Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Karel Šindelář

Kuželosečky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 2, 145--156

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138690`

POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK IV — ČÍSLO 2

MATEMATIKA

KUŽELOSEČKY

Dr Karel Šindelář

Nechť v rovině je dána afinní soustava souřadnic s reálným počátkem O a s reálnými jednotkovými vektory J_1, J_2, jež splňují jen tu podmínku, že jsou lineárně nezávislé, tedy nekolineární. Uvažovaná rovina nechť je rozšířená reálná rovina, mezi jejíž objekty patří i body a vektory s komplexními souřadnicemi, jež jsou však imaginární, je-li imaginární aspoň jedna jejich souřadnice.

Kvadratický mnohočlen

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c\,, \tag{1}$$

kde aspoň jeden z koeficientů při kvadratických členech, tedy aspoň jeden z čísel a_{11}, a_{12}, a_{22} je různé od nuly, přiřazuje každému bodu $[\xi, \eta]$ v rovině jediné číslo $F(\xi, \eta)$, tedy vytváří kvadratickou funkci v rovině.

Definice 1. *Kuželosečkou (čarou druhého stupně) nazýváme množinu takových bodů $[\xi, \eta]$ (reálných a imaginárních), jimž daný kvadratický mnohočlen* (1) *přiřazuje číslo nula.*

Rovnice této čáry je pak rovnice

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \tag{2}$$

a ovšem každá rovnice, která je s ní ekvivalentní, tj. která vznikne z rovnice (2) vynásobením číslem $p \neq 0$.

P o z n á m k a. Snadno lze ukázat, že zvolíme-li v rovině jinou afinní soustavu souřadnic, změní se koeficienty v rovnici kuželosečky, ale nezmění se její stupeň; rovnice zůstane kvadratická.

Pro poznání vlastností kuželosečky je důležitý nejen kvadratický mnohočlen (1) na levé straně její rovnice (2), nýbrž i další tři mnohočleny, nejvýše lineární, z nichž první dva jsou poloviční parciální derivace mnohočlenu (1) podle x, resp. y jako nezávisle proměnné:

$$F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + b_1\,, \quad F_2(x, y) = a_{12}x + a_{22}y + b_2\,,$$
$$F_3(x, y) = b_1x + b_2y + c\,, \tag{3}$$

tak zvané mnohočleny adjugované (přidružené) k mnohočlenu (1).

Dosazením se přesvědčíme, že platí identicky rovnice

$$F(x, y) = xF_1(x, y) + yF_2(x, y) + F_3(x, y) \tag{4}$$

a dále

$$\xi F_1(x, y) + \eta F_2(x, y) + F_3(x, y) =$$
$$= xF_1(\xi, \eta) + yF_2(\xi, \eta) + F_3(\xi, \eta)\,. \tag{5}$$

Výraz na levé, a tedy i na pravé straně rovnice (5) budeme stručně označovat $F(x, y; \xi, \eta)$, takže platí rovněž identicky

$$F(x, y; \xi, \eta) = F(\xi, \eta; x, y) . \tag{6}$$

Definice 2. *Bod* $P[x, y]$, *jehož souřadnice vyhovují rovnicím*

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0 \,, \; a_{12}x + a_{22}y + b_2 = 0 \,, \; b_1x + b_2y + c = 0 \,, \tag{7}$$

se nazývá singulární bod kuželosečky (2). Směr vektoru $\mathbf{V}(v_1, v_2)$, *jehož souřadnice vyhovují rovnicím*

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 = 0 \,, \; a_{12}v_1 + a_{22}v_2 = 0 \,, \; b_1v_1 + b_2v_2 = 0 \,, \tag{8}$$

se nazývá singulární směr kuželosečky (2), vektor $\mathbf{V}$ *pak její singulární vektor.*

Poznámka. Z identity (4) plyne, že každý singulární bod kuželosečky je jejím bodem. Ale naopak každý bod kuželosečky není jejím bodem singulárním.

Definice 3. *Bod kuželosečky, který není její bodem singulárním, se nazývá bod regulární kuželosečky.*

Definice 4. *Kuželosečka, která má aspoň jeden singulární bod nebo směr, se nazývá singulární; každá jiná kuželosečka se nazývá regulární.*

O tom, ke kterému z obou druhů patří kuželosečka daná rovnicí (2), rozhodneme nejrychleji pomocí determinantu 3. stupně

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} , \tag{9}$$

zvaného diskriminant mnohočlenu (1) z levé strany její rovnice.

Věta 1. *Kuželosečka* (2) *je singulární právě tehdy, je-li diskriminant* (9) *mnohočlenu* (1) *rovný nule; jinak je regulární.*

Důkaz. Je-li determinant A rovný nule, je hodnost h' rozšířené matice soustavy (7) nejvýše dvě. Označíme-li h hodnost nerozšířené matice této soustavy, mohou nastat tyto tři případy:

$$h = 1, h' = 1; \quad h = 2, h' = 2; \quad h = 1, h' = 2.$$

V prvních dvou případech má soustava (7) řešení podle Frobeniovy věty, takže kuželosečka (2) má aspoň jeden singulární bod, v prvním případě dokonce celou přímku singulárních bodů.

V prvním a ve třetím případě má soustava rovnic (8) nenulové řešení, takže kuželosečka (2) má singulární směr.

Je-li $A \neq 0$, je $h' = 3$ a $h = 2$, takže kuželosečka (2) nemá ani singulární bod ani singulární směr.

Definice 5. *Hodností kuželosečky* (2) *nazýváme hodnost diskriminantu* (9) *mnohočlenu* (1).

Věta 2. *Regulární kuželosečka má hodnost 3, singulární kuželosečka má hodnost 2 nebo 1. Má-li hodnost 2, má buď jediný singulární bod nebo jediný singulární směr, má-li hodnost 1, má celou přímku singulárních bodů a singulární směr, který je směrem této přímky.*

Důkaz je obsažen v důkazu věty 1.

Prozatím byly všechny koeficienty mnohočlenu (1) a všechny souřadnice bodů a vektorů libovolná komplexní čísla. V dalším bude však třeba zavést některá rozlišení.

Definice 6. *Existuje-li taková rovnice kuželosečky* (2), *že všechny koeficienty mnohočlenu* (1) *na její levé straně jsou čísla reálná, nazývá se příslušná kuželosečka formálně reálná; jinak se nazývá formálně imaginární.*

Formálně reálná kuželosečka nemusí však obsahovat žádný reálný bod nebo může obsahovat jen singulární reálné body; proto zavádíme toto další rozlišení.

Definice 7. *Formálně reálná kuželosečka se nazývá bodově reálná, obsahuje-li aspoň jeden regulární reálný bod; jinak se nazývá bodově imaginární.*

Věta 3. *Přímka, jejíž všechny body neleží na kuželosečce, má s kuželosečkou společné buď dva body, nebo jeden bod, nebo nemá s kuželosečkou společný žádný bod. Přímka, která má s kuželosečkou více různých společných bodů než dva, leží celá na kuželosečce. Kuželosečka se pak skládá ještě z další přímky, a to buď různé od první přímky nebo s ní totožné.*

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic tak, že zkoumaná přímka je osa x, takže její rovnice zní

$$y = 0 . \tag{10}$$

Pro x-ové souřadnice jejích průsečíků s kuželosečkou (2) platí

$$a_{11}x^2 + 2b_1x + c = 0 . \tag{11}$$

Je-li $a_{11} \neq 0$, jsou průsečíky dva a to buď různé nebo splývající. Je-li $a_{11} = 0$, ale $b_1 \neq 0$, je průsečík přímky s kuželosečkou jeden. Je-li dále $a_{11} = b_1 = 0$, ale $c \neq 0$, nemá přímka s kuželosečkou žádný společný bod. A je-li konečně i absolutní člen rovný nule, tedy $a_{11} = b_1 = c = 0$, je každý bod přímky také bodem kuželosečky, jejíž rovnice potom zní:

$$2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_2y = 0 ; \tag{12}$$

kuželosečka je v tomto případě složena ze dvou přímek, a to z přímky (10) a z další přímky

$$2a_{12}x + a_{22}y + 2b_2 = 0 . \tag{13}$$

Definice 8. *Kuželosečka, jež se skládá ze dvou přímek, ať již různých nebo splývajících se nazývá složená (rozložitelná); ostatní kuželosečky se nazývají jednoduché (nerozložitelné).*

Abychom prozkoumali, jak souvisí rozložitelnost kuželosečky s její hodností, hledejme její průsečíky s přímkou, a to tak, že si na této přímce zvolíme dva různé body $\pi[\xi, \eta]$ a $P_0[x_0, y_0]$. Pomocí dělicího poměru λ lze každý bod $P[x, y]$ této přímky vyjádřit ve tvaru

$$x = \frac{x_0 - \lambda\xi}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_0 - \lambda\eta}{1 - \lambda}, \tag{14}$$

až na bod π, a naopak každé hodnotě $\lambda \neq 1$ odpovídá nějaký bod přímky.

Společné body této přímky s kuželosečkou (2) dostaneme dosazením výrazů (14) do rovnice (2). Po úpravě bude mít rovnice tvar

$$\lambda^2F(\xi, \eta) - 2\lambda F(\xi, \eta; x_0, y_0) + F(x_0, y_0) = 0 . \tag{15}$$

Neleží-li bod π na kuželosečce, je to kvadratická rovnice pro λ, která má nejvýše dva různé kořeny λ_1, λ_2. Každému z nich, který není rovný jedné, odpovídá společný bod kuželosečky s přímkou. Jsou-li všechny koeficienty v rovnici (15) rovny nule, leží všechny body přímky na kuželosečce.

Všimněme si nejprve případu, kdy přímka nemá s kuželosečkou žádný společný bod nebo jediný společný bod odpovídající jednoduchému kořenu λ

rovnice (15). Ten nastane právě tehdy, když aspoň jeden z kořenů rovnice (15) je rovný jedné. Zaveďme si tento pojem.

Definice 9. *Směr vektoru* $\mathbf{V}(v_1, v_2)$, *jehož souřadnice jsou vázány rovnicí*

$$a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 = 0 \tag{16}$$

se nazývá asymptotický směr kuželosečky (2).

Věta 4. *Přímka, jež neleží celá na kuželosečce* (2), *má s touto kuželosečkou společný nejvýše jeden bod odpovídající jednoduchému kořenu* λ *rovnice* (15) *právě tehdy, když má asymptotický směr kuželosečky.*

Důkaz. Neleží-li přímka celá na kuželosečce (2), lze na ní vždy vybrat takový bod $\pi[\xi, \eta]$, který na této kuželosečce neleží. Společné body spojnice bodu $\pi[\xi, \eta]$ a dalšího bodu, $P_0[x_0, y_0]$ přímky s kuželosečkou (2) lze pak vyjádřit výrazy (14), kde λ je kořenem rovnice (15). Tato rovnice má však aspoň jeden kořen rovný jedné právě tehdy, když platí

$$2F(\xi, \eta; x_0, y_0) = F(\xi, \eta) + F(x_0, y_0)\,,$$

což lze dosazením a úpravou vyjádřit ve tvaru

$$a_{11}(\xi - x_0)^2 + 2a_{12}(\xi - x_0)(\eta - y_0) + a_{22}(\eta - y_0)^2 = 0\,;$$

to je však již rovnice (16), neboť o vektoru $\mathbf{V}$ dané přímky platí $\pi - P_0 = \mathbf{V}(v_1, v_2)$.

Naopak, má-li přímka, jež neleží celá na kuželosečce (2), její asymptotický směr určený vektorem $\mathbf{V}$, jehož souřadnice splňují rovnici (16), lze vždy vybrat takový bod π této přímky, který neleží na kuželosečce, takže další bod této přímky bude $P_0 = \pi + \mathbf{V}$. Rovnice (15) pro λ odpovídající průsečíkům přímky s kuželosečkou má pak aspoň jeden kořen rovný jedné.

Definice 10. *Přímka, která nemá s kuželosečkou žádný společný bod, se nazývá asymptota kuželosečky.*

Věta 5. *Asymptota kuželosečky má vždy její asymptotický směr, ale každá přímka asymptotického směru kuželosečky není asymptotou.*

Důkaz je zřejmý: plyne přímo z definice asymptoty a asymptotického směru kuželosečky.

Dále si všimněme ještě dvou případů, kdy přímka je součástí kuželosečky.

Věta 6. *Spojnice singulárního bodu kuželosečky s libovolným dalším jejím bodem leží celá na kuželosečce.*

Důkaz. Nechť singulární bod kuželosečky (2) je $\pi[\xi, \eta]$ a nechť další její bod je $P_0[x_0, y_0]$. Potom je rovnice (15) splněna identicky, takže každý bod přímky $\pi\ P_0$ leží na kuželosečce (2).

Věta 7. *Přímka, která prochází některým bodem kuželosečky a má její singulární směr, leží celá na kuželosečce.*

Důkaz. Nechť společný bod kuželosečky (2) s přímkou je $P_0[x_0, y_0]$ a nechť vektor singulárního směru kuželosečky je $\mathbf{V}(v_1, v_2)$. Potom parametrické rovnice zmíněné přímky jsou $x = x_0 + v_1t$, $y = y_0 + v_2t$ a platí $F(x_0 + v_1t, y_0 + v_2t) = 0$ pro každé t, jak se přesvědčíme dosazením a seřazením podle mocnin t.

Věta 8. *Kuželosečka je rozložitelná právě tehdy, když je singulární. Potom se skládá ze dvou přímek, které spolu splývají, je-li hodnost kuželosečky 1 a jsou od sebe různé, je-li její hodnost 2.*

Důkaz. Je-li kuželosečka složena ze dvou přímek

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0\,, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0\,, \tag{17}$$

má její rovnice tvar

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \tag{18}$$

a diskriminant kvadratického mnohočlenu na levé straně rovnice (18) je

$$\begin{vmatrix} 2A_1A_2, & A_1B_2 + A_2B_1, & A_1C_2 + A_2C_1 \\ A_1B_2 + A_2B_1, & 2B_1B_2, & B_1C_2 + B_2C_1 \\ A_1C_2 + A_2C_1, & B_1C_2 + B_2C_1, & 2C_1C_2\,. \end{vmatrix} \tag{19}$$

Postupným užitím věty o vyjádření determinantu, který má v některém svém sloupci samé dvojčleny, součtem dvou determinantů, lze vyjádřit determinant (19) součtem osmi determinantů, jež jsou všechny rovny nule, takže podle věty 1 je kuželosečka singulární.

Splývají-li obě přímky, z nichž se kuželosečka skládá, lze jejich rovnicím dát takový tvar, že platí $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$. Označme tyto tři hodnoty po řadě A, B, C. Potom každý subdeterminant druhého stupně determinantu (19) má tvar

$$\begin{vmatrix} 2\alpha\pi & 2\alpha\varrho \\ 2\beta\pi & 2\beta\varrho \end{vmatrix}, \tag{20}$$

kde α, β a π, ϱ jsou dvě totožné nebo různé kombinace druhé třídy bez opakování z prvků A, B, C. Ale protože každý determinant tvaru (20) je rovný nule, je hodnost kuželosečky v tomto případě 1.

Je-li naopak kuželosečka singulární, je podle věty 1 její hodnost menší než 3, takže pro hodnosti h a h' soustavy rovnic (7) mohou nastat právě tři případy z důkazu věty 1. Nastane-li druhý případ, má kuželosečka jeden singulární bod, jehož spojnice s každým dalším jejím bodem leží celá na kuželosečce podle věty 6. Nemůže to však být dvojnásobná přímka kuželosečky, neboť jinak by hodnost h' kuželosečky musela být 1. Obsahuje tedy kuželosečka ještě další bod, jehož spojnice s jejím singulárním bodem je druhou přímkou, kterou kuželosečka obsahuje. Kuželosečka se tedy skládá ze dvou rovnoběžných přímek, jež se protínají v jejím singulárním bodě.

Nastane-li třetí případ, má kuželosečka singulární směr, takže s každým svým bodem obsahuje podle věty 7. celou přímku singulárního směru, která jím prochází. Tato přímka však není dvojnásobnou přímkou kuželosečky, protože její hodnost je 2. Obsahuje tedy kuželosečka ještě další bod mimo tuto přímku a s ním i celou přímku, která jím prochází a je s první přímkou rovnoběžná.

Konečně v prvním případě, kdy je hodnost kuželosečky 1, obsahuje kuželosečka celou přímku singulárních bodů a kromě ní již žádný bod, neboť pak by obsahovala ještě nejméně jednu další přímku, což není možné, protože její hodnost je 1.

Z tohoto důkazu plyne ještě další věta.

Věta 9. *Kuželosečka se skládá ze dvou různých přímek právě tehdy, je-li její hodnost 2. Tyto přímky jsou rovnoběžné, je-li hodnost (nerozšířené) matice soustavy rovnic (7) $h = 1$, a různoběžné, je-li tato hodnost $h = 2$.*

Přímka, jež spojuje body $\pi[\xi, \eta]$ a $P_0[x_0, y_0]$, vyjádřená parametricky rovnicemi (14), která není součástí kuželosečky (2), má s touto kuželosečkou nejvýše dva společné body, které odpovídají kořenům λ rovnice (15) různým od jedné, za předpokladu, že bod $\pi[\xi, \eta]$ neleží na kuželosečce.

Splynou-li takové dva kořeny rovnice (15), má přímka s kuželosečkou jediný společný bod, dvojnásobný průsečík. Tento případ nastane vždycky, když přímka prochází singulárním bodem kuželosečky, jak plyne z rovnice (15), zvolíme-li za bod P_0 právě tento singulární bod. Pro tuto vlastnost se nazývá singulární bod kuželosečky také jejím dvojnásobným bodem. Je však možné, že dvojnásobný průsečík přímky s kuželosečkou je regulárním bodem kuželosečky.

Definice 11. *Má-li přímka s kuželosečkou dvojnásobný průsečík v jejím regulárním bodě, nazývá se tečnou kuželosečky v tomto bodě a tento bod bodem dotyku (dotykovým bodem). Říkáme, že se tečna kuželosečky dotýká v příslušném bodě dotyku.*

Věta 10. *Rovnice tečny kuželosečky v jejím regulárním bodě $P_0[x_0, y_0]$ zní*

$$F(x, y; x_0, y_0) = 0 . \tag{21}$$

Důkaz. Bod $\pi[\xi, \eta]$ leží na tečně kuželosečky (2) v jejím regulárním bodě $P_0[x_0, y_0]$ právě tehdy, když rovnice (15) pro λ má dvojnásobný kořen nula. To však nastává právě tehdy, když souřadnice bodu π vyhovují rovnici (21).

Poznámka. Rovnice (21) vyjadřuje vždy přímku, neboť ji lze napsat ve tvaru

$$xF_1(x_0, y_0) + yF_2(x_0, y_0) + F_3(x_0, y_0) = 0 \tag{22}$$

a bod P_0 je regulární bod kuželosečky, takže aspoň jeden z koeficientů při x, y v rovnici (22) nebo její absolutní člen je různý od nuly. Není však možné, aby z těchto tří čísel byl různý od nuly právě jen absolutní člen rovnice (22), neboť vzhledem k platnosti identity (3), do níž za x, y dosadíme x_0, y_0, by pak bod P_0 nemohl ležet na kuželosečce.

Obraťme nyní pozornost k těm tečnám dané kuželosečky (2), které procházejí pevně zvoleným bodem ležícím mimo ni.

Definice 12. *Dvojice tečen vedených z bodu $P_0[x_0, y_0]$ ležícího mimo kuželosečku (2) k této kuželosečce, je množina všech takových bodů, jejichž spojnice s bodem P_0 buď tuto kuželosečku protíná ve dvojnásobném průsečíku nebo je její asymptotou.*

Poznámka. Dvojice tečen právě definovaná je tedy čára složená nejen ze všech tečen a asymptot kuželosečky (2) procházejících bodem P_0, nýbrž i ze spojnic bodu P_0 se všemi singulárními body kuželosečky.

Věta 11. *Dvojice tečen vedených ke kuželosečce (2) z bodu P_0 mimo ni ležícího má rovnici*

$$[F(x, y; x_0, y_0)]^2 - F(x, y) \, . \, F(x_0, y_0) = 0 . \tag{23}$$

Důkaz. Každý bod na spojnici bodu $P_0[x_0, y_0]$ ležícího mimo kuželosečku (2) s dalším bodem $\pi[\xi, \eta]$, lze vyjádřit — až na bod P_0 — parametrickými rovnicemi

$$x = \frac{\xi - \lambda x_0}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{\eta - \lambda y_0}{1 - \lambda} . \tag{24}$$

Dosazením výrazů (24) do rovnice kuželosečky dostaneme podmínku, které vyhovují parametry průsečíků ve tvaru

$$F(x_0, y_0) \, . \, \lambda^2 - 2F(\xi, \eta; x_0, y_0) \, . \, \lambda + F(\xi, \eta) = 0 . \tag{25}$$

To je kvadratická rovnice pro λ, která má dva kořeny různé nebo splývající. Její diskriminant je $[F(\xi, \eta; x_0, y_0)]^2 - F(\xi, \eta) \,.\, F(x_0, y_0)$; je-li tedy

$$[F(\xi, \eta; x_0, y_0)]^2 - F(\xi, \eta) \,.\, F(x_0, y_0)] = 0\,, \tag{26}$$

má rovnice (25) splývající kořeny, což znamená, že bod π leží na dvojici tečen.

Naopak leží-li bod π na dvojici tečen, splynou oba kořeny rovnice (25), takže platí (26), což znamená, že bod vyhovuje rovnici (23).

Věta 12. *Dvojice tečen vedených ku kuželosečce* (2), *jejíž hodnost je vyšší než jedna, z bodu P_0, který leží mimo ni, je singulární kuželosečka s dvojnásobným bodem v bodě P_0.*

Důkaz. Označme koeficienty u jednotlivých členů v rovnici (23) analogicky jako u (2), ale velkými písmeny, takže rovnice (23) má tvar

$$A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 + 2B_1x + 2B_2y + C = 0\,, \tag{27}$$

kde je

$$\begin{aligned}
A_{11} &= [F_1(x_0, y_0)]^2 - a_{11}F(x_0, y_0)\,,\\
A_{12} &= F_1(x_0, y_0) \,.\, F_2(x_0, y_0) - a_{12}F(x_0, y_0)\,,\\
A_{22} &= [F_2(x_0, y_0)]^2 - a_{22}F(x_0, y_0)\,,\\
B_1 &= F_1(x_0, y_0) \,.\, F_3(x_0, y_0) - b_1F(x_0, y_0)\,,\\
B_2 &= F_2(x_0, y_0) \,.\, F_3(x_0, y_0) - b_2F(x_0, y_0)\,,\\
C &= [F_3(x_0, y_0)]^2 - c \,.\, F(x_0, y_0)\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Rovnice (27) vyjadřuje kuželosečku, až na případ, kdy všechna tři čísla A_{11}, A_{12}, A_{22} jsou rovna nule; potom hodnost matice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & F_1(x_0, y_0) \\ a_{12} & a_{22} & F_2(x_0, y_0) \\ F_1(x_0, y_0) & F_2(x_0, y_0) & F(x_0, y_0) \end{Vmatrix} \tag{29}$$

je rovna jedné, neboť poslední prvek $F(x_0, y_0)$ této matice je různý od nuly (bod P_0 leží mimo kuželosečku (2)), ale každý determinant druhého stupně vybraný z této matice je nulový.

Upravíme-li však matici (29) tak, že od jejího posledního sloupce odečteme první znásobený x_0 a druhý znásobený y_0 a pak ještě od jejího posledního řádku první znásobený x_0 a druhý znásobený y_0 (čímž se její hodnost nezmění), dostaneme právě matici determinantu (9), jejíž hodnost je hodností kuželosečky (2) a je tedy — podle předpokladu — nižší než jedna.

Že konečně bod P_0 je singulárním bodem kuželosečky (27) se přesvědčíme dosazením jeho souřadnic x_0, y_0 a výrazů (28) do rovnic

$$A_{11}x + A_{12}y + B_1 = 0\,,\quad A_{12} + A_{22}y + B_2 = 0\,,$$
$$B_1x + B_2y + C = 0\,, \tag{30}$$

jež jsou pro bod P_0 splněny.

Poznámka. Dvojice tečen vedených k dané kuželosečce z libovolného bodu P_0 mimo ni ležícího, je tedy — až na případ, že hodnost dané kuželosečky je jedna — kuželosečka složená ze dvou přímek, jež obě procházejí bodem P_0. Je to tedy skutečně dvojice přímek a to tečen, asymptot nebo přímek procházejících dvojnásobným bodem dané kuželosečky a bodem P_0.

Definice 13. *Bod $P_0[x_0, y_0]$ ležící mimo danou regulární kuželosečku* (2) *se nazývá vnějším nebo vnitřním jejím bodem podle toho, zda dvojice tečen vedených z něho k této kuželosečce je reálná nebo imaginární.*

Rovnice (21) vyjadřuje přímku i tehdy, když bod P_0 leží mimo kuželosečku (2), jen když jeho souřadnice nevyhovují zároveň prvním dvěma z rovnic (7). Zavádíme proto tuto definici.

Definice 14. *Přímka, která má rovnici* (21), *se nazývá polára bodu* P_0 *vzhledem ke kuželosečce* (2).

Polára regulárního bodu P_0 kuželosečky (2) vzhledem k této kuželosečce, je tedy tečna kuželosečky (2) v tomto jejím bodě. Polára bodu P_0 ležícího mimo kuželosečku má důležitou vlastnost, kterou vyjadřuje tato věta.

Věta 13. *Polára bodu* P_0 *ležícího mimo kuželosečku vzhledem k této kuželosečce (pokud je definována) je geometrické místo bodů, které 1. na přímkách procházejících bodem* P_0 *a protínajících kuželosečku ve dvou různých průsečících oddělují* P_0 *harmonicky od těchto průsečíků; 2. na přímkách procházejících bodem* P_0 *a protínajících kuželosečku ve dvojnásobném průsečíku leží v tomto dvojnásobném průsečíku; 3. na přímkách procházejících bodem* P_0 *a protínajících kuželosečku v jediném jednoduchém průsečíku vytínají s bodem* P_0 *úsečku, jež je tímto průsečíkem s kuželosečkou půlena.*

Důkaz. Nechť bod $P_0[x_0, y_0]$ leží mimo kuželosečku (2). Průsečíky přímky procházející bodem P_0 a bodem $\pi[\xi, \eta]$ s kuželosečkou (2), jsou vyjádřeny výrazy (24), do nichž za λ dosadíme některý kořen rovnice (25).

Tyto průsečíky oddělují body P_0 a π harmonicky právě tehdy, kdy součet jejich dělících poměrů, tedy součet kořenů $\lambda_1 + \lambda_2$ rovnice (25), je roven nule, pokud tyto kořeny jsou od sebe různé a žádný z nich není rovný jedné. Součet kořenů kvadratické rovnice je však rovný nule právě tehdy, když vymizí její lineární člen, což nastane právě tehdy, když bod π leží na přímce (21).

Splývají-li oba kořeny λ rovnice (25), potom bod π leží na přímce (21) právě tehdy, když oba tyto kořeny jsou nulové. Protože však bod π odpovídá nulové hodnotě parametru, splývá v tomto případě s dvojnásobným průsečíkem přímky $P_0\pi$ s kuželosečkou.

Je-li konečně jeden z kořenů λ rovnice (25) rovný jedné, chybí průsečík přímky s kuželosečkou, který mu odpovídá, a bod π leží na přímce (21) právě tehdy, když součet kořenů rovnice pro λ je rovný nule, tedy právě když její druhý kořen je -1. Jemu pak odpovídá střed úsečky vyťaté na přímce $P_0\pi$ body P_0 a π.

Poznámka. Oba průsečíky spojnice bodů P_0 a π s kuželosečkou (2) chybět nemohou, neboť v tom případě by rovnice (25) pro λ musela mít dvojnásobný kořen 1, tedy její lineární člen by nemohl vymizet, takže bod π by nemohl ležet na přímce (21).

Věta 14. *Bod* P_0 *leží na své poláře vzhledem ke kuželosečce* (2) *právě tehdy, když je jejím bodem regulárním.*

Důkaz. Leží-li bod $P_0[x_0, y_0]$ na své poláře vzhledem ke kuželosečce (2), vyhovují jeho souřadnice rovnici (21), což podle identity (4) znamená, že platí

$$F(x_0, y_0) = 0\,, \tag{31}$$

takže bod P_0 leží na kuželosečce (2).

Naopak je-li bod P_0 regulárním bodem kuželosečky (2), existuje vždy jeho polára — je to tečna této kuželosečky s bodem dotyku v bodě P_0 — a ta bodem P_0 prochází.

Věta 15. *Leží-li ze dvou bodů P_1 a P_2 jeden na poláře druhého vzhledem k dané kuželosečce a existuje-li jeho polára vzhledem k této kuželosečce, leží na ní druhý z těchto bodů.*

Důkaz. Leží-li bod $P_1[x_1, y_1]$ na poláře bodu $P_2[x_2, y_2]$ vzhledem ke kuželosečce (2), platí rovnice

$$F(x_1, y_1; x_2, y_2) = 0\,; \tag{32}$$

ta však znamená i naopak, že bod P_2 leží na poláře bodu P_1 vzhledem ke kuželosečce (2), pokud tato polára je definována.

Definice 15. *Dva body, z nichž každý leží na poláře druhého vzhledem k dané kuželosečce, se nazývají sdružené póly této kuželosečky; jejich poláry se nazývají sdružené poláry příslušné kuželosečky.*

Kuželosečka (2) přiřazuje každému bodu $P_0[x_0, y_0]$ poláru (22), pokud jeho souřadnice neanulují zároveň oba dva první adjugované mnohočleny (3) této kuželosečky, tedy pokud jeho souřadnice nevyhovují zároveň prvním dvěma z rovnic (7).

Definice 16. *Bod S, jehož souřadnice vyhovují prvním dvěma z rovnic* (7), *se nazývá střed kuželosečky* (2).

Věta 16. *Střed S kuželosečky je jejím středem souměrnosti.*

Důkaz. Provedeme-li transformaci souřadnic posunutím tak, aby nový počátek byl v bodě $S[m, n]$ a jinak se nic nezměnilo, budou transformační rovnice znít

$$x = x' + m\,, \quad x = y' + n \tag{33}$$

a rovnice dané kuželosečky v nových souřadnicích (čárkovaných) bude mít tvar

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2F_1(m, n)\,x' + 2F_2(m, n)\,y' + F(m, n) = 0\,. \tag{34}$$

Vyhovují-li souřadnice m, n bodu S prvním dvěma z rovnic (7), zbudou v rovnici (34) kuželosečky po transformaci (33) jen členy kvadratické a člen absolutní, tedy jen členy sudého stupně. Ty však nabývají téže hodnoty pro souřadnice libovolných takových dvou bodů, jejichž nové čárkované souřadnice jsou čísla opačná, tedy bodů středově souměrně sdružených podle bodu S.

Věta 17. *Kuželosečka nemá buď žádný střed nebo má jeden střed, nebo má středů nekonečně mnoho a ty pak vyplňují celou přímku. Poslední případ může nastat jen u kuželosečky singulární.*

Důkaz. První dvě rovnice soustavy (7) označme (7.). Hodnost matice soustavy (7_0) nechť je h_0, hodnost matice rozšířené soustavy (7_0) nechť je h'_0. Mohou nastat tyto případy:

$$1.\ h_0 = 1,\ h'_0 = 1, \quad 2.\ h_0 = 2,\ h'_0 = 2, \quad 3.\ h_0 = 1,\ h'_0 = 2.$$

V prvním případě má kuželosečka středů nekonečně mnoho a ty vyplňují přímku vyjádřenou takovou z rovnic soustavy (7_0), která má aspoň jeden nenulový koeficient; hodnost kuželosečky h' může však být nejvýše o jednu vyšší než h'_0, tedy kuželosečka je singulární.

Ve druhém případě má soustava (7_0) jediné řešení, kuželosečka má jediný střed.

Ve třetím případě nemá soustava (7_0) žádné řešení, kuželosečka nemá žádný střed.

Definice 17. *Kuželosečka se nazývá středová, má-li jeden střed; jinak se nazývá nestředová.*

Věta 18. *Kuželosečka je nestředová právě tehdy, když determinant*

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{35}$$

je rovný nule; jinak je středová.

Důkaz plyne z definice 17 a z důkazu věty 17.

Definice 18. *Nestředová regulární kuželosečka se nazývá parabola; středová regulární kuželosečka se nazývá elipsa, je-li střed jejím vnitřním bodem a hyperbola, je-li střed jejím vnějším bodem.*

Věta 19. *Regulární kuželosečka je elipsa, je-li determinant* (35) *kladný, parabola, je-li rovný nule a hyperbola, je-li záporný.*

Důkaz. Pro parabolu je věta 19 již zahrnuta ve větě 18.

Jde-li o regulární kuželosečku, lze transformací soustavy souřadnic posunutím uvést její rovnici, jak plyne z důkazu věty 16, na tvar

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + d = 0\,, \tag{36}$$

kde koeficienty a_{11}, a_{12}, a_{22} se transformací soustavy souřadnic nezměnily a d je nějaké číslo různé od nuly. Rovnice dvojice tečen vedených ke kuželosečce (36) z počátku jejího středu, zní podle věty 11

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \tag{37}$$

a vyjadřuje dvojici různých přímek procházejících počátkem, a to reálných, je-li $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, a imaginárních komplexně sdružených, je-li $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Poznámka. Dvojice tečen vedených k regulární středové kuželosečce z jejího středu, je dvojice jejích asymptot.

Střed kuželosečky je bod, který půlí všechny tětivy kuželosečky, jež jím procházejí; to plyne z věty 16.

Zvolme si naopak pevně směr tětiv a zkoumejme, co je geometrickým místem středů tětiv dané kuželosečky tohoto směru. Abychom u každé přímky dostali dva průsečíky s kuželosečkou, je třeba zvolit za směr přímek, na nichž tětivy leží, jiný směr než asymptotický.

Věta 20. *Geometrické místo středů tětiv, které na přímkách rovnoběžných s daným vektorem* $\mathbf{V}(v_1, v_2)$, *jenž nemá asymptotický směr kuželosečky (2), vytíná tato kuželosečka, je přímka*

$$v_1F_1(x, y) + v_2F_2(x, y) = 0\,. \tag{38}$$

Důkaz. Přímka rovnoběžná s vektorem $\mathbf{V}(v_1, v_2)$, která prochází bodem $\pi[\xi, \eta]$ má parametrické rovnice

$$x = \xi + v_1t\,, \quad y = \eta + v_2t\,. \tag{39}$$

Její průsečíky s kuželosečkou (2) odpovídají takovým hodnotám parametru t, pro které platí

$$\begin{aligned} a_{11}(\xi + v_1t)^2 + 2a_{12}(\xi + v_1t)(\eta + v_2t) + a_{22}(\eta + v_2t)^2 + \\ + 2b_1(\xi + v_1t) + 2b_2(\eta + v_2t) + c = 0\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Rozvedeme-li výraz na levé straně této rovnice a seřadíme sestupně podle mocnin t, dostaneme

$$(a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2)\,.\,t^2 + 2[v_1F_1(\xi, \eta) + v_2F_2(\xi, \eta)]\,.\,t + F(\xi, \eta) = 0\,. \tag{41}$$

Bod $\pi[\xi, \eta]$, který odpovídá hodnotě parametru $t = 0$, je středem tětivy, na níž leží, právě když její koncové body, tedy průsečíky příslušné přímky s kuželosečkou, odpovídají opačným hodnotám parametru t, tedy právě když kvadratická rovnice (41) pro t má opačné kořeny. To však nastává právě tehdy, když koeficient při jejím lineárním členu je nulový, tedy právě když bod π leží na přímce (38).

Poznámka. Má-li přímka (39) s kuželosečkou (2) dvojnásobný průsečík, vytíná na ní kuželosečka tětivu, jež se redukuje na jediný bod, který pokládáme za její střed.

Definice 19. *Přímka, jež půlí tětivy, které na přímkách daného směru, který není asymptotický, vytíná daná kuželosečka, se nazývá průměrem této kuželosečky sdruženým s daným směrem.*

Věta 21. *Každý průměr středové kuželosečky prochází jejím středem.*

Důkaz. Každý bod, jehož souřadnice vyhovují prvním dvěma rovnicím ze soustavy (7), leží i na přímce (38); tedy střed kuželosečky leží na každém jejím průměru.

Věta 22. *Je-li jeden ze dvou průměrů středové kuželosečky sdružený se směrem druhého, je i druhý sdružený se směrem prvního. Takové dva průměry se nazývají sdružené.*

Důkaz. Směr přímky (38) je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{W}(a_{12}v_1 + a_{22}v_2, -a_{11}v_1 - a_{12}v_2)$. Průměr sdružený se směrem vektoru $\boldsymbol{W}$ je pak — opět podle rovnice (38), — rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{V}$, neboť determinant (35) je podle věty 18 u středových kuželoseček různý od nuly.

Věta 23. *Nestředová kuželosečka má jediný dvojnásobný asymptotický směr. Je to směr všech jejích průměrů, jež jsou tedy navzájem rovnoběžné; proto se v tomto případě asymptotický směr nazývá také směr průměrový.*

Důkaz. Je-li kuželosečka (2) nestředová, je podle věty 18 výraz na levé straně rovnice (16) úplný čtverec, takže oba asymptotické směry kuželosečky splývají v jediný dvojnásobný asymptotický směr. S tímto směrem — je to směr vektorů $\boldsymbol{V}_1(a_{12}, -a_{11})$ a $\boldsymbol{V}_2(a_{22}, -a_{12})$, z nichž nejvýše jeden může být nulový — je pak rovnoběžná každá přímka (38).

Věta 24. *Každou regulární kuželosečku lze při vhodné volbě soustavy souřadnic vyjádřit buď rovnicí*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + c = 0\,, \tag{42}$$

je-li to kuželosečka středová, nebo rovnicí

$$a_{22}y^2 + 2b_1x = 0\,, \tag{43}$$

je-li to kuželosečka nestředová. Přitom žádný z koeficientů v rovnicích (42), (43), *tedy žádné z čísel* a_{11}, a_{22}, b_1, c *není rovno nule.*

Důkaz. Zvolíme-li v případě regulární středové kuželosečky soustavu souřadnic tak, aby osa x a osa y ležely v jejích sdružených průměrech, je podle rovnice (38) v rovnici kuželosečky (2) $a_{12} = b_1 = b_2 = 0$. Žádný další koeficient nemůže již být nulový, neboť daná kuželosečka je regulární.

Zvolíme-li v případě regulární nestředové kuželosečky soustavu souřadnic tak, aby osa y byla tečnou kuželosečky a osa x průměrem kuželosečky sdruženým se směrem osy y, dostaneme v rovnici kuželosečky (2) jednak podle rovnice (22) $b_2 = c = 0$, jednak podle rovnice (38) $a_{12} = b_2 = 0$. Protože jde o nestředovou kuželosečku, je podle věty 18 i $a_{11} = 0$. Ubývající koeficient b_1 nemůže být nulový, protože daná kuželosečka je regulární.

Věta 25. *Regulární kuželosečka* (42) *je elipsa, mají-li koeficienty a_{11}, a_{22} stejná znaménka, a to imaginární, má-li totéž znaménko i c a reálná, má-li c opačné znaménko. Mají-li a_{11}, a_{22} opačná znaménka, je kuželosečka* (42) *hyperbola, jež je vždy reálná. Konečně regulární kuželosečka* (43) *je parabola, jež je rovněž vždy reálná.*

Důkaz. Žádný reálný bod neobsahuje kuželosečka (42) právě jen tehdy, když a_{11}, a_{22} a c mají totéž znaménko. Potom i a_{11}, a_{22} mají totéž znaménko, takže kuželosečka (42) je podle věty 19 elipsa a to imaginární.

V ostatních případech obsahuje kuželosečka (42) vždy reálné body regulární a podle věty 19 je to elipsa, mají-li a_{11}, a_{22} totéž znaménko; jinak je to hyperbola.

Kuželosečka (43) obsahuje vždy regulární reálné body, neboť ke každému reálnému y existuje vždy reálné x tak, že bod o souřadnicích $[x_0, y_0]$ leží na této kuželosečce; podle věty 19 je kuželosečka (43) parabola.

Poznámka 1. Všechny reálné body hyperboly lze rozdělit do dvou oddělených množin, jak je patrno z rovnice (42), v níž nechť na příklad $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$, $c < 0$. K reálné souřadnici x pak existuje reálná souřadnice y téhož bodu na hyperbole právě tehdy, když $a_{11}x^2 + c \geqq 0$, tedy když je buď $x \leqq -\sqrt{-\frac{c}{a_{11}}}$ nebo $x \geqq \sqrt{-\frac{c}{a_{11}}}$, takže mezi rovnoběžnými přímkami $x = -\sqrt{-\frac{c}{a_{11}}}$ a $x = \sqrt{-\frac{c}{a_{11}}}$ neleží žádný reálný bod hyperboly. Obě oddělené části se někdy nazývají větve hyperboly.

Poznámka 2. Protože všechny přímky asymptotického směru dané paraboly (43) — jsou to její průměry $y - d = 0 =$ — s ní mají společný právě jeden bod, nemá parabola žádnou asymptotu.