibližné vyjádření dané n-dimenzionální náhodné veličiny jako funkce náhodné veličiny menší dimenze, přičemž se kladou různé omezující podmínky. Obvykle se požaduje linearita a jde o úlohu: k dané n-dimenzionální náhodné veličině y najít náhodnout veličinu x co nejmenší dimenze a lineární transformaci A tak, aby veličina $y - Ax$ byla v jistém smyslu malá. Exaktní rozbor této úlohy se provádí nejjednodušeji, když y a x mají aspoň přibližně normální (Gaussovo) rozložení; v praxi se tento předpoklad často činí mlčky. Mezi základní aplikace této metody patří strukturální analýza inteligenčních testů. Máme n testů určených k měření vlastností inteligence; máme $y = (y_1, \ldots, y_n)$, kde y_i je výsledek (skóre) v i-tém testu. Předpokládáme, že výsledky jsou – až na nekontrolované náhodné odchylky – určovány jakýmisi základními inteligenčními faktory $x_1, \ldots, x_m$; tento předpoklad podstatně specifikujeme a předpokládáme, že faktické výsledky (testová skóre) jsou lineárními kombinacemi veličin x_j (až na malé náhodné odchylky). Máme pak $y_i = \Sigma a_{ij} x_j + z_i$, kde a_{ij} jsou čísla, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, přičemž m neznáme. Po matematické stránce jde pak nejprve o nalezení nejmenšího m takového, že tyto rovnice lze splnit s „malými" veličinami z_i. Jak je patrné, náhodný vektor $(x_1, \ldots, x_m)$ není pak určen jednoznačně, nýbrž může být „rotován" apod. Nalezení jednoho z náhodných vektorů x splňujících rovnice je v zásadě rutinní záležitostí; můžeme jej dostat standardní procedurou na základě vzájemných korelací veličin y_i. Nalezení vektoru $(x_1, \ldots, x_m)$, který by splňoval rovnice a měl adekvátní psychologickou interpretaci, bývá poměrně složitým problémem, při jehož řešení je potřebné organické spojení věcných a matematických úvah (nutnost takového organického spojení je při aplikacích v psychologii asi ještě výraznější než při jiných aplikacích matematiky).

Faktorová analýza měla a má podstatnou úlohu mj. při objasňování struktury inteligence a struktury charakterových vlastností. Nalezené faktory se sice u různých autorů shodují jen zčásti, přesto však dosažené výsledky znamenají určitý pokrok a jsou důležitou ukázkou možností matematických metod.

Rozlišování podnětů a teorie informace

Elementární pojmy teorie informace se ukázaly užitečnými pro popis některých jednoduchých situací, v nichž jde o rozpoznávání podnětů, a umožnily zjištění jistých dílčích zákonitostí. Jde o situaci, kdy se může vyskytnout kterýkoli podnět z jisté množiny X senzorických podnětů. Osoba může reagovat různým způsobem; množinu možných reakcí označíme Y. Úkolem je správně rozpoznat podnět, např. říci jeho název, stisknout předepsané tlačítko apod.; každému podnětu x je tedy přiřazena „správná" odpověď $f(x)$. V reálné situaci nejsou však odpovědi vždy správné: pro každé $x \in X$, $y \in Y$ máme určitou pravděpodobnost $p(x, y)$ toho, že podnět x vyvolá odpověď y. Matice čísel $p(x, y)$ („confusion matrix") udává tzv. stochastické zobrazení množiny X do Y. Mezi elementární pojmy teorie informace patří pojem přenášené informace při daném stochastickém zobrazení a při určitém pravděpodobnostním rozdělení na X (pro ilustraci: je-li f prosté zobrazení v obvyklém smyslu, má-li X n prvků a je-li rozdělení stejnoměrné, pak přenášená informace se rovná $\log n$; závisí-li $p(x, y)$ jen na y, pak přenášená informace je nulová).

Na základě dosti rozsáhlého empirického materiálu byly zjištěny (viz např. [7]) tyto zákonitosti. Vezmeme v úvahu tuto situaci: smyslové podněty určitého druhu se mění pouze v jedné „dimenzi" (např. u tónů se mění pouze výška nebo pouze intenzita pod.); připouštíme n hodnot (obvykle zhruba ekvidistantních) příslušné veličiny (tyto hodnoty pak tvoří množinu X); každá z nich má určitou pravděpodobnost výskytu; každé hodnotě je přiřazeno určité číslo, popř. je jiným způsobem dána „správná" reakce na tuto hodnotu. Touto situací je dáno určité stochastické zobrazení množiny X do jisté množiny Y, a je tedy známo číslo vyjadřující přenášenou informaci. Za dosti obecných předpokladů se pak ukazuje toto: Až do jistého malého n „identifikace", tj. realizace předepsaného přiřazení, probíhá bez chyb, takže přenášená informace činí $\log n$ (při stejných pravděpodobnostech výskytu všech $x \in X$). Od jistého n se objevují chyby; přenášená informace sice vzrůstá, ale brzy se zhruba ustálí na určité hodnotě. Tato hodnota zpravidla závisí jen na „dimenzi", v níž se mění podnět, závisí však jen málo např. na celkovém rozpětí hodnot apod. Kolísá přitom pro různé „dimenze" a různé druhy podnětů v mezích $\log(7 \pm 2)$; to lze nepřesně vyslovit takto: u podnětů zmíněného typu můžeme bezpečně poznat 5 až 9 hodnot (podle druhu podnětu). Obdobné, byť složitější a volnější zákonitosti platí též pro podněty, které se mění v několika „dimenzích". Podotýkáme, že jsou některé výjimky ze zmíněných zákonitostí; problémy jsou např. s absolutním hudebním sluchem.

Zmíněná zákonitost je sice dosti speciální, je však zajímavá též z obecného hlediska. Je totiž příkladem jistého „zákona invariance": maximální přenášená informace je za daných podmínek invariantní.

Je třeba poznamenat, že přes mnohá původní očekávání přinesla teorie informace pro psychologii až na tuto pozoruhodnou zákonitost a obdobné poznatky poměrně málo. To je možná v podstatě věcí: informace se v psychice zpracovávají příliš složitým a proměnlivým způsobem.

Obecný přístup k psychickým dějům z hlediska zpracovávání informací má ovšem trvalou platnost a je významným přínosem pro rozvoj psychologie. Jak se přitom uplatní matematické metody, závisí též na jejich vývoji, mj. na zkoumání modifikací klasického pojmu informace.

Rozpoznávání obrazů (pattern recognition)

Tato široká oblast vlastně skoro pokrývá psychologii vnímání a značně oblasti psychologie myšlení a učení. Psychologie se v ní úzce stýká též s problematikou imitace intelektu.

Základní reálná situace rozpoznávání obrazů je — velmi zhruba řečeno — tato: člověk (nebo vůbec organismus nebo technické zařízení apod.) třídí jakýmsi způsobem obrazce (útvary), které se mu předkládají, popř. rozpoznává v těchto útvarech jistý tvar, schéma, strukturu apod.

Třídění (rozpoznávání), které provádí člověk, jiný organismus, stroj, soustava „člověk-stroj" atd., se ovšem navzájem velmi liší; je zde však také mnoho společného. Budeme proto v dalším mluvit prostě o rozpoznávající soustavě (biologické nebo technické).

Útvary*), resp. obrazce zde chápeme v nejširším smyslu; útvar je např. rovinný obrazec v běžném smyslu; melodie; složitá vůně; formule v nějakém logickém kalkulu; rukopisný text; pasáž z literárního díla (přičemž abstrahujeme od toho, zda je předložena v tištěném, psaném nebo mluveném tvaru). S úlohou rozpoznávání obrazů v širším smyslu jsme se vlastně již setkali, když jsme mluvili o rozpoznávání podnětů měnících se v jedné nebo několika „dimenzích". Obvykle se však pod rozpoznávání obrazů zahrnují jen situace, v nichž se dá mluvit o jisté struktuře útvarů.

V širším smyslu lze vůbec pojímat celé vnímání do značné míry jako rozpoznávání obrazů: na nižší neurofyziologické úrovni se třeba rozpoznává bodová osvětlenost, popř. hranice osvětlenosti, na další úrovni se rozpoznávají některé jednoduché tvary atd.; nakonec se rozpoznává třeba, že jde o rukopis té a té osoby.

Reálné situace rozpoznávání obrazů mohou být velmi rozmanité.

Za prvé třídění útvarů, resp. přiřazení obrazů může být předem dáno a sděleno rozpoznávající soustavě, např. udáním příslušného pravidla; můžeme říci, že je dáno zobrazení f množiny útvarů X do jisté množiny Y. To však nemusí stačit k přesnému rozpoznávání. Soustava se mu obvykle musí učit a dospěje nakonec k rozpoznávání, které lze vyjádřit stochastickým zobrazením určeným jistou maticí čísel $p(x, y)$; v ideálním případě je $p(x, f(x)) = 1$.

Za druhé třídění může být dáno předem; rozpoznávající soustava je však nezná, popř. zná jen částečně, ale „dovídá" se, zda ten který předložený útvar klasifikovala správně nebo ne, příp. jakou chybu učinila apod., anebo dostává jistou odměnu nebo trest, což závisí na její odpovědi, Zde rovněž jde o učení; po věcné stránce se však dosti liší od učení v předcházejícím případě.

Za třetí je možné, že soustava ani nezná správnou klasifikaci, ani se nedovídá, zda správně klasifikuje; má sama najít vhodné třídění. Zde již jde spíše o to, čemu se někdy říká vytváření konceptů (concept formation).

Z prakticky významných úloh, které patří do oblasti rozpoznávání obrazů a jejichž strojová relizace je předmětem výzkumu, náleží do druhé z uvedených skupin automatické rozpoznávání písmen (rukopisných) a vůbec automatické čtení textů, jakož i automatická analýza a zápis mluvené řeči (pokud soustava „neví", o který jazyk jde, mohlo by jít o úlohu náležející do třetí skupiny). Do třetí skupiny by patřily např. všechny otázky automatického roztřídění nedostatečně známých souborů (může jít např. o vzorky půdy a hornin z místa, kde se průzkum provádí poprvé).

---

*) Terminologie není dosti ustálena. Zde budeme používat převážně těchto názvů: reálný objekt předložený rozpoznávající soustavě je „útvar", popř. „obrazec" (má-li geometrický nebo podobný charakter). Jsou-li útvary roztříděny tím způsobem, že každému útvaru je přiřazen objekt, jenž vyjadřuje v jakémsi smyslu „podstatné rysy" útvaru, mluvíme o těchto přiřazených objektech jako o „obrazech", „obrazech útvarů", popř. „tvarech obrazců" apod. V tomto smyslu mluvíme o rozpoznávání obrazů (někdy však také poněkud nedůsledně o rozpoznávání útvarů apod.).

Matematické metody v oblasti rozpoznávání obrazů jsou značně rozmanité a patří do různých oborů matematiky. Různé druhy úloh vyžadují často velmi rozdílný postup; oblast je do té míry v rozvoji, že metody se ještě zdaleka nevyjasnily a různí autoři přistupují ke stejným úlohám zcela různě.

Všimněme si zde jako ukázky jen jednoho důležitého prostředku, totiž tzv. prahově lineárních zobrazení.

Jsou to taková zobrazení $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, že $f_i(x) = 1$, jestliže $\Sigma \alpha_{ij} x_j > \vartheta_i$, kdežto $f_i(x) = 0$, jestliže $\Sigma \alpha_{ij} x_j \leqq \vartheta_i$; přitom α_{ij}, ϑ_i (kde $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$) jsou daná reálná čísla (ϑ_i jsou tzv. prahy).

Jsou-li např. předkládány rovinné obrazce vesměs obsažené v jistém čtverci, pak rozdělíme tento čtverec na $n = p^2$ stejných malých čtverečků $C_1, \ldots, C_n$, a každému rovinnému obrazci X přiřadíme soubor $u = (u_1, \ldots, u_n)$, kde $u_i = 1$, když X protíná C_i, kdežto jinak je $u_i = 0$; položíme $u = g(X)$. Množina M všech rovinných obrazců přicházejících v úvahu je tedy zobrazena do množiny 2^n (symbol 2 zde jako obvykle značí množinu o dvou prvcích 0, 1). Předpokládejme, že je dáno rozdělení obrazců do dvou tříd, takže M je disjunktním sjednocením dvou množin A, B, a že $g(A)$, $g(B)$ jsou disjunktní (tj. rozdělení na p^2 čtverečků je „dostatečně jemné“). Podaří-li se najít prahově lineární zobrazení (funkci) $f: 2^n \to 2$, které nabývá hodnoty 1 na $g(A)$, hodnoty 0 na $g(B)$, pak danou úlohu rozpoznávání lze pokládat za vyřešenou. Není-li tomu tak, lze vzít jistý počet prahově lineárních funkcí $f_1, \ldots, f_r$, zobrazení $f: 2^n \to 2^r$, kde $f = (f_1, \ldots, f_r)$, a zkoumat, zda množiny $f(g(A))$, $f(g(B))$ lze oddělit pomocí prahově lineární funkce. Takto lze postupovat dále; má-li tento postup mít reálný význam, nesmí ovšem být počet funkcí $f_1, \ldots, f_r, \ldots$ příliš velký – jinak by totiž mj. technická relizace byla neúměrně náročná.

Prahově lineární zobrazení velmi úzce souvisí s pojmem perceptronu ([8], [9]), který svým původem patří do matematických metod teorie neuronových sítí. Perceptron o m vrstvách je – zhruba řečeno – soustava, např. neuronová síť (ať již skutečná nebo abstraktní síť anebo technická imitace skutečné sítě), která uskutečňuje zobrazení složené z m prahově lineárních zobrazení; koeficienty α_{ij}, ϑ_i mohou v obecném případě být náhodnými proměnnými atd.

Oblast „pattern recognition“ se nyní, jak se zdá, začíná formovat ve zvláštní disciplínu, zčásti matematickou, zčásti zasahující do psychologie, do neurofyziologie, do imitace intelektu atd. Vedle matematické problematiky se zaměřuje jednak na modelování reálných procesů rozpoznávání, jednak na vytváření technicky realizovatelných rozpoznávacích postupů.

Tyto úkoly ovšem spolu souvisí; porovnávání rozpoznávacích postupů v biologických a technických soustavách může podstatně osvětlit některé zásadní otázky.

Modely učení

Pojem učení je velmi široký; matematické modelování se zatím převážně týká jen velmi jednoduchých druhů učení. Používané metody modelování pomocí stochastických procesů osvětlíme na velmi jednoduchém příkladě, který by bylo možno zařadit též do teorie paměti. Abychom navázali na výklad o rozpoznávání podnětů, koncipujeme jej poněkud jinak, než je běžné.

Dejme tomu, že člověk (popř. jiný organismus nebo technická soustava) se má naučit reagovat předepsaným způsobem na podněty patřící do určité konečné množiny X; možné reakce patří do určité konečné množiny Y. Máme pak jisté zobrazení $f : X \to Y$. V praktických pokusech bývají dosti často podněty i reakcemi tzv. bezesmyslné slabiky; tak třeba podnětu KEM je přiřazena reakce ZEG, podnětu RUG reakce BIM atd. Pokusné osobě se předloží zobrazení f (např. se promítnou dvojice KEM-ZEG, RUG-BIM atd.). Některé dvojice si možná hned pevně zapamatuje, u některých si nebude docela jistá, některé si nezapamatuje vůbec; může se také stát, že si omylem „zapamatuje" něco nesprávného. Lze říci, že situace po předložení zobrazení je charakterizována maticí („confusion matrix") jistých čísel (pravděpodobností) $p_1(x, y)$; v případě úplného naučení (zapamatování) po prvním předložení máme $p_1(x, f(x)) = 1$. Která z možných matic vznikne, závisí na vlastnostech osoby atd., ale také na náhodě; je totiž do značné míry náhodné, zda např. si osoba zapamatuje zrovna KEM-ZEG nebo RUG-BIM atd.

Zobrazení f se pak předloží podruhé; situaci, pokud jde o to, kterým reakcím a do jaké míry se osoba naučí po tomto předložení, lze zase charakterizovat jistou maticí čísel $p_2(x, y)$. Která matice vznikne, závisí – vedle vlastností osoby – na předchozí situaci, tedy na matici čísel $p_1(x, y)$, a na náhodě. Takto se pokračuje dále. Dostáváme náhodný neboli stochastický proces; jeho stavy jsou matice $(p_n(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y)$ charakterizující stav naučení; máme určité rozdělení pravděpodobnosti přechodu od jedné matice k jiné. Za běžných situací se přitom matice $(p_n(x, y))$ s rostoucím n blíží – ve smyslu, který se specifikuje v teorii stochastických procesů – k matici, u níž je $p(x, f(x)) = 1$.

Máme zatím ovšem jen obecný model; přitom přímé zjišťování matic $(p_n(x, y))$ by bylo dosti obtížné. Pro ověření modelu je třeba jej specifikovat zejména na základě věcných úvah, teorií a hypotéz; z toho vyplynou jisté podmínky na matice $p(x, y)$ a na pravděpodobnosti přechodu od n-té matice k další matici. Pak se z modelu odvodí ověřitelné závěry (např. „po 20 krocích jsou s pravděpodobností $> 0{,}99$ všechna čísla $p(x, f(x))$ větší než 0,9") a tyto závěry se porovnají se statistickými údaji získanými z experimentu.

Omezíme se na tento schematický příklad, neboť na další výklad zde nemáme místo. Celkově lze říci, že stochastické modely vystihují poměrně dobře reálné děje u některých druhů jednoduchého učení. Jejich teorie se úspěšně rozvíjí (viz např. [10]) a je podstatnou částí aplikací matematiky v psychologii. Zasloužila by si možná samostatný článek.

Některé další aplikace

Zmíníme se nyní zcela stručně o některých dalších, byť zdaleka ne všech, matematických disciplínách nebo přístupech, které mají jistou úlohu při aplikacích matematiky v psychologii.

Dosti důležitá je *teorie automatů*, mj. proto, že automaty se hodí pro vyjádření některých typů chování v relativně jednoduchých situacích, zejména když použijeme stochastických automatů apod. Teorie automatů se používá i rozmanitým jiným způsobem. Pro zajímavost uveďme, že se řetězců generovaných pomocí automatu používalo v experimentálních pracích o rozpoznávání útvarů (řetězců písmen).

Značný význam má *teorie her* (v matematickém smyslu). Na první pohled lze očekávat, že by měla být velmi užitečná při modelování vztahů jednotlivců. Zatím se však toto očekávání splnilo jen zčásti, možná proto, že teorie her mnoha osob (s různými možnostmi tvoření koalicí) není ještě dosti propracována. Některých výsledků týkajících se např. vývoje vztahu (spolupráce či soupeření atd.) dvou jednotlivců se však dosáhlo již pomocí určitých typů her dvou partnerů. Důležitých výsledků, které však jsou asi ještě jen hrubým modelem reálných situací, se dosáhlo při studiu „chování" kolektivu automatů v náhodném prostředí. Je třeba ještě připomenout, že např. úlohy rozpoznávání lze často vhodným způsobem pojímat jako hru rozpoznávající soustavy proti „přírodě", popř. proti experimentátorovi apod.

Určitou úlohu má v psychologii též *teorie grafů* (anebo – což je vlastně totéž – teorie relací). Souvisí mj. s teorií *rozhodování* (decision making), v níž mají podstatnou úlohu preference, tj. zhruba řečeno vztahy typu „x má přednost před y" (v určitém specifikovaném smyslu), „x má s pravděpodobností p přednost před y", „při výběru z eventualit x, y, z volí daná osoba s pravděpodobností p eventualitu x" atd. Určitý význam by mohla mít také v sociální psychologii při zkoumání malých skupin.

Je již určitý počet prací týkajících se aplikací matematiky v psychologii (popř. v biologických vědách), v nichž se vyskytuje pojem *kategorie* (jako třídy objektů a morfismů). Otázka, zda skutečně může mít pro psychologii nebo biologii podstatný význam a jakým způsobem, zůstává otevřená; jisté je jen, že interpretace, při níž objektům odpovídají stavy, morfismům děje, je dosti přirozená.

Poznamenejme na závěr, že pojmu *algoritmu* se v psychologii užívá dost často (někdy ovšem jen volně) pro postup vymezený určitým způsobem, který je blízký pojetí algoritmu ve smyslu běžných matematických definicí; zkoumání takových algoritmických postupů je důležité např. v inženýrské psychologii. Vlastní matematická teorie algoritmů se uplatňuje zatím v psychologii poměrně málo. Podobně také *teorie kódování* má zatím málo aplikací, ač názvů „kód", „kódování" se používá poměrně často (někdy také tam, kde by se spíše hodily názvy „zobrazení", „stochastické zobrazení" atd.).

Psychologické aspekty problematiky umělého intelektu

Otázky imitace intelektu, anebo jak se říká častěji, byť možná ne zcela vhodně, umělého intelektu (artificial intelligence), tvoří již v podstatě zvláštní vědní a technickou oblast. Stýkají se dosti úzce s psychologií, rozhodně však je nelze do ní zahrnout. Bylo by asi vhodné věnovat aplikacím matematiky v této oblasti zvláštní článek. Zde jen poznamenáváme, že nyní jde hlavně o napodobení, popř. i překonání výsledků některých speciálních typů lidské intelektuální činnosti. Klasickým příkladem takové imitace je program, podle něhož počítač hraje šachy na poměrně slušné úrovni. Mnohem náročnější otázky imitace výsledků širších oblastí intelektuální činnosti jsou, jak se zdá, zatím spíše jen předmětem obecných úvah.

Perspektivně lze očekávat paralelní rozvoj imitace intelektu a teorie reálného lidského myšlení, přičemž se tyto oblasti budou navzájem obohacovat a matematické modelování bude zčásti společné. Podstatnou úlohu zde může mít heuristika. Tento obor vlastně teprve vzniká; má zkoumat – velmi zhruba řečeno – vyhledávací postupy, jež nemají algoritmický ráz (nepředpokládá se jednoznačnost a není zaručena rezultativnost). Matematická stránka není však, jak se zdá, ještě dosti objasněna.

Některé podněty, které dává matematice problematika psychologie

Podobně jako většina věd dává též psychologie a příbuzné obory řadu podnětů pro rozvoj matematiky. Někdy jde o problémy patřící do ustálených matematických disciplín, někdy o nové pohledy, popř. i o vytváření nových matematických teorií. Leckdy jde o otázky, jejichž zodpovědění má přímý význam pro příslušnou vědu, často však jde také o matematickou problematiku, jejíž zkoumání má v této vědě jen nepřímý odraz.

Uvedeme nyní velmi stručně pouze jednu z mnoha možných ukázek; volíme vědomě problematiku, která je zatím vzdálena aplikacím, je však matematicky dosti zajímavá.

Vezmeme podnět, který vychází spíše z oblasti neurofyziologie, resp. neurologie. Jak známo, člověk ztrácí denně mnoho (tisíce) nervových buněk, ale to se neodráží na funkci nervové soustavy. Nejen to, léze poměrně značné časti nervové tkáně (při nemoci, úrazu) nemusí vést k vážnějším poruchám činnosti mozku. Bylo by velmi důležité zkoumat okolnosti, za kterých jisté struktury zachovávají své podstatné vlastnosti a funkce přes vyřazení značné části svých složek (prvků). Tato otázka je však nesmírně obtížná, a proto je nasnadě zkoumat nejdříve obdobně „léze" relativně jednoduchých a dobře známých matematických útvarů. Takové zkoumání by v jisté perspektivě, byť možná vzdálené, mohlo zpětně poskytnout důležité podněty pro zkoumání rezistence nervové soustavy vůči lézím (popř. analogických pojmů v teorii rozpoznávání obrazů apod.).

Konkrétně lze vzít v úvahu třeba kompaktní topologické prostory. Je-li dán takový prostor X, jeho konečné otevřené pokrytí $\mathscr{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$ a číslo α, $0 < \alpha < 1$, které interpretujeme jako pravděpodobnost vyřazení „oblasti" G_j (pro všechna j stejnou), pak dostáváme jisté rozdělení pravděpodobnosti na množině prostorů tvaru $X - \bigcup\{G_i \mid i \in K\}$, kde K je podmnožina množiny $\{1, \dots, n\}$. Je-li ještě dána jistá třída kompaktních prostorů $\mathscr{A}$, můžeme mluvit o pravděpodobnosti $P_\alpha(X, \mathscr{G}, \mathscr{A})$ toho, že „poškozený" prostor patří do $\mathscr{A}$. Položme ještě $\bar{P}_\alpha(X, \mathscr{G}, \mathscr{A}) = \sup P_\alpha(X, \mathscr{H}, \mathscr{A})$, kde $\mathscr{H}$ probíhá všechna zjemnění pokrytí $\mathscr{G}$. Budeme nyní říkat, že prostor X je L-blízký třídě $\mathscr{A}$, jestliže pro každé α se najde takové $\varphi(\alpha) > 0$, že je vždy $\bar{P}_\alpha(X, \mathscr{G}, \mathscr{A}) > \varphi(\alpha)$. Platí věta: Nejmenší třída obsahující prázdný prostor a uzavřená vůči L-blízkosti se skládá ze všech řídce rozložených prostorů. Tato věta je velmi snadná, ukazuje však určitou nosnost uvedených pojmů. Jiný doklad: předpokládejme, že X je metrický kompaktní prostor. Pak je zřejmý smysl čísla $\bar{P}_\alpha(X, \varepsilon) = \bar{P}_\alpha(X, \varepsilon, \{\emptyset\})$. Ukazuje se, že $(1/\log \alpha) \log \bar{P}_\alpha(X, \varepsilon)$ se rovná $N(\varepsilon)$ – nejmenší mohutnosti ε-sítě. Souvislost s teorií tzv. ε-entropie (viz [11]) je zřejmá, a dá se říci, že ε-entropie se objevuje v nastíněné teorii jako speciální případ.

Důležitější jsou možná otázky zachování homologických, popř. homotopických vlastností při podobných „lézích" (při přechodu od X k $X - \bigcup G_i$). Výklad této problematiky by nás však zavedl příliš daleko.

Poznamenáváme ještě, že zmíněné pojetí vyřazování množin G_i koresponduje spíše s tzv. difúzními lézemi. Předpokládáme-li kladnou korelaci vyřazování sousedních množin, lze patrně dospět k modelu, který spíše odpovídá lézím rozsáhlejších souvislých areálů.

Současný stav matematické psychologie

Omezíme se zde na matematickou psychologii ve vlastním smyslu, tj. na otázky matematického modelování psychických jevů a dějů. Otázky současného stavu aplikací matematiky v příbuzných oblastech (neurofyziologie, imitace intelektu aj.) by si vyžadovaly zvláštního článku.

Matematická psychologie se nyní pěstuje zvláště intenzívně v USA, a to – ponecháme-li stranou běžnější statistické aplikace i faktorovou analýzu – zejména počínaje padesátými léty. Důležitým mezníkem zde patrně bylo vydání třísvazkového díla *Handbook of Mathematical Psychology* [5] a vznik časopisu Journal of Mathematical Psychology, který vychází od r. 1964.

V oblasti matematické psychologie se pracuje též v některých zemích západní Evropy, avšak v podstatně menším rozsahu. V SSSR se matematické psychologii věnuje větší pozornost až v poměrně nedávné době. Vyšlo již několik knih, v nichž se z obecných hledisek probírají otázky modelování psychiky včetně otázek matematických modelů. Značná pozornost je věnována otázkám rozpoznávání obrazů, ovšem spíše se zaměřením k principům technických soustav. V poslední době byl význam matematické psychologie výslovně zdůrazněn v souvislosti se zřízením (koncem r. 1971) Ústavu psychologie AV SSSR, a to mj. v interviewu s ředitelem tohoto ústavu B. F. LOMOVEM, které uveřejnil časopis „Voprosy filosofii“, 1972, č. 5, str. 155–159. Konkrétní vědecká práce v matematické psychologii se v SSSR nyní ve velké míře týká otázek souvisejících s inženýrskou psychologií, rozpoznáváním obrazů apod.

V ČSSR se zatím matematická psychologie (a vůbec aplikace matematických metod v psychologii) rozvinula poměrně málo. Obvyklé metody matematické statistiky jsou nyní hojně využívány; ostatně řada psychologických pracovišť zaměstnává odborníky v matematické statistice anebo má s nimi soustavný kontakt. Jinak se však nejvíce používá faktorové analýzy, kdežto práce patřící do matematické psychologie v užším smyslu jsou poměrně nečetné. Kontakt se světovým vývojem je však udržován, a to umožňuje práci na potřebné úrovni. Důležité je také např. to, že časopis „Čs. psychologie“ občas seznamuje čtenáře v přehledných článcích i v recenzích s některými oblastmi matematické psychologie. Užitečná je též výběrová přednáška o matematické psychologii, konaná na filosofické fakultě UK.

Na matematicko-fyzikální fakultě UK se od r. 1970 pracuje na fakultním úkolu „Výzkum některých obecných matematických metod vhodných pro aplikaci v psychologii“ a koná se příslušný seminář. Práce zatím spočívá – což je v tomto případě přirozené – hlavně v seznamování s literaturou, a toto stadium patrně ještě jistou dobu potrvá, i když v této souvislosti vznikly některé původní matematické práce. Práce se zaměřuje převážně na výzkum matematických metod, postupně by se však měla přiblížit matematické psychologii ve vlastním smyslu. Užitečná je též výběrová přednáška o matematických metodách používaných v psychologii, konaná na fakultě již čtvrtý rok.

Je třeba poznamenat, že po některých stránkách jsou u nás příznivé podmínky pro práci v matematické psychologii: ve většině matematických disciplín, které s ní souvisí, se u nás pracuje na dobré úrovni, mj. v teorii automatů, teorii informace, teorii stochastických procesů, v matematické teorii jazyků, ale také — což je možná méně známé — v otázkách teorie prahových funkcí (v tzv. prahové logice).

Některé závěry

Jsou dobré důvody pro předpoklad, že v dlouhodobé perspektivě bude vzrůstat váha psychologie v soustavě věd i význam matematických metod pro psychologii. Proto je třeba pěstovat u nás matematickou psychologii aspoň tak, aby se zabezpečila plná informovanost o současném světovém stavu; účast matematiků může být při tom velmi užitečná.

Počet psychologů však u nás není velký a značná jejich část působí v praxi. Většinou zatím nepotřebují používat matematických metod (kromě běžných statistických postupů). Také přírůstek psychologů je dosti malý. Při střízlivém pohledu z toho vyplývá, že v blízké době se u nás matematickou psychologií bude soustavně zabývat nanejvýš menší tým.

Ze stanoviska matematiky se však situace jeví poněkud jinak. Matematické metody vhodné pro použití v psychologii totiž úzce souvisí s metodami, které mají aplikace v oblasti umělého intelektu a v dalších příbuzných oblastech. Oblast imitace intelektu se bude patrně rychle rozvíjet, takže zde bude široké pole působnosti. Lze očekávat, že přitom budou důležité mj. podněty přicházející z psychologie, a to nejspíše prostřednictvím matematických modelů. Z tohoto hlediska je práce v oboru matematických metod psychologie nejen důležitá, ale možná budou pro ni zapotřebí (byť sotva již v nejbližších letech) poměrně početné týmy.

Z hlediska matematiky je také velmi důležitá okolnost (o níž již byla řeč), že psychologická problematika poskytuje matematice řadu nových a nezvyklých podnětů. Důležité je též to, že u aplikací v psychologii se dosti výrazně projevuje vzájemná souvislost různých matematických disciplín, zejména oborů zařazovaných do širší oblasti tzv. teoretické kybernetiky.

Oblast matematických metod vhodných pro aplikaci v psychologii a příbuzných oborech je velmi perspektivní a bylo by užitečné, kdyby se u nás více rozvinula.

Literatura

[1] JIRÁNEK F., SOUČEK J.: *Úvod do obecné psychologie.* Praha, Státní pedagogické nakladatelství 1969.

[2] ADCOCK C. J.: *Fundamentals of psychology.* London, Methuen and Co. Ltd. 1960. Český překlad: *Základy psychologie.* Praha, Orbis 1973.

[3] RESTLE F.: *Mathematical models in psychology.* Baltimore, Penguin Books Inc. 1971.

[4] COOMBS C. H., DAWES R. M., TVERSKY A.: *Mathematical psychology. An elementary introduction.* Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall Inc. 1970.

[5] LUCE R. D., BUSH R. R., GALANTER E. (eds.): *Handbook of mathematical psychology.* New York, London, Sydney, John Wiley and Sons Inc., vol. *I* 1963 (2nd printing 1967), vol. *II* 1964 (2nd printing 1967), vol. *III* 1965.

[6] THURSTONE L. L.: *The vectors of the mind.* Chicago, Univ. of Chicago Press 1960.

[7] MILLER G. A.: *The magical number seven plus or minus two. Some limits on our capacity for processing information.* Psychological Review *63* (1956), 81—97. Ruský překlad: *Magičeskoje čislo sem' pljus ili minus dva. O někatorych predělach našej sposobnosti pererabatyvať informaciju,* V: Inženěrnaja psichologija. Sbornik statěj. Moskva, Progress 1964, 192—224.

[8] ROSENBLATT F.: *Principles of neurodynamics. Perceptrons and the theory of brain mechanisms.* Washington, Spartan Books 1962. Ruský překlad: *Principy nejrodinamiki. Perceptrony i teorija mechanizmov mozga.* Moskva, Mir 1965.

[9] MINSKY M., PAPERT S.: *Perceptrons. An introduction to computational geometry.* Cambridge, Mass., London, The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology 1969. Ruský překlad: *Perseptrony.* Moskva, Mir 1971.

[10] ATKINSON R. C., BOWER C. H., CROTHERS E. J.: *An introduction to mathematical learning theory.* New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc. 1965.

[11] VITUŠKIN A. G.: *Ocenka složnosti zadači tabulirovanija.* Moskva, Gos. izd. fiz.-mat. lit. 1959.

Co znamená pochopit? Má toto slovo stejný význam pro všechny? Pochopit důkaz věty znamená zkoumat postupně každý sylogismus, který je jeho součástí, a konstatovat, že je správný, že odpovídá pravidlům hry? Pochopit definici znamená poznat, že jsme již porozuměli smyslu všech použitých termínů, a konstatovat, že neobsahuje žádný rozpor? Ano, pro některé lidi. Jakmile tito lidé toto konstatují, řeknou: pochopil jsem.

Neplatí to však pro většinu lidí. Téměř všichni lidé jsou náročnější, chtějí vědět nejenom, zda všechny sylogismy důkazu jsou správné, ale také proč na sebe navazují právě v takovém sledu a ne v jiném. Pokud se jim zdá, že jsou ovládány vrtochy a nikoli cílevědomou inteligencí, nevěří tomu, že pochopili.

Bezpochyby si sami neuvědomují, co reklamují, a nedovedou své přání formulovat, nejsou však uspokojeni, nejasně pociťují, že jim něco chybí. Co se tedy s nimi děje? Zpočátku si ještě uvědomují úvahy, které jsou jim předkládány; poněvadž jsou však poutány jen příliš slabou nití k těm, které předcházely, i k těm, které následují, přejdou tyto úvahy, aniž by zanechaly stopu v mozku lidí, lidé je ihned zapomenou. Když tito lidé postupují dále, už vůbec neuvidí toto pomíjející světlo, protože teorémy se opírají navzájem o sebe, a tito lidé zapomněli právě ty teorémy, které právě potřebují. Takto se stávají neschopnými chápat matematiku. Jejich inteligence je často příliš líná, aby hledala vedoucí nit a nalezla ji.

Jiní lidé se dotazují stále, k čemu to je, nepochopí, jestliže nenaleznou kolem sebe v praxi nebo v přírodě smysl některého matematického poznatku. Každému slovu podkládají citlivý obraz; je třeba, aby definice vyvolala tento obraz, aby v každé etapě důkazu viděli, jak se transformuje a vyvíjí. Jen za těchto podmínek pochopí a zapamatují si.

Poněvadž slovo pochopit má několik významů, definice nejlépe pochopené některými lidmi, nevyhovují jiným.

H. Poincaré