Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Petr Simon

Bernard Bolzano a teorie dimenze

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 26 (1981), No. 5, 248--258

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138739

aby byl opatřen na tu dobu všemi prostředky, jichž by si opatřil, kdyby stejnou práci... věnoval jen pro sebe.

Uvědomíme-li si, že teprve v roce 1848 – tedy po více než 15 letech – zrušil v Rakousku sněm robotu, že v Bolzanově době byly feudální výsady nedotknutelné, že formy vykořisťování, jichž byl v té době svědkem, byly nepředstavitelné, dovedeme ocenit, že ač neznal podstatu obrovských nerovností ve společnosti a nemohl asi dovést vymezit prostředky, které by tyto nerovnosti zamezily, snažil se postihnout tyto společenské problémy a formulovat alespoň kodex hlavních zákonů, které by jim měly čelit. Tím se zařadil mezi pronikavé sociální myslitele své doby.

Přesto přese všecko hlavní váha Bolzanova vědeckého významu tkví v jeho matematickém díle, které stále čeká na své úplné zhodnocení a zařazení do vývojového proudu matematiky v 19. století. A zde by měli naši matematici navázat na dobrou tradici generace meziválečné, které se podařilo zčásti poodhalit velikost Bolzanova matematického díla.

Bernard Bolzano a teorie dimenze

Petr Simon, Praha

Píšeme rok 1981. Teorie dimenze je rozvinutou teorií, bez které si nelze představit žádnou učebnici obecné topologie. Otevřeme-li namátkou některou z nich, můžeme číst:

Definice. Buď X topologický prostor. Malá induktivní dimenze $\operatorname{ind} X$ prostoru X je zavedena následujícím předpisem:

$\operatorname{ind} X = -1$ tehdy a jen tehdy, když $X = \emptyset$;

$\operatorname{ind} X \leqq n$ tehdy a jen tehdy, když pro každý bod $x \in X$ a pro každé okolí U bodu x existuje otevřené okolí V tak, že $x \in V \subseteq U$ a $\operatorname{ind} \operatorname{bd} V \leqq n - 1$ (zde $\operatorname{bd} V = \overline{V} \cap \overline{X - V} =$ hranice množiny V);

$\operatorname{ind} X = n$ tehdy a jen tehdy, když $\operatorname{ind} X \leqq n$ a není pravda, že $\operatorname{ind} X \leqq n - 1$;

$\operatorname{ind} X = +\infty$ tehdy a jen tehdy, když nerovnost $\operatorname{ind} X \leqq n$ neplatí pro žádné $n = -1, 0, 1, \ldots$.

Dočteme se rovněž, že malá induktivní dimenze se nazývá též Mengerovou-Urysonovou dimenzí s odkazy na Urysonovu práci z roku 1922 a Mengerovu z roku 1923 ([6], [4]). Má-li kniha, kterou čteme, trochu historických poznámek, zpravidla se autor neopomene zmínit, že induktivní definici dimenze naznačil už Poincaré v roce 1912 a jinou induktivní definici (takzvané velké induktivní dimenze) dal Brouwer 1913 ([5], [2]).

Je tedy nasnadě domněnka, že počátky teorie dimenze se kryjí s počátkem našeho století. Přiznávám se, že jsem ještě tak asi před rokem této domněnce věřil. Pak se mi však dostal do ruky Johnsonův článek o geometrických výzkumech Bernarda Bolzana [3], který mne vyprovokoval ke studiu Bolzanových *Geometrických prací* [1], a nevycházel jsem z překvapení. Účelem těchto řádků je podělit se o toto překvapení se čtenářem, a to tak, že ukáži, jak mnoho Bernard Bolzano o dimenzi věděl téměř sto let předtím, než se teorie dimenze oficiálně narodila.

Dříve než přikročím k výkladům pojmů, které Bolzano zavedl, spokojme se prozatím s konstatováním, že tento matematik vynaložil nemalé úsilí, aby definoval dimenzi. Bylo to v době, kdy nebyla teorie množin, kdy matematika pozůstávala v podstatě jen ze čtyř disciplín – z analýzy, algebry, geometrie a z teorie pravděpodobnosti. V této souvislosti se ovšem musí vynořit otázka: Co vlastně vedlo Bolzana k tomuto výzkumu, proč považoval za účelné nebo za nutné podobné pojmy definovat, proč se zabýval základy obecné topologie v době, kdy obecná topologie ještě ani neexistovala? Domnívám se, že odpovědí na tuto otázku musíme začít.

Podívejme se blíže na Bolzanovo nazírání na matematiku. Následující citát dává zcela jasnou představu.

Erstlich stellte ih mir die Regel auf, daß ich mich durch keine Evidenz eines Satzes von der Verbindlichkeit los zähle, noch einen Beweis für denselben aufzusuchen, – so lange, bis ich deutlich einsähe, daß und warum sich durchaus kein Beweis fernerhin fordern lasse. Wenn es wahr ist, daß überall deutliche, richtige, in der vollkommensten Ordnung verbundne Vorstellungen leichter zu fassen sind, als hie und da noch verworne und unrichtige: so muß man das Bestreben alle Wahrheiten der Mathematik bis auf ihre letzten Gründe zu entwickeln, und dadurch allen Begriffen dieser Wissenschaft die möglichste Deutlichkeit, Berichtigung und Ordnung zu verschaffen.

(Nejprve jsem si stanovil pravidlo, že nejsem žádnou očividností věty zbaven povinnosti vyhledat pro ni ještě jeden důkaz, – tak dlouho, až zřetelně nahlédnu, že a proč se nadále žádným důkazem ověřit nedá. Pokud je pravda, že všeobecně jasné, správné a dokonale uspořádané pojmy jsou snáze k pochopení než tu a tam ještě zmatené a nesprávné: musíme usilovat rozvíjet všechny pravdy matematiky až po její nejzazší základy, a tím všem pojmům této vědy dát největší možnou zřetelnost, oprávněnost a pořádek.)

Zkusme si tedy představit Bolzana s jeho vysokými nároky na přesnost matematického uvažování, když vidí známý důkaz z Euklidových základů, že existuje rovnostranný trojúhelník o dané straně AB: Sestrojme kružnici S_1 o středu A a poloměru AB a kružnici S_2 o středu B a poloměru AB. Jejich průsečík C je třetí vrchol hledaného trojúhelníka. Který z Euklidových postulátů a axiómů zaručuje existenci bodu C? Po pravdě řečeno, tento problém trápil matematiky už dříve. Všeobecně se tušilo, že existence tohoto bodu plyne z jakési mystické vlastnosti kružnice, které dnes říkáme souvislost. Avšak co je to souvislost? Je to vlastnost bodů ležících na kružnici, vlastnost kružnice jako celku, kryje se vlastnost „býti souvislý“ s vlastností „obsahovat mnoho bodů“? Podobné otázky zůstávaly v Bolzanově době bez odpovědi.

Zde je na místě podotknout, že na mladého Bolzana měla hluboký vliv rozsáhlá monografie A. G. Kästnera, *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv.* Byla to základní učebnice matematiky, která sloužila studentům po celou druhou polovinu osmnáctého století. Bolzano si jí velice vážil, neboť v ní nacházel důkazy prováděné s korektností v té době zcela neobvyklou. Geometrickou část své knihy budoval Kästner v duchu Euklidových *Základů* od definic; samozřejmě i Kästner potřeboval objasnit, v čem spočívá vlastnost „být kontinuem" u euklidovských objektů. Vyřešil to takto:

Eine stetige Grösse (continuum) heisst, deren Theile alle so zusammenhängen, dass, so einer aufhört, gleich der andere anfängt, und zwischen des einen Ende und des andern Anfange nichts ist, das nicht zu dieser Grösse gehörte.

(Spojitá kvantita (kontinuum) je to, čeho všechny části jsou tak spojeny, že když jedna skončí, okamžitě druhá začíná, a mezi jedním koncem a druhým začátkem není nic, co by nenáleželo do této kvantity.)

Mohl být s takovouhle definicí Bolzano spokojen? Jistěže ne, ostatně Bolzano svou nespokojenost se současným stavem základů geometrie vyjádřil dostatečně lapidárně v *Beyträge*:

Hier mangelt es zur Stunde noch an einer bestimmten Erklärung der wichtigen Begriffe: Linie, Fläche, Solid.

(Dosud chybějí přesné definice nejdůležitějších pojmů: čáry, plochy, tělesa.)

(Všimněte si: v seznamu postrádáme bod. Vyžadovalo by delší odbočku, než bychom zjistili, že Bolzano považoval bod za primitivní pojem a že věděl, že primitivní pojmy definovat nelze.)

Bolzano tedy jasně viděl mezery v samotných základech geometrie a podobně jako mnoho dalších matematiků jeho doby považoval za nutné tyto nedostatky odstranit, ba co více, cítil tuto problematiku jeho stěžejní. Dokonce ve své první publikované práci, v *Betrachtungen,* buduje teorii přímky v pevné víře, že postulát o rovnoběžkách dosud nikdo nedokázal jen z toho prostého důvodu, že nikdo pořádně neví, co je to vlastně přímka! A byla to právě otázka přesného vymezení základních geometrických pojmů, která ho přirozeným způsobem přivedla ke studiu topogie roviny a prostoru.

Roku 1817 publikuje Bolzano *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung,....* V této práci, která se zabývá integrálním počtem, nikoli geometrií, nalezneme několik definic, nad nimiž stojí za to se zamyslit.

Raumding heißt überhaupt jedes System (jeder Inbegriff) von Puncten (sie mögen in endlicher oder unendlicher Menge vorhanden seyn).

(Prostorovým objektem se nazývá obecně každý systém (každý celek) bodů (může se skládat z konečného nebo nekonečného množství).)

Bolzanova geometrie začíná tedy v teorii množin: dána je množina bodů, kterou budeme studovat dále. Prostor tedy není prázdnota, ve které body sestrojujeme, vyhledáváme, a to vždy jen v konečném počtu, jako u Euklida; nikoli, všechny body prostoru jsou dány předem a najednou, všechny jsou přístupné našemu zkoumání.

Ein Raumding, zu dessen jedem Puncte es anzufangen von einer gewissen Entfernung *für alle kleineren abwärts, wenigstens einen, und höchstens nur eine endliche Menge von Puncten als Nachbarn gibt, heißt eine Linie überhaupt.*

(Prostorový objekt, jehož každý bod má vlastnost, že má v každé vzdálenosti menší než jistá daná vzdálenost alespoň jeden bod a nejvýše konečnou množinu bodů jako sousedy, se nazývá obecná čára.)

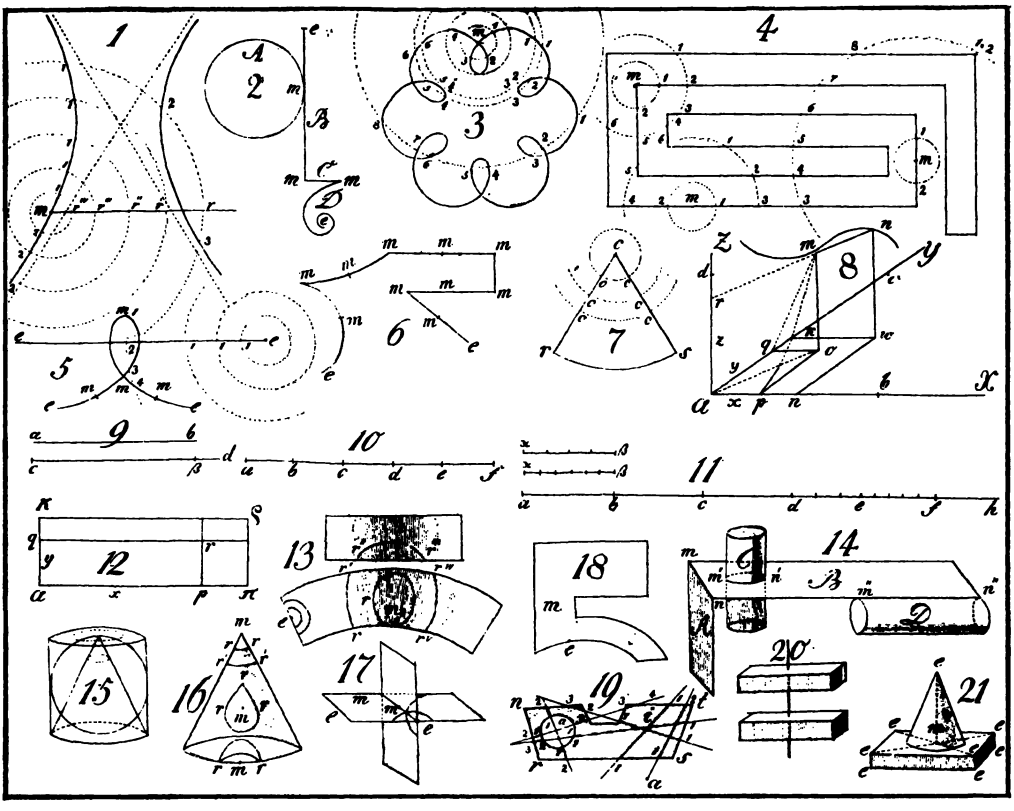
Vzdálenost (nedefinovanou v *Die drey Probleme*) zavedl Bolzano již roku 1804 v *Betrachtungen*, rovněž tak pojem sousedního bodu, souseda. V dnešní symbolice, je-li (X, ϱ) metrický prostor, $x \in X$ a ε kladné reálné číslo, pak $\{y \in X : \varrho(x, y) = \varepsilon\}$ je množina sousedů bodu x ve vzdálenosti ε. Bolzano se sice o metrice nikde explicite nezmiňuje, avšak jiné než metrické prostory neuvažoval. Jeho definice vzdálenosti v *Betrachtungen* je velice obecná, ale smysluplná se stává teprve v kontextu metrického prostoru. Kromě toho aplikace svých pojmů nacházel Bolzano pouze v R^3 s Euklidovskou metrikou.

Proto za odpovídající vystižení předchozí definice dnešní formou považuji tento zápis:

Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá obecná čára, jestliže $(\forall x \in X)(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0)(\exists k > 0)\, \{y \in X : \varrho(x, y) = \varepsilon\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

Protože však $\{y \in X : \varrho(x, y) = \varepsilon\}$ není nic jiného než $bd\, B_\varepsilon(x)$, hranice sférického

Obr. 1



okolí o středu x a poloměru ε, můžeme další definice z *Die drey Probleme*, které už nebudu citovat, zapsat takto:

Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá obecnou plochou, jestliže $(\forall x \in X)(\exists \varepsilon_0 > 0)$ $(\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0)(\exists k > 0)$ $bd\, B_\varepsilon(x) = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k$, kde všechny L_i jsou navzájem oddělené obecné čáry.

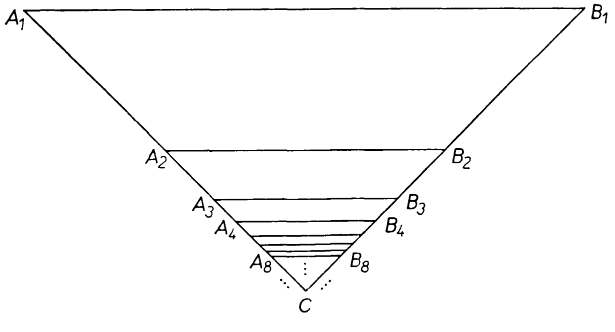
Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá obecné těleso, jestliže $(\forall x \varepsilon X)(\exists\, \varepsilon_0 \geqq 0)$ $(\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0)(\exists S \neq \emptyset)$ $bdB_\varepsilon(x) \supseteq S$, kde S je obecná plocha.

Zkuste si sami představit nějaký typický jednorozměrný, dvojrozměrný nebo třírozměrný objekt v R^3. Určitě bude těmito definicemi zahrnut. Anebo, když již víte, co považoval Bolzano v roce 1817 za čáru, plochu a těleso, prohlédněte si pozorně reprodukci jeho obrázku (obr. 1).

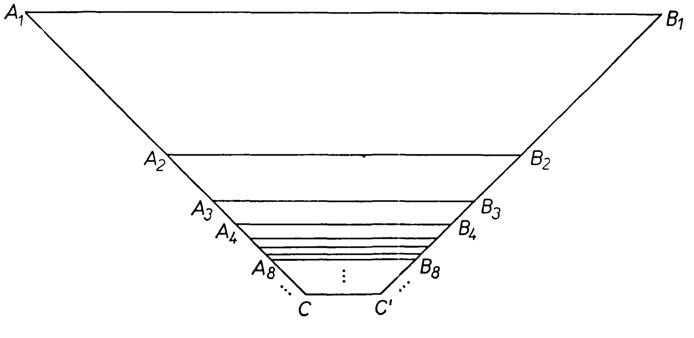
Z dnešního pohledu lze ovšem mnohé namítat. Hlavní námitky jsou nejspíše tyto tři:

Za prvé. Na obr. 2 je rovinný útvar, který musíme klasifikovat jako obecnou čáru. Stačí však nepatrná změna (obr. 3), abychom dostali objekt, který intuitivně musíme zase považovat za čáru, jenže obecná čára ve smyslu Bolzanovy definice to není — všechna dostatečně malá okolí libovolného bodu úsečky CC' mají nekonečnou hranici. Přitom, odstraníme-li úsečku CC', to, co zbude, bude čarou. Bolzano si tento defekt svých definic uvědomil o několik let později: v roce 1817 však rozdíl mezi množinou konečnou a množinou dimenze nula ještě neviděl. Příklady analogické povahy ve vyšších dimenzích najde čtenář snadno sám.

Za druhé. Formulace všech tří definic znemožňuje Bolzanovi uvažovat o dimenzi útvarů, které nejsou v dimenzi homogenní. Například disjunktní sjednocení vnitřku kruhu a úsečky nemá dimenzi vůbec definovanou. Těžko říci, proč Bolzano tuto mož-



Obr. 2



Obr. 3

nost neuvažoval – vždyť by šlo jenom o drobnou formální změnu. Snad je to tím, že Bolzano své definice aplikuje na křivky a plochy zadané soustavou rovnic, tedy v situacích, kdy skutečně – alespoň zpravidla – dostáváme objekty v dimenzi homogenní. S tímto nedostatkem se Bolzano nevypořádal ani později.

Třetí slabina Bolzanových dfinic spočívá v omezení se na sférická okolí. Zaměníme-li na obr. 2 všechny úsečky A_iB_i oblouky o středu C a o poloměru CA_i, stane se bod C bodem, jehož libovolně malá sférická okolí mohou mít dvoubodovou hranici právě tak dobře jako nekonečnou a souvislou; záleží pouze na volbě poloměru. Takto změněný útvar proto nemůže být ani čára, ani plocha v Bolzanově pojetí. Lze jistě namítnout, že tato vlastnost Bolzanovy dimenze je slabinou pouze v určité interpretaci: považujeme-li dimenzi za topologický invariant, pak ano; chceme-li od dimenze, aby byla pouze invariantem při izometrických zobrazeních, potom ovšem ne. Faktem však zůstává, že ani tato, ani pozdější Bolzanova dimenze topologickým invariantem není.

Dříve než si ukážeme, jak Bolzano své definice precizoval v pozdějších letech, podívejme se ještě jednou do *Die drey Probleme*:

Ein Raumding, dessen jeder Theil, der sich nach eben gegebener Erklärung als Linie ansehen läßt, mit dem noch übrigen Theile, der sich dann gleichfalls als Linie muß ansehen lassen, wenigstens einen Punct gemein hat, heißt eine durchaus zusammenhängende Linie.

(Prostorový objekt, jehož každá část, která je čarou podle předchozí definice, má společný aspoň jeden bod s ještě zbývající částí, která též musí být považována za čáru, se nazývá absolutně souvislá čára.)

Tato definice musela vzniknout. Jednorozměrné útvary pozůstávající z více komponent chce Bolzano vyšetřovat jako jedinou čáru, vždyť mohou být zadány jedinou rovnicí jako třeba hyperbola. Bylo tedy nutné vymezit rozdíl mezi „jednodílnými" a „vícedílnými" čarami. Bohužel, tento pokus o formulaci pojmu souvislosti nebo komponenty selhal. V právě uvedeném smyslu ani uzavřený interval na přímce není souvislý. Nabízí se tu však určitá interpretace. Vzhledem k tomu, že Bolzano definoval též koncový bod čáry (v jeho pojetí je to takový bod, že od jisté vzdálenosti počínaje má ve všech menších vzdálenostech právě jednoho souseda), můžeme se domnívat, že obě čáry, které vystupují v definici absolutně souvislé čáry, uvažoval i s jejich koncovými body. Zdá se to být logické, avšak těžko rozhodnout, do jaké míry jsme k tomu oprávněni. Nicméně v tomto nazírání už je Bolzanova souvislost docela rozumný pojem. Bolzanovsky souvislé jsou pak všechny Bolzanovy čáry, které jsou souvislé v dnešním smyslu a jejichž souvislé podprostory mají konečnou hranici a nejen ony. Přesto však není obtížné sestrojit souvislou Bolzanovskou čáru, která nebude Bolzanovsky souvislá – stačí si uvědomit, že doplnění čáry o koncové body nemusí vždy znamenat totéž, co její uzávěr.

Zhruba dvacet definic topologických pojmů je obsaženo v *Die drey Probleme*. Všechny jsou zavedeny ve stejné obecnosti jako vybrané ukázky. Pro vlastní účel práce, problém rektifikace, není potřeba znát z těchto definic žádnou. Bolzano sám zdůrazňuje tuto skutečnost a vysvětluje, že jde o výsledky jeho několikaleté práce, se kterými veřejnost téměř neseznámil, a že se mu zdálo vhodné umístit je sem.

První tápavé kroky v obecné topologii má tedy Bolzano v roce 1817 za sebou.

Po roce 1830, tj. po letech, kdy věnoval svou pozornost filozofii a logice, vrací se Bolzano opět k matematice. Problematikou, jíž se zabýváme v tomto článku, jsou alespoň z části poznamenány všechny pozdní Bolzanovy práce. Nejucelenější výklad najdeme v práci *Versuch einer Erklärung der Begriffe von Linie, Fläche und Körper* a v článku *Uiber Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linie...*; otázky dimenze jsou probírány také v *Paradoxech nekonečna.* Ani jedna z těchto prací za Bolzanova života nevyšla, *Versuch* se dočkal publikace teprve v současné době.

Podobně jako roku 1817, Bolzano opět mlčky předpokládá, že na objektech a prostorech, které studuje, je dána metrika. Analýza základních pojmů však nyní začíná mnohem hlouběji, než tomu bylo v *Die drey Probleme.* Výchozím pojmem je rozlehlost (Ausdehnung). Intuitivní představa rozlehlosti zahrnuje čáry, plochy, tělesa, – avšak ne všechny množiny jsou rozlehlostmi. Jestliže i nadále je objekt ztotožňován s množinou bodů, je nutné postihnout rozdíl mezi množinou, kterou chceme nazývat rozlehlostí, o které cítíme, že by rozlehlostí měla být a libovolným souborem bodů. Čím se liší evidentní rozlehlost, například kružnice, od stejně evidentní nerozlehlosti, dejme tomu stobodové množiny?

Bolzano odpovídá, že části, tj. body, konečné množiny nejsou spojeny, ale jsou izolované, stojí o samotě. Ke každému bodu existuje jistá malá vzdálenost, v níž bod ještě má souseda, aniž by měl sousedy ve vzdálenostech menších. Aby body byly spojeny, nesmí tedy taková situace nastat. Stačí však pouze prostá negace k tomu, abychom zaručili, že studovaný objekt je rozlehlostí? Nikoli, odpovídá Bolzano a uvádí příklad: Buď $X = \{k/2^n\colon n \text{ přirozené}, 0 \leqq k \leqq 2^n\}$. X je podmnožina intervalu, každý bod $x \in X$ má alespoň jednoho souseda blíže než libovolné kladné ε, avšak zvolíme-li $x \in X$ a předepíšeme-li $\varepsilon = 1/3,\ 1/5,\ 1/7,\ \ldots$, nenajdeme žádný bod $y \in X$ tak, aby $\varrho(x, y) = \varepsilon$. Intuice říká, že ačkoliv množina X je nekonečná, je stále ještě „příliš děravá", nemůže proto být rozlehlostí. A tak definitivní formulace zní takto:

Ein jeder Inbegriff von Punkten würde hiernächst ein ausgedehntes Raumding heissen, falls ein jeder Punkt... mit andern verbunden ist, d. h. Nachbarn in diesem Raumdinge findet, die ihm so nahe, als man nur immer will, treten; oder noch anders, sobald sich für eine jede auch noch so kleine Entfernung Punkte im Raumdinge fänden, die diese Entfernung von ihm haben.

(Každý souhrn bodů se dále bude nazývat rozlehlým prostorovým objektem, pokud každý bod ... je spojen s dalšími, tj. pokud najdeme v tomto prostorovém objektu jeho sousedy právě tak blízko, jak si přejeme; nebo jinak, pro každou dostatečně malou vzdálenost lze najít body v prostorovém objektu, mající od něho tuto vzdálenost.)

Nyní má Bolzano definici rozlehlosti nebo rozlehlého prostorového objektu či kontinua. Přepišme si ji a dejme definovanému pojmu nový název: Metrický prostor (X, ϱ) je bolzanovské kontinuum, jestliže $(\forall x \in X)\ (\exists \varepsilon_0 > 0)\ (\forall 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0)\ bd\, B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.

Avšak přímka, rovina, prostor – tři namátkou vybrané příklady bolzanovských kontinuí – se liší v dimenzi. K zvládnutí problému dimenze je třeba zavést ještě jeden pojem. Je třeba zjistit, proč jeden jediný bod může způsobit, že množina, v níž leží, není rozlehlostí:

Wenn der Punct i in einem Raumdinge so liegt, dass keine auch noch so kleine Ent-

fernung angeblich ist, von der behauptet werden könnte, für diese und für alle kleineren Entfernungen, die es nur überhaupt gibt, besitze i einen oder etliche Nachbarn: so sage ich, i stehe isolirt oder vereinzelt in diesem Raumdinge.

(Jestliže bod i leží v prostorovém objektu tak, že neexistuje žádná jakkoli malá vzdálenost, o níž by se mohlo prohlásit, že pro tuto a pro všechny menší vzdálenosti má bod i jednoho nebo několik sousedů: pak řeknu, že i stojí izolovaně nebo osamoceně v tom prostorovém objektu.)

Jinak řečeno, bod x je bolzanovsky izolovaný v metrickém prostoru (X, ϱ), jestliže $(\forall\varepsilon > 0)(\exists 0 < \delta \leqq \varepsilon)$ $bd\ B_\delta(x) = \emptyset$. Okamžitě dostáváme, že X je Bolzanovské kontinuum tehdy a jen tehdy, když X neobsahuje žádný bolzanovsky izolovaný bod.

(Dnešní terminologie používá adjektiva izolovaný v odlišném smyslu. Avšak používá také fráze „mít dimenzi 0 v bodě" (Uryson-Menger), což je obsahově nejblíže pojmu „být bolzanovsky izolovaným bodem".)

Již uvedená množina dyadicky racionálních čísel je příkladem metrického prostoru, kde jsou všechny body bolzanovsky izolované. Jiný příklad, též od Bolzana, ukazuje, jakých jemností si byl plně vědom: Je-li $X = [0, 1] - \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, je bod 0 bolzanovsky izolovaným bodem v X. Odstraníme-li tento bod, potom vzniklý prostor $Y = X - \{0\}$ už bude bolzanovským kontinuem.

Množinu, prostorový objekt, jehož každý bod je v něm bolzanovsky izolovaný, nazývá Bolzano nesouvislý prostorový objekt (discontinuirliches Raumding). A pak následuje definice, z mnoha důvodů pozoruhodná — Bolzanovo konečné řešení problému dimenze:

Ein Ausgedehntes, dessen jeder Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung der Nachbarn nur so viele hat, daß ihr Inbegriff, für eine jede dieser Entfernungen für sich allein betrachtet, noch kein Ausgedehntes darstellt, nenne ich ein Raumding von einer einzigen oder einfachen Ausdehnung, auch eine Linie. Ein Raumding, dessen jeder Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung der Nachbarn so viele hat daß ihr Inbegriff für eine jede dieser Entfernungen für sich allein betrachtet selbst noch ein Raumding von einfacher Ausdehnung darstellt, nenne ich ein Raumding von zweifacher oder doppelter Ausdehnung, auch eine Fläche. Ein Raumding endlich, dessen jeder Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung der Nachbarn so viele hat, daß ihr Inbegriff für eine jede dieser Entfernungen für sich allein betrachtet schon ein Raumding von doppelter Ausdehnung darstellt, nenne ich ein Raumding von dreifacher Ausdehnung oder einen Körper.

(Rozlehlost, jejíž každý bod má v každé dostatečně malé vzdálenosti jenom tolik sousedů, že jejich množina uvažovaná pro jednu každou z těchto vzdáleností stále ještě nepředstavuje rozlehlost, nazvu prostorovým objektem jediné nebo jednoduché rozlehlosti nebo čárou. Prostorový objekt, jehož každý bod má pro každou dostatečně malou vzdálenost tak mnoho sousedů, že jejich množina uvažovaná pro každou z těchto vzdáleností představuje prostorový objekt jednoduché rozlohy, nazvu prostorovým objektem dvojnásobné nebo dvojité rozlehlosti, též plochou. Konečně, prostorový objekt, jehož každý bod má pro každou dostatečně malou vzdálenost tak mnoho sousedů, že jejich množina uvažovaná pro každou z těchto vzdáleností představuje již prostorový objekt dvojité rozlehlosti, nazvu prostorovým objektem trojnásobné rozlehlosti nebo tělesem.)

Označíme-li tedy Bind X Bolzanovu induktivní dimenzi metrického prostoru (X, ϱ), máme:

Bind $X = 0$, jestliže $X \neq \emptyset$ a všechny body prostoru X jsou bolzanovsky izolované;

Bind $X = 1$, jestliže $(\forall x \in X)\,(\exists \varepsilon_0 > 0)\,(\forall 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0)$ bd $B_\varepsilon(x)$ obsahuje bolzanovsky izolovaný bod;

Bind $X = n$, jestliže $(\forall x \in X)\,(\exists \varepsilon_0 > 0)\,(\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ Bind bd $B_\varepsilon(x) = n - 1$, pro $n = 2,3$.

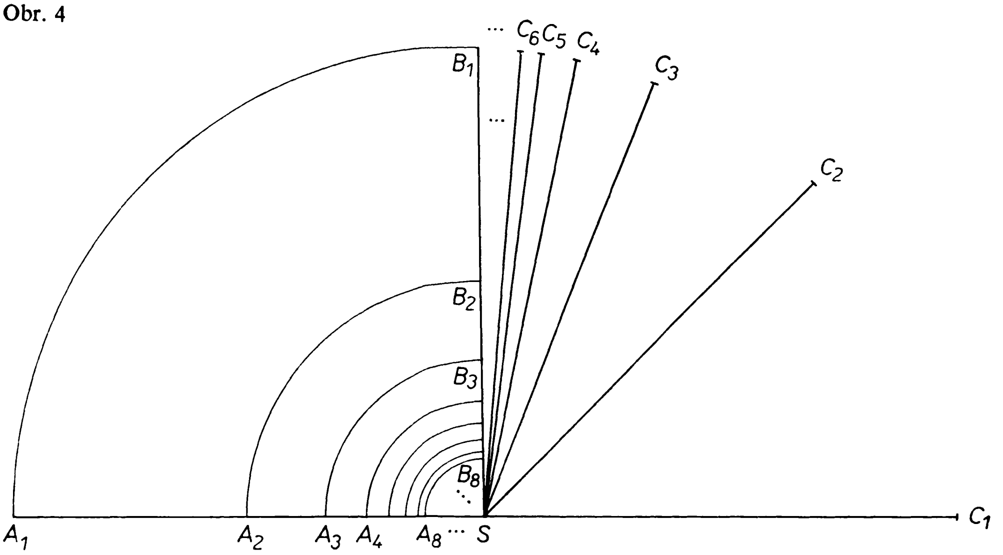
Zvláštní. Proč Bolzano nevyužil možnosti definovat dimenzi 1 stejnou indukcí jako 2 nebo 3, se už patrně nikdy nedozvíme. Nicméně pokrok oproti roku 1817 je ohromný. Zásadní změnu definic si nejspíše vynutily spousty příkladů, na nichž lze demonstrovat tutéž patologii, kterou má náš obrázek č. 3; Bolzano sám uvádí jiný příklad téže povahy – spočetnou nekonečnou množinu kružnic o rostoucích poloměrech, které všechny mají jeden společný dotykový bod s danou přímkou. Vtip spočívá v tom, že takové útvary musíme považovat za jednorozměrné, a přesto se najde bod, jehož libovolně malá okolí mají nekonečnou hranici. Svou roli určitě sehrálo také Bolzanovo revoluční chápání nekonečna jako nekonečna aktuálního. Když tedy konečné množiny neumožní formulovat dobrou definici, musí posloužit vhodně zvolené množiny nekonečné!.Za povšimnutí stojí ještě jeden detail: na rozdíl od definic z *Die drey Probleme*, jsou v *Uiber Haltung* výrazy čára, plocha, těleso dávány až na druhé místo; na prvním se už vyskytují – byť slovně – čísla 1, 2, 3. Však také Bolzano srovnává obě varianty definic a uspokojeně konstatuje, že současné jsou rozhodně lepší než předchozí.

Uveďme si nyní několik příkladů, abychom si uvědomili, jak vlastně Bolzanova dimenze vypadá.

Induktivní výstavba začíná od dimenze 0. Avšak bolzanovsky izolovaný bod není přesně bodem, v němž má prostor Urysonovu-Mengerovu dimenzi 0 – důvodem je restrikce na sférická okolí. V prostoru X, který sestává z nezáporných racionálních a záporných iracionálních čísel, je dimenze bodu 0 vůči prostoru X rovna nule, avšak bod 0 není bolzanovsky izolovaný v X. Stejný argument ukazuje, že kartézský součin racionálních a iracionálních čísel je (nuldimenzionální) podprostor roviny, jehož bolzanovská dimenze je rovna jedné. Trochu pracnější je sestrojit prostor X, že ind $X = 0$, Bind $X = 2$, avšak i takový prostor existuje. Obecně platí, že Bind $X \geqq$ ind X, pokud je levá strana nerovnosti definována.

Bind X není definována pro objekty, které nejsou v dimenzi homogenní; tuto situaci jsme poznali už dříve. Poněkud zvláštní je případ, kdy prostor X nemůže mít dimenzi definovánu díky omezení na sférická okolí. Podívejme se na obr. 4. Pro útvar obsahující bod S, úsečky SA_1, SB_1 a všechny oblouky A_iB_i nelze dimenzi definovat – bod S nevyhovuje. Abychom dostali útvar o dimenzi 1, můžeme bod S odebrat, ale stejně dobře můžeme přidat úsečky SC_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$). „Špatná" sférická okolí bodu S, tj. okolí o poloměru SA_i, získala bolzanovsky izolované body do své hranice. Dost kuriózní je pozorování, že oba právě uvažované prostory nebudou mít dimenzi, změníme-li Bolzanovu definici tak, aby dimenze jedna byla vyvozena z dimenze nula stejným indukčním předpisem, jako je zavedena Bind $X = 2$ a 3.

Obr. 4



Uvedené příklady snad do určité míry naznačují meze Bolzanovy dimenze. Bolzano nesporně zformuloval definici, která vystihuje, co je to dimenze běžných geometrických útvarů. Jeho dimenze je invariantem při izometrických zobrazeních a v řadě případů souhlasí s dimenzí tak, jak ji chápeme dnes. Ne vždy je však definována. Pomiňme případ nehomogenních objektů – tam je spíše otázkou vkusu, chceme-li prohlásit, že celý objekt má takovou a takovou dimenzi, anebo zda budeme rozlišovat, že v některých bodech má dimenzi takovou a v dalších jinou. Klíčové bolavé místo je zachyceno naším posledním příkladem a jeho náprava je možná pouze náhradou metrických koulí obecnými otevřenými okolími.Vyřeší se tím téměř vše. Jenže na tento, v podstatě poslední krok k malé induktivní dimenzi, čekala matematika ještě osmdesát let.

Zbývá otázka, proč Bolzano, když byl věnoval tolik energie nalezení definic geometrických pojmů, nevyslovil o nich – s jedinou výjimkou – žádnou větu. Zpravidla se poukazuje na jeho stáří, slabost, na nedokončenost jeho posledních prací. Myslím, že je tu ještě jedno vysvětlení, které se mi zdá být pravděpodobnější.

Když už Bolzano ví, co je čára, plocha, těleso, definuje uzavřenou křivku jako čáru takovou, že (1) žádné dva body nemají od sebe vzdálenost větší než dané E, (2) každý bod má přesně dva sousedy pro všechny dostatečně malé vzdálenosti, (3) žádný bod nebo množina bodů, která není sama čarou, se nedá přidat, aniž by tím nedošlo ke ztrátě vlastnosti být čarou a mít právě dva sousedy každého bodu ve všech dostatečně malých vzdálenostech.

Jednoduchá uzavřená křivka je pak taková uzavřená křivka, z níž nelze žádnou uzavřenou křivku odebrat tak, aby zbytek zůstal uzavřenou křivkou.

Definice pak vedou k větě, k jediné větě (a navíc bez důkazu) geometrické povahy, kterou lze v pozdních Bolzanových pracích najít; tato věta říká:

Jestliže uzavřená křivka leží v rovině a jestliže souvislou čárou spojíme bod v rovině *ležící uvnitř uzavřené křivky s bodem ležícím vně uzavřené křivky, pak souvislá čára musí křivku protínat.*

Ano, nic více a nic méně než Jordanova věta. Pro Bolzana to však především znamená, že Euklidův důkaz existence rovnostranného trojúhelníka bude od nynějška bez mezer.

A zde je podle mého názoru vysvětlení, proč Bolzano nehledal věty o pojmech, které zavedl. Vybudovat novou teorii nebylo Bolzanovým cílem, jeho cílem bylo postavit geometrii na pevnou půdu. A geometrie už přece své věty měla: byly v Euklidových *Základech.*

Literatura

[a] BOLZANO, B.: *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie.*

[b] BOLZANO, B.: *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Dubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt.*

[c] BOLZANO, B.: *Wissenschaftlehre. Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter.*

[d] BOLZANO, B.: *Uiber Haltung, Richtung, Krümmung und Schörkelung bei Linien sowohl als Flächen sammt einigen ververwandten Begriffen.*

[e] BOLZANO, B.: *Paradoxien des Unendlichen.*

[f] BOLZANO, B.: *Versuch einer Erklärung der Begriffe von Linie, Fläche und Körper.*

[g] BOLZANO, B.: *Geometrische Begriffe, der Jeder kennt und nicht kennt. Versuch einer Erhebung derselben ins deutliche Bewusstseyn.*

[1] BOLZANO, B.: *Geometrické práce.* Spisy Bernarda Bolzana, svazek *5*, Praha, Královská Česká společnost nauk, 1948.

[2] BROUWER, L. E. J.: *Über den natürlichen Dimensionsbegriff,* Journ. für die reine und angew. Math. *142* (1913), 146—152.

[3] JOHNSON, D. M.: *Prelude to Dimension Theory: The Geometrical Investigations of Bernard Bolzano.* Arch. History Exact Sci. *17* (1977), no. 3, 262—295.

[4] MENGER, K.: *Über die Dimensionalität von Punktmengen I,* Monatsh. für Math. und Phys. *33* (1923), 148—160.

[5] POINCARÉ, H.: *Purquoi l'espace a trois dimensions,* Revue de Metaph. et de Morale *20* (1912), 483—504.

[6] URYSON, P. S.: *Les multiplicités Cantoriennes,* C. R. Acad. Paris *175* (1922), 440—442.

Učitel matematiky je technikem, který zachází s velmi rozvinutou technikou. Jeho ideálem by bylo zůstat uvnitř této techniky a odtamtud předvádět bezvadné ukázky. Bohužel, taková předvádění jsou plně srozumitelná jen zasvěcencům, a žáci jimi přirozeně nejsou.

Vzpomeňme si na pohádkového hrdinu, který získal moc změnit na zlato vše, čeho se dotkl, a tím se odsoudil k smrti hladem. Stejně tak má matematik moc přetvořit na matematiku vše, čeho se v duchu dotkne, ale to ho činí neschopným komunikovat s nematematiky.

J. Kuntzmann