Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Kuřina

Řešení úloh a vyučování matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 30 (1985), No. 4, 220--226

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138878

pravděpodobnosti rozptylu neutronů na jádrech a pravděpodobnosti jejich záchytu v různých jádrech.

Na základě poznatků z experimentů a teoretických úvah se přikročilo v Laboratoři metalurgie ihned ke konstrukci reaktoru. Materiál dodávaný ze závodů, bloky čistého uhlíku a uranové tyče, se přímo ukládaly do vrstev reaktorového bloku a kadmiové tyče byly použity jako regulátory reakce. Ještě před úplným dokončením reaktoru se podařilo 2. prosince 1942 pod vedením E. Fermiho uskutečnit první řízenou řetězovou reakci. A. Compton podává téhož dne nejvyšším místům ve Spojených státech hlášení, které se zřetelem na utajení znělo: Italský mořeplavec doplul ke břehům Nového světa.

Ivan Úlehla

---

vyučování

ŘEŠENÍ ÚLOH A VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

František Kuřina, Hradec Králové

Postavení úloh ve vyučování matematice je aktuální otázkou jak při tvorbě osnov a psaní učebnic, tak i v praxi každého učitele matematiky.

V tomto článku přinášíme informace o problematice úloh ve vyučování podle jednání IV. mezinárodního kongresu o vyučování matematice, který se konal v Berkeley v roce 1980. Vycházíme přitom z knihy *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, Birkhäuser, Boston, 1983, o níž již zčásti referoval v Pokrocích J. Šedivý (Roč. 1984, č. 4). Problematice řešení úloh je věnována její 9. kapitola, která obsahuje příspěvky 11 autorů. Mimoto se problematikou úloh zabývá řada autorů v článcích různého zaměření.

V úvodní studii zdůrazňuje S. Avital význam cvičení a úloh pro dosažení cílů vyučování matematice. Zkušenosti ukazují, že mnozí studenti, kteří vykazují poměrně dobré schopnosti v řešení úloh, v nichž jde o bezprostřední aplikace naučených algoritmů, zcela selhávají při řešení složitějších úloh, kdy se mají rozhodovat, v jakém pořadí, jak a které algoritmy použít. Zdá se, že didaktika matematiky nezná v současné době lepší cestu k zvýšení úrovně řešení úloh než bohatou praxi. Nedostatek znalostí, jak naučit řešit úlohy, nutí autory učebnic shromažďovat velké množství úloh a uspořádávat je podle jednotlivých kapitol učebnic a podle obtížnosti. Kromě toho autor zdůrazňuje, že hlubší analýza přijatých cílů vyučování matematice ukazuje na nedostatek úloh specifického typu.

Výsledkem analýzy je vytčení 5 typů úloh

1. *Úlohy, které by účelně rozvíjely vazby mezi staršími a nově zaváděnými postupy a pojmy*

Je všeobecně známo, že učivo, které není oživováno a užíváno delší dobu, se zapomíná a lze si je obtížně vybavit, když je to třeba. Učivo, které nesouvisí s dříve probíranou látkou, je izolované a lze je obtížně použít v jakýchkoliv souvislostech.

Proto je třeba

a) hledat způsoby soustavného užívání pojmů, postupů a myšlenek rozvíjených v jednotlivých částech matematiky,

b) vytvořit systém souvislostí mezi jednotlivými matematickými tématy.

2. *Úlohy, k jejichž řešení lze najít kratší a rychlejší algoritmus než ten, který se obvykle používá.* Úlohy, u nichž zdánlivě vhodný algoritmus selhává.

Ve vyučování matematice je třeba pečovat nejen o výsledné poznatky, ale také o rozmanitost postupů, přístupů a způsobů, jimiž získáváme závěry. Je třeba překonávat tendenci k jisté poznávací strnulosti studentů, která se projevuje ve snaze užívat naučené algoritmy i v případech, kdy nejsou nejvhodnější, nebo dokonce i v případech, kdy je použít nelze. Sbírky by měly obsahovat i úlohy, jejichž řešením je množina prázdná. Neměli bychom vést studenty k přesvědčení, že na každou učitelovu otázku bude existovat odpověď, a to odpověď kladná.

3. *Problémové úlohy, při jejichž řešení je třeba formulovat, vyvracet nebo dokazovat domněnky.*

Úlohy tohoto typu lze uvádět snad v každém tématu a pro každou věkovou úroveň. Právě na nich je možné seznamovat studenty s podstatnými rysy matematiky.

4. *Úlohy propedeutického charakteru*

Z psychologie je známo, že déletrvající praxe s pojmy zlepšuje učení a že koncentrace velkého množství pojmů, které má žák zvládnout v krátkém čase, vytváří zábrany zpomalující proces učení. Zdá se proto potřebné rozšířit propedeutickou praxi. Při ní si sice žák neosvojuje pojmy plně, ale řešení vhodných přípravných úloh mu může usnadnit učení v budoucnosti.

5. *Úlohy kulturně historického charakteru*

Některé problémy z historie vědy mohou přispět nejen k oživení matematiky, ale i k probuzení zájmu studentů a k hlubšímu porozumění učivu.

[I když výklad S. Avitala není na některých místech dostatečně konkrétní, považuji jeho myšlenky za podnětné i pro naši praxi. Bylo by např. vhodné, abychom podrobili analýze naše učebnice matematiky z toho hlediska, které zavedené pojmy „vyznívají naplano", učitelé by měli publikovat úlohy ověřené praxí, které spojují několik odlehlých témat školské matematiky. U nás se patrně věnuje nepatrná péče praxi v hodnocení postupů při řešení úloh, studiu zlepšování algoritmů a ukázkám jejich selhání. Myslím, že by se tohoto podnětu mohli chopit učitelé z praxe i didaktici matematiky.]

Úlohy z reality

D. Burkhardtová z Velké Británie se zabývá ve svém příspěvku tzv. úlohami z reality. *Vychází z přesvědčení, že žáci by měli poznat matematiku jako nástroj, který pomáhá člověku porozumět širokému okruhu problémových sitací.* Celý příspěvek je výrazně orientován na žáky. Právě z jejich hlediska se autorka pokouší klasifikovat úlohy ve vyučování. První typ úloh, o něž mají žáci největší zájem, jsou úlohy, které se týkají přímo jejich života (úlohy pro žáky aktuální). Poněkud menšímu zájmu žáků se těší úlohy, které budou (aspoň žáci tomu mají věřit) pro ně aktuální v budoucnosti. Do třetí kategorie klade autorka úlohy, které nejsou sice aktuální, ale jsou pro žáky zajímavé a tím přitažlivé. Poslední dvě kategorie úloh stojí podle D. Burkhardtové na okraji zájmu žáků. Jsu to úlohy, které se zabývají nácvikem matematické techniky a tzv. úlohy vzdělávací. Vzdělávacími úlohami rozumí autorka takové úlohy, jejichž význam spočívá v jasném osvětlení určitého matematického principu.

Jestliže se zdá, že bychom ve vyučování měli dávat přednost úlohám pro žáky aktuálním, neznamená to, že bychom se měli vzdát všech tradičních matematických modelů, pomocí nichž žáci poznávají např. matematickou techniku. Naopak, autorka zdůrazňuje, že každá technika vyžaduje poměrně dlouhé, i několikaleté období výcviku, v němž si ji žáci osvojují.

Autorka se také zamýšlí nad otázkou, kolik matematiky by měla úloha z reality obsahovat. Dochází k závěru, že velmi často vystačíme s nejjednoduššími dovednostmi: s výčtem všech možností, s jednoduchou aritmetikou a s kalkulátory, s tabelací a rýsováním grafů a s algebrou. Úlohy z praxe mohou dát ovšem i podněty k nácviku nové potřebné dovednosti.

[Přesto, že podle mého názoru nelze vyučování matematice orientovat výhradně na učivo, o něž mají žáci zájem na základě vnějších podnětů, myslím, že bychom studiu otázek, co žáky v určitém věku zajímá (a to z matematiky i mimo ni), měli věnovat náležitou pozornost. Výsledky těchto studií by bylo možné uplatnit při psaní učebnic a hlavně v praxi školy, neboť v mnoha případech žáci patrně nemají k matematice kladný vztah. Vážným nedostatkem v naší praxi je skutečnost, že učitel nemá k dispozici žádný soubor úloh, které by byly vhodné pro matematiku a které by vycházely ze zkušeností žáků. Psát články, studie a sbírky na toto téma považuji za aktuální. Z druhé strany si ovšem musíme uvědomit, že laický poměr k realitě povede především k otázkám zvládnutelným matematikou základní školy. Hlubší otázky by vyžadovaly spolupráci dalších disciplín. Tím se dostáváme k problematice integrovaných vzdělávacích celků. Tomuto tématu věnoval IV. kongres ICME rovněž pozornost.]

Matematizace

S řešením úloh souvisí problematika tzv. matematizace. Jejím charakterem a užitím ve vyučování se zabývá D. Wheeler z Kanady.

Matematizace jako proces vzniku matematiky probíhá jednak individuálně, neboť každý akt matematizace je duševní činnost prováděná individuem, jednak univerzálně, neboť schopnost matematizovat náleží podle Wheelerova názoru každému člověku. Proto může být učitel optimistický a jeho úkolem není „vkládat" hotovou matematiku do žáků, ale podněcovat jejich schopnost matematiku vytvářet.

Abychom si uvědomili, *jak matematizace probíhá*, je účelné všimnout si těchto aspektů:

a) Důležitým matematickým pojmem je pojem struktura. Strukturalizace se projevuje např. hledáním vzorců a modelováním situací. Naše nazírání a myšlení je ovšem rovněž strukturované. Na matematizaci můžeme tedy nahlížet jako na proces „vnášení struktury do struktury".

b) Dalším charakteristickým rysem matematizace je hledání závislostí mezi vztahy, stanovení vzájemných souvislostí mezi idejemi.

c) Již H. Poincaré poukázal na skutečnost, že všechny matematické pojmy se týkají explicitně nebo implicitně nekonečna. Součástí tohoto hlediska je určování obecného, univerzálního, platného ve všech vymezených případech.

[Z Wheelerova výkladu není zřejmé konkrétní didaktické zpracování procesu matematizace. Orientace na poslední tři jmenované aspekty je však podle mého názoru poučná. Zejména zdůraznění potřeby hledat závislosti mezi jevy vede k sémantickému chápání logických otázek ve vyučování, které by mělo být účinnější než probírání logiky na více méně syntaktické úrovni.]

Otázkou matematizace nematematických situací z didaktického hlediska se zabývají R. Biehler z NSR a T. Miwa z Japonska.

R. Biehler zdůrazňuje v úvodu, že stoupenci matematizace se shodují v těchto dvou důležitých aspektech:

1. V záměru učinit školskou matematiku aplikovatelnější, spojovat ji s každodenním světem studentů, s ostatními disciplínami a s praktickým užitím ve společnosti.

2. V důrazu na postupy, při nichž se rozvíjejí vědomosti, jako protikladu k vyučování hotové matematiky.

Za těmito obecnými hledisky však lze najít značné rozdíly v konkretizaci podle specifických úkolů matematického vzdělávání.

R. Biehler je uvádí takto:

a) Žádný z výše popsaných aspektů není cílem, ale spíše prostředkem. Poukázání na nematematické souvislosti může být jen motivací ke studiu určitého matematického učiva. Postupy rozvíjející vědomosti mohou být jen způsoby vyučování, právě tak jako „učení konáním objevů" (discovery learning) je běžně interpretováno jako způsob účinnějšího učení určitému obsahu, nikoli však jako způsob, jak se učit vynalézat.

b) Oba aspekty jsou cílem vyučování. Studenti by se měli učit matematicky řešit problémy z reálného života jako přípravu pro budoucnost, v níž budou často muset problémy aktivně řešit.

c) Učení matematickému modelování je přípravou pro budoucí práci, v níž kritické porozumění modelům, které vytvořili jiní, účelné aplikace známých modelů a diskuse a spolupráce s experty na matematické modelování budou požadovány spíše, než vlastní aktivní modelování.

d) Hlavní funkcí modelování a matematizace ve vyučování je poskytnout příležitost učit se různým poznatkům o těchto postupech v rozličných oblastech vědy nebo společnosti.

K osnovám zaujímá Biehler tato stanoviska:

Zdá se, že je téměř obecný souhlas s tím, že aspoň část osnov by měla být věnována „opravdovým" aplikacím matematiky nebo řešení „opravdových" modelových úloh. Hlavní problém je v tom, jak navrhnout zbytek osnov, mají-li být věnovány systematickému aplikačně orientovanému rozvíjení matematických poznatků. Potíž je i v tom, že některé matematické pojmy se v aplikacích matematiky užívají poněkud jinak než v matematice.

V další části svého příspěvku si všímá R. Biehler souvislosti dvou oblastí: aplikované matematiky a řešení úloh. Zdůrazňuje, že první z nich je ovlivňována teorií poznání a metodologií vědy, druhá především hledisky psychologickými. Při řešení úloh si všímáme toho, zda jsme již řešili podobný problém, řešíme dílčí úlohy, uskutečňujeme plány řešení tak, jak to uvádí např. G. Polya. Tyto aspekty se běžně neobjevují při popisu matematického modelování. Pro matematické modelování je charakteristické, že reálné systémy reprezentujeme a vyšetřujeme pomocí matematických modelů. Toto hledisko obvykle nezdůrazňujeme při popisu řešení úloh z reality. Interpretujeme-li matematické modelování jako řešení úloh, můžeme využívat výsledků a metod, které jsou již z empirických výzkumů této oblasti známy.

Podrobněji než Wheeler pojednává Biehler o matematizaci. Poukazuje na dva odlišné přístupy k tomuto pojmu. Freudenthalova škola chápe matematizaci jako proces vzniku matematiky ve vztahu k situacím a problémům matematického nebo nematematického typu. Naproti tomu v diskusích o rozvoji vědeckých teorií se užívá termínu matematizace ve smyslu transformace poznatků (teorií a hypotéz), které nejsou matematicky vyjádřeny, do matematického jazyka. Vzhledem k tomu, že se matematizace týká i otázek matematických, je tento pojem širší než matematické modelování. Nejčastěji se však chápe matematizace jako didaktický princip vyučování a učení matematice v souvislosti s nematematickými situacemi. V tomto smyslu se matematizace často spojuje s tzv. genetickým vyučováním.

Podle Biehlerova názoru by mělo ovlivnit optimální cestu mezi extrémními přístupy k vyučování matematice, totiž mezi vyučováním hotové soustavy znalostí a vyučováním postupů a metod, hlubší porozumění vědě a vědecké aktivitě. Zvláště důležité se zdá v tomto smyslu studium myšlenkových pochodů, hodnotových systémů a orientace tvůrců vědy.

[Naše současné učební plány, osnovy a učebnice nebyly podle mého názoru dosud výrazněji zasaženy vlnou orientace na aplikovanou matematiku. Je těžké rozhodnout, je-li to nedostatek a jak vážný, neboť se zdá, že prokazatelně lepších výsledků v takto orientovaném vyučování nebylo dosud nikde dosaženo. Nicméně jsem přesvědčen, že ovlivňování matematického vyučování aplikačními zřeteli není záležitost módní, ale důležitá jednak z hlediska efektivnosti vyučovacího procesu, jednak z hlediska rozvíjení materialistického světového názoru žáků. V souvislosti s Biehlerovými výklady bychom měli uvážit ještě jednu myšlenku. U nás se od dob akademiků B. Bydžovského a E. Čecha nepodílejí výrazněji na koncepci vyučování vědečtí pracovníci v matematice. Duch a metody tvůrců vědy však nikdo jiný nemůže do vyučování matematice vnést než právě oni.]

V Japonsku tvoří podle referátu T. Miwy matematizace důležitou složku matematického vzdělávání. *Matematizace nematematických situací* směřuje přitom k dvěma cílům:

1. Pomoci žákům porozumět matematickým pojmům, principům a postupům.
2. Pomoci žákům lépe porozumět situacím, které vyžadují pochopení a vhled.

Cíle vyučování matematice se pro japonskou základní školu formulují takto:

Rozvíjet v dětech schopnosti a postoje, které jim umožní chápat matematicky jevy každodenního života.

Žáci mají jednak tvořit matematiku na základě reálných situací, jednak mají analyzovat konkrétní jevy s užitím matematiky.

Dále probírá T. Miwa problémy matematizace z hlediska žáků, učitelů a osnov. Za nejzávažnější označuje problematiku přípravy učitelů. Učitelé tradičně školení v jednotlivých matematických disciplínách nemají ani postačující znalosti, ani zkušenosti v matematizaci. Jen na málo školách vzdělávajících japonské učitele jsou zavedeny kursy matematizace.

[Na problematice vzdělání učitelů je podle mého názoru vidět, jak obtížná je otázka matematizace reálných situací ve vzdělání. Naše současné koncepce k těmto otázkám nepřihlížejí. Řešení uvažované problematiky by však mohlo podnítit aspoň plodnější spolupráci obou oborů učitelského studia. Zároveň je zřejmé, že matematické vzdělání učitelů by mělo být zčásti diferencované podle druhého aprobačního předmětu. Bez řešení těchto otázek si patrně nelze představit hlubší orientaci k aplikacím matematiky na základní a střední škole. Z tohoto hlediska se zdá, že jde spíše o problém budoucnosti než o problém současné školy.]

Matematické modelování

Ch. Ormell z Velké Británie se zabývá otázkou matematického modelování ve vyučování. Zdůrazňuje, že na rozdíl od praxe, kdy tvorba modelů je často podněcována otázkami technické povahy, máme ve vyučování možnost konstruovat modely, které jsou didakticky hodnotné. Na takovémto modelování, pro něž je charakteristické, že pomocí modelů získáváme odpovědi na otázky, které nejsou patrné bezprostředně z reality, lze podle Ormella založit celou školskou matematiku. Své výklady opírá autor o zkušenosti z práce s učebním textem Mathematics Applicable, který asi není u nás znám. Pozoruhodná je jeho *idea tzv. poloprogramovaného zpracování textu*, v němž má žák k dispozici pokyny, otázky a poznámky nejrůznějšího druhu. Tímto způsobem se prý úspěšně řeší nejen otázka vhodného tempa vyučování, ale i stálého udržení zájmu o matematiku. Za hlavní úkol didaktiky matematiky pro následující dvacetiletí považuje Ormell vypracování takových kursů učební látky, které by na všech věkových úrovních plně rozvíjely schopnosti žáků. V závěru referátu se Ormell podrobně zabývá otázkou, které problémy jsou pro žáky „realistické".

[Za nejplodnější myšlenku Ormellova vystoupení považuji ideu poloprogramovaného zpracování učiva. Tato idea není zcela nová. Jsou známy např. některé sovětské experimenty konané v tomto směru. U nás se však, pokud vím, v žádné učebnici ani sbírce úloh nepoužilo tohoto způsobu zpracování učiva. Myslím, že by stálo za to prověřit naznačené možnosti aspoň na některých tématech školské matematiky.]

V. Treilibs z Austrálie studuje *schopnosti tvořit matematické modely u sedmnáctiletých žáků*. Výčet testovaných dovedností ukazuje, co považuje autor pro tvorbu matematických modelů za podstatné:

1. Určování proměnných. Studenti měli určit všechny důležité proměnné v daném reálném problému.
2. Hodnocení proměnných. Úkol byl zhodnotit čtyřstupňovou stupnicí seznam proměnných dané problémové situace.
3. Určování otázek. Studenti měli určit, na které otázky je třeba odpovědět, máme-li vyřešit daný problém.
4. Určování vztahů. Úkol byl znázornit vztahy mezi proměnnými v dané úloze.
5. Vybírání vztahů. Z daných vztahů měli studenti vybrat ten, který je pro studovaný problém vhodný.

Pozoruhodné jsou zejména tyto závěry autora. Ve formulaci a řešení problému studenti zřídka užívali matematiku, kterou se učili v posledních dvou letech. Studenti s opravdovou schopností modelovat se vyskytují výjimečně. K rozvíjení schopnosti modelovat je třeba zařazovat do osnov specifické prvky. Výuka modelování přináší specifické problémy učitelům.

[S otázkou vytváření modelů reálných situací souvisí problematika řešení slovních úloh. Treilibsův referát potvrzuje potřebu věnovat řešení těchto úloh náležitou didaktickou přípravu. Řešení úloh nelze patrně naučit ilustrativními příklady.]

Kapitola *Problem Solving*, o níž zde referuji, obsahuje pouze dvě podrobné ukázky řešení úloh. První uvádí E. Love z Velké Británie. Jde o tuto úlohu:

Prvních 8 přirozených čísel zapsaných v dvojkové soustavě má být uspořádáno tak, že každá dvě sousední i první a poslední číslo se liší pouze v jedné cifře (každé číslo je zapsáno jako trojciferné: 000,001,..). Najděte všechna taková uspořádání a vztahy mezi nimi.

Řešení úlohy je znázorněno cestami po hranách jednotkové krychle.

Druhá konkrétní ukázka rozboru řešení úlohy pochází od M. Waltera z Oregonu a týká se matematizace problémů vzniklých při překládání archu papíru.

*

Z předcházejícího výkladu je zřejmé, že výklad o úlohách ve vyučování matematice na IV. kongresu ICME se soustředil zejména na otázku významu úloh a jejich didaktickou klasifikaci i na problémy matematizace a modelování. Mnozí autoři se odvolávali na práce, které jsem neměl k dispozici. Tím ovšem informativní hodnota našeho článku klesá. Přesto se však potvrzuje, že úlohy ve vyučování matematice jsou aktuálním problémem nejen naší školské praxe.

EŠTE RAZ K ANALÓGII „STACIONÁRNY KVANTOVÝ STAV ČASTICE VIAZANEJ NA ÚSEČKU – STOJATÁ VLNA NA STRUNE“

Vladimír Černý, Ján Pišút, Peter Prešnajder, Bratislava

1. Úvod

V článku [1] publikovanom nedávno v tomto časopise sa A. Lacina zaoberal s analógiou medzi stacionárnymi stavmi častice v nekonečne hlbokej potenciálovej jame a stojatými kmitmi struny upevnenej na oboch koncoch. Táto analógia sa používa na objasnenie mechanizmu kvantovania pri elementárnom výklade kvantovej mechaniky (napr. [2], [3] a viacero ďalších miest) a ako Lacina správne poznamenal pri jej výklade sa robia „medzikroky“, ktoré nie sú korektné.

V tomto príspevku budeme ešte raz analyzovať celý problém. Ukáže sa, že situácia je dosť zaujímavá a že Lacina má pravdu, napriek tomu, že pravdu nemá. Toto tvrdenie objasníme podrobnejšie v dvoch krokoch. V prvom ukážeme, že Lacina analyzuje situáciu, ktorá neodpovedá fyzikálnej formulácii problému. V druhom kroku ukážeme, že „medzikroky“ kritizované Lacinom sú skutočne nekorektné, hoci dôvody sú celkom iné ako tie, čo boli uvedené v práci [1]. Napokon sa pokúsime naznačiť, ako možno túto analógiu previesť bez týchto nekorektných „medzikrokov“ (tak je to prevedené napr. v [4]).

Poznamenajme ešte, že diskusiu okolo otázok elementarizovania podstatných myšlienok modernej fyziky treba len privítať, lebo je to problém, s ktorým sa asi v budúcnosti budeme stretávať čoraz častejšie. Lacinova kritika zjednodušenej analógie medzi stacionárnymi stavmi