Tim Poston

Čistota v aplikacích

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 29 (1984), No. 3, 138--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138620

Čistota v aplikacích

Tim Poston

Tim Poston je profesorem v Ústavu teoretické fyziky na univerzitě ve Stuttgartu. První diplom z matematiky získal na univerzitě v Hullu (v Anglii) v roce 1967 a začal tam i s postgraduálním studiem. Po roce volna, kdy byl předsedou studentské unie, přešel do Matematického ústavu univerzity ve Warwicku a tam v roce 1972 dokončil doktorskou práci. Od té doby pracoval na různých univerzitách a vědeckých ústavech: v Riu de Janeiro, v Rochesteru (ve státě New York), v Portu (Portugalsko), v Ženevě a v Bristolu. Jeho vědecká práce se obecně týká teorie katastrof, a to od matematických aspektů přes aplikace na problémy průhybu desek až k archeologii. Je spoluautorem knih o diferenciální geometrii, teorii relativity a o teorii katastrof a jejích aplikacích. (Poznámka redakce sborníku)

Když mi bylo sedmnáct, pokládal jsem se za Čistého Matematika. Byl v tom asi kus drzosti — moje studijní výsledky v matematice nebyly nijak velkolepé a o mé nezkažené čistotě by se bylo dalo z mnoha důvodů pochybovat — ale stojí za to uvážit, co jsem tím myslel.

Zaprvé, neznamenalo to, že bych byl ze tří předmětů s názvy „čistá matematika", „aplikovaná matematika" a „fyzika", které jsme tehdy měli na gymnáziu, dával přednost tomu prvnímu. Sylabus „čisté matematiky" byl něco jako intelektuální pytel cárů. Něco z nekonečných řad, něco z jednoduchých obyčejných diferenciálních rovnic, některé standardní integrály, kterým jsem se mohl naučit právě tak kvůli zkoušce, ubohý přehled axiomatiky trojrozměrné eukleidovské geometrie... vše spolu související asi tak jako dějepisná data o králích. Naproti tomu „aplikovaný" kurs se soustřeďoval na několik obsahově bohatých pojmů (síla, energie, rychlost, hmotnost, moment...) a na několik divokých fikcí (neroztažitelná nebo dokonale elastická struna, tuhá tyč, hladký drát), jejichž účelem bylo vyloučit vše *kromě* těchto pojmů z vesmíru našich vyučovacích hodin. Neobjevila se tam žádná z matoucích výstředností strojů, které by mohly skutečně fungovat. V „čistém" kursu se učilo více postupů důležitých pro průměrného uživatele matematiky, ale „aplikovaný" kurs měl v sobě velkolepost (malé) Newtonovy busty pro svou koherenci a smysl pro souvislosti. Jako nadějný přírodovědec bych byl býval znechucen jeho nedůležitostí; jako „čistý matematik" jsem se však těšil z jeho krásy.

Očekával jsme, že na univerzitě se všechno změní, což se také stalo. Katedra čisté matematiky konečně nabídla teorie, které kombinovaly jemné řemeslo přesné argumentace se vznešenou jednotou velkých katedrál. Vím, že jsem se ještě stále nacházel v menších kaplích (knihy ještě stále nesly podtitul „elementární"), ale styl byl nezaměnitelný.

Katedra aplikované matematiky přinesla opačné překvapení. Tatam byla čistá inte-

TIM POSTON: *Purity in Applications:* In: *Mathematics Tomorrov,* edited by L. STEEN, Springer 1981, pp. 49—54.

lektuální pitva, která by mohla rozebrat některý z těch nepravděpodobných problémů o hladkých drátech, proargumentovat se až k rovnici, jejíž řešení by nevyžadovalo mnoho zamotaného počítání a pak předvést elegantní odpověď. Nebylo zde více realismu než na střední škole, ale další dimenze, které bylo nutno brát v úvahu v elektromagnetismu a při popisu gyroskopů znamenaly, že jasný výklad na elementární úrovni již nedostačoval.

Nebyl však nahrazen souvislou úvahou na pokročilejší úrovni.

Byl nahrazen prostopášnictvím indexů.

Neumím si představit, že by myšlenka funkce definované na trojicích geometrických vektorů a vyjadřující objem rovnoběžnostěnu s vektory u, v, w jako hranami byla méně srozumitelná a učenější než tajemný symbol ε_{ijk} definovaný jako „$+1$ pro i, j, k dávající cyklickou permutaci čísel $1, 2, 3$, -1 při opačné permutaci a 0, jestliže některé ze symbolů i, j, k splynou". Zajisté, že ε_{ijk} reprezentuje objemovou funkci ve vhodných souřadnicích. Jako pomůcka pro počítání je tento symbol neocenitelný. Ale často může malá jasná myšlenka nahradit větší část výpočtů. Je jisté, že objem se může stát snáze předmětem jasné úvahy než množina 27 hodnot $1, 0$ a -1, která z temných příčin vyžaduje vynásobení jakobiánem pro některé souřadnicové soustavy. (Opět by to *nemuselo* být temné, kdyby se jasně zavedla myšlenka lineárního operátoru A – který je reprezentován maticí, ale nikoliv totožný s touto maticí – takže determinant $\det A$ může být srozumitelně zaveden jako číslo, kterým se při transformaci operátorem A vynásobí objemy.)

Je dobře ocitovat, jak v roce 1893 ([2]) obhajoval Heaviside použití matematiky v přírodních vědách:

> Fakta nejsou mnoho platná, pokud se na ně díváme jen jako na fakta. Matou nás svou početností a zdánlivou nesouvislostí. Jiná věc ovšem je, když je přetvoříme do podoby teorie a uvedeme do vzájemné harmonie. Teorie vypovídá o podstatě faktů. Vědecké poznatky bez teorie se hodí leda do blázince.

V matematice jsou příslušnými fakty formule. Musí být přetvořeny, uvedeny do vzájemné intelektuální harmonie, jinak se hodí leda na druhořadé pracoviště aplikované matematiky. Toto přetvoření a uvedení do harmonie je „čistá" matematika ve stejném smyslu jako je čistý hudební tón nebo hlas: „oproštěný od tvrdosti, drsnosti nebo nesouzvuků; hladký, jasný" (podle Oxford English Dictionary). Také je to Čistá Matematika; není zde nutně vazba na nějakou speciální aplikaci. Objem vědra i objem oboru v n-rozměrném fázovém prostoru se dají stejným způsobem objasnit tím, že uvažujeme „v abstraktnu" o pojmu objemu. Praktické výhody intelektuální jasnosti mohou být nezměrné.

Tak například v samých počátcích zrodu počítačů (předelektronických) dostala obsluha jednoho počítače úkol od specialistů v aerodynamice ([1]). Šlo o výpočet inverzní matice k velké numericky dané matici. Když byla inverzní matice s velkým úsilím vypočtena, ukázalo se podle některých podstatných znaků, že je to patrně matice... transponovaná. Krátké přezkoušení původní abstraktní matice (jejíž prvky byly funkce a nikoliv speciální numerické hodnoty původně předložené počítači) ukázalo, že matice je ortogonální. Inverzní matice mohla být určena *přesně* jako matice transponovaná, bez jakýchkoliv náročných výpočtů. Je pravda, že dnes je výpočet inverzní matice natolik levnou záležitostí, že někteří lidé budou pokládat jakékoliv předběžné intelektuální úsilí za neekonomické; ale právě tímto směrem se nachází blázinec obydlený posedlými programátory „se zapadlýma, nadšeně zářícíma očima" kteří, jak říká Weizenbaum v [6] „mají pouze techniku a žádné znalosti". Spěcháme-li, budiž, pak stiskněme rychle knoflík pro výpočet inverzní matice. Ale jestliže se návyk porozumění ztratí na elementární úrovni nebo nebyl nikdy vypěstován, nemůže se už znovu objevit, až se problémy stanou složitějšími.

Před několika lety jsem se podílel na numerických výpočtech spekter krystalů [4], kde bylo třeba celé hodiny provádět složité a rozsáhlé rutinní výpočty plné mazaných triků, aby se člověk prokousal k výsledku. Protože jsem v tomto oboru neměl žádnou praxi, neutápěl jsem se v technických detailech, a proto jsem si povšiml, že základní přístup byl stejně zvrácený jako numerický výpočet inverzní matice k ortogonální matici. Jestliže „dispersní relace" mezi frekvencí v a vlnovým číslem k bude chápána ne jako „větvená funkce" $v_i(k)$, ale jako závislost složky k na v a dalších veličinách, nákladné hledání kořenů může být často nahrazeno jednoduchým výpočtem funkčních hodnot. Výsledkem byl v každém případě přístup mnohem obecnější, pružnější a levnější.

Pojmové myšlení je solí matematiky. Jestliže sůl ztratí svou chuť, čím budeme ochucovat aplikace? Pokud jde o výchovu uživatelů matematiky, často bývá předmětem prudkých sporů otázka, které části „čisté matematiky" — chápané jako technické prostředky — je třeba vyučovat. Ale to není základní problém. Důležitější je čistá esence matematiky, porozumění struktuře a intelektuální harmonie. Jestliže se student ničemu z toho nenaučí, pak se nenaučil nic z matematiky; a přírodovědec, ekonom nebo inženýr, který si není vědom toho, že matematické porozumění přináší dolary a rubly, je napůl slepý — dokonce i kdyby druhým okem viděl báječně. Heaviside v [2] dále říká:

> Podle mého názoru Faraday nebyl bohužel matematik. Zřídkakdy se pochybuje o tom, že kdyby jím byl, velice by mu to bylo pomohlo v jeho výzkumech, ušetřil by si spoustu zbytečných spekulací a byl by mohl předvídat další vývoj svého oboru... Ale patrně by bylo příliš očekávat od jednoho člověka, aby byl současně knížetem experimentátorů a kompetentním matematikem.

Bylo by ovšem rozumné očekávat, že týž člověk bude současně odborníkem v aplikované matematice a kompetentním matematikem ve výše uvedeném smyslu a že bude s určitou dovedností vidět les stejně dobře jako jednotlivé stromy.

Někdy je toto očekávání splněno.

Mnohem častěji však není. Obzvláště v Británii vyprodukovaly dějiny celou kastu lidí, kteří nejsou matematiky v našem smyslu — a navíc ani ve skutečnosti nepracují v aplikacích. Korálky navlečené na drátě mají své vyšší analogie, většinou převzaté z mechaniky kontinua 19. století. Obecná teorie relativity byla ovšem vzata na vědomí — snad proto, že v klasickém zápisu se v ní vyskytuje tolik veličin s indexy — ačkoliv obvykle ne v té formě, jak je vyložena v krásné knize Misnera, Thorna a Wheelera [3]. Tato kniha je určena lidem se skutečným zájmem o aplikace, jako jsou fyzikové a astronomové.

Zřejmějším příkladem špatného přístupu, o kterém hovořím (který *není* všeobecný, ale je hodně rozšířený), byla semestrální práce jednoho studenta vyššího ročníku o tom, zdali se jeden vícerozměrný „časoprostor" dá vnořit do jiného. Tím, že se pseudoriemannovským varietám dá přízvisko „časoprostory", stane se práce Aplikovanou, ačkoliv se nedá aplikovat na žádný skutečný prostor. Vícerozměrné problémy vnoření jsou ovšem důležitou potravou pro moderní diferenciální geometrii, která vyvinula mnoho koncepčních postupů pro jejich zkoumání. Snažil se student naučit tyto postupy? Nebo ještě lépe, pokoušel se vymyslet vlastní koncepční přístup od samého počátku? (Zeeman v [7] podává výborný příklad toho, že práce vycházející z úplné neznalosti může mít své přednosti.)

Nic takového. Zabředl do rovnic v celé jejich obindexované slávě a dřel se. Nakonec si myslel, že již má kladný výsledek, spíše ovšem speciální než obecný, ale to bylo právě jeho úkolem. Potom svůj výsledek zkontroloval. Zjistil, že během prvních dvou týdnů se dopustil malé chybičky ve výpočtech, což znehodnotilo práci za zbytek semestru. Kdyby byl strávil celou tu dobu koncepční prací (s výpočty všude tam, kde jsou potřebné), udělal by velký pokrok v porozumění pseudoriemannovským varietám, i když by nakonec nic nepublikoval. Takto však získal jen další kus praxe v manipulování s rovnicemi o mnoha indexech.

Nenavrhuji ovšem, že by se nemělo zkoumat nic, co nemá bezprostřední aplikace. Nehledě na neaplikační výhody matematiky (přesvědčivé, ale obtížně vysvětlitelné posluchači, který *potřebuje* argument), matematicky přirozené otázky se dříve nebo později dostanou do svazku s aplikacemi, tak jako algebraický vynález komplexních čísel ovládl elektrotechniku a kvantovou mechaniku. Pseudoriemannovské struktury nejsou jen libůstkou fyziků: jedna taková přirozená struktura existuje například na grupě všech lineárních transformací roviny zachovávajících obsah ($SL(2, R)$, pozn. překladatele). Tyto struktury by byly zcela určitě vymyšleny a téměř jistě aplikovány, i kdyby nebylo teorie relativity; a v aplikacích jiných než fyzikální časoprostor by dimenze mohla být jakákoliv. Ale protože taková jiná aplikace nebyla dosud nalezena, byla výše zmíněná studentská práce stejně „čistá" jako cokoliv jiného, co se pěstuje na katedře čisté matematiky, až na to, že ve skutečnosti nebyla vůbec čistá a snad to ani nebyla matematika. (To záleží na definici. Lze činnost počítače IBM 704 označit za matematiku?)

Ani veškerá „čistá matematika" není vždy čistá v našem pojetí. „Budoucnost nepatří teorii zobecněných levých pseudo-kup" [5], ale pohled do časopisů ukazuje, že podstatná část dnešní matematiky je tvořena materiály které jsou hodné zapomenutí. Akademická čistá matematika má své vlastní nectnosti, ale není cílem mého článku hovořit o nich, nýbrž o čistotě v aplikacích.

Zdá se mi, že čistota je mnohem podstatnějším kritériem než matematická přesnost. Přesnost je totiž v podstatě jen nástrojem pro čistotu, pro proniknutí k poznání toho, co se ve skutečnosti děje. Její význam se v průběhu historie měnil a pojem správného důkazu se obvykle změnil jako odpověď na nějakou krizi v prozumění. Jestliže existovaly stejně přirozené důvody pro to, aby byl součet řady $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ určen jako 0, 1/2 nebo 1, stalo se nutným zostřit nástroje pro uvažování. Hilbert předvídal určité vyvrcholení takového procesu tříbení, ale Gödel nás jednou provždy zanechal v pochybnostech o definitivnosti všech aritmetických argumentů. V každém případě, dokonce i Bourbaki „zneužívá jazyka“ na účet přesnosti, ale ve prospěch čistoty. V aplikacích se může stát požadavek přesnosti pro přesnost a nikoliv ve službách čistoty ještě více umrtvujícím než je plýtvání indexy. Může dokonce povzbudit růst falešných „aplikovaných“ teorií jako jsou rovnice nerotačního neviskózního proudění, které von Neumann označil za výzkum suché vody, tím, že učiněné předpoklady jsou zamaskovány kouřovou clonou technických detailů. Příliš podrobná mapa, která ukazuje každý logický list každého důkazového stromu, může skrýt les tak účinně, že nikdo nepozná, že objekt na mapě není vůbec prales, ale travnatá krajina. Kdo si v seznamu padesáti tří axiómů o buněčné struktuře rostlin v daném modelu všimne, jak důležitá je přítomnost ligninu?

Přesnost má zásadní důležitost v objasňování. Například otázka „v jakém prostoru existují objekty, se kterými počítáte?“ je výzvou k přesnosti, která osvětluje vše od klasického elektromagnetismu přes vlnovou mechaniku až k teorii průhybu ocelových desek. Někdy se otázky vyvolané snahou po čistotě nedají rychle zodpovědět. Když Poincaré z čistých úvah o mechanice vytvořil topologii, vyvolal tolik otázek v čisté matematice, že celý obor se na půlstoletí skryl jako za záclonou a teprve v poslední době začal nabývat své přirozené významnosti ve fyzice. Aproximace pomocí Taylorových polynomů se používaly celá staletí předtím, než technické prostředky teorie katastrof poskytly jasné, přesné důvody toho, že pro některé účely a ve vhodných případech takové aproximace dokonale fungují a v jiných nedostačují. Čistota je cíl a úroveň, kterých nelze nikdy plně dosáhnout a musí být (stejné jako přesnost) nahrazena kompromisem, aby bylo možno získat numerickou odpověď potřebnou pro dosažení bezprostřednějšího cíle. Ale kompromis by měl být vědomý a uvážlivý: pokud bychom se čistoty vzdali úplně, výsledkem by byla zprvu neúčinnost výpočtů a nakonec blázinec. Nenazývám se již Čistým Matematikem – pracuji totiž v současné době v oddělení fyziky. Nestojím o titul Aplikovaného Matematika spojený s jeho britskými asociacemi a nelogický sám o sobě (kdo aplikuje matematika?). Nepracuji v žádném jednotlivém oboru vědy, jehož jméno bych si mohl vypůjčit; se spoluautory jsem publikoval práce z fyziky, geografie, archeologie... Jsem stále ještě matematik. Pracuji, jak nejlépe dovedu v aplikacích matematického porozumění. Do té míry jak budu úspěšný, budu i čistým matematikem ve smyslu zde naznačeném.

Přeložil Oldřich Kowalski

Literatura

[1] FORMAN S. ACTON: *Numerical Methods that Work*. Harper and Row, New York, 1970.
[2] OLIVER HEAVISIDE: *Electromagnetic Theory*. D. Van Nostrand, New York; and "The Electrician", Printing and Publishing Company, London, 1983.
[3] C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER: *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
[4] T. POSTON and A. B. BUDGOR: *A Geometrical Approach to Calculating the Energy and Frequency Spectra of Crystals*. J. Comp. Phys *19* (1975), 1–28.
[5] I. N. STEWART: *Concepts of Modern Mathematics*. Penguin, London, 1977.
[6] JOSEPH WEIZENBAUM: *Computer Power and Human Reason*. W. H. Freeman, San Francisco, 1976.
[7] E. C. ZEEMAN: *Research Ancient and Modern*. Bull. IMA *10* (1974), 272–281; also in E. C. ZEEMAN: *Catastrophe Theory, Selected Papers 1972–77*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1977.