Steve Russ

Bolzanův analytický program

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 38 (1993), No. 5, 249--259

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139108

Bolzanův analytický program

Steve Russ

Naše moderní definice konvergence nekonečných řad a spojitosti reálných funkcí se objevily tiskem poprvé před 175 lety v krátké práci napsané zapadlým českým knězem [1]. Ve zmíněné práci použil tyto definice obecným a pečlivým způsobem ke konstrukci prvního „čistě analytického důkazu" věty o nulovém bodu spojité funkce, která říká, že spojitá funkce, nabývající v koncových bodech nějakého intervalu hodnot s opačným znaménkem, je nulová v některém bodě tohoto intervalu. Tím knězem byl Bernard Bolzano (1781–1848) a této větě se někdy říká „Bolzanova věta". Bez ohledu na to i na uznání v názvu „Bolzano-Weierstrassovy věty" se až do nedávné doby nezměnilo nic na tom, že byl jako matematik opomíjen, což tohoto kněze trápilo celý jeho život.

A přesto jeho publikace (od r. 1804) a rukopisy (v jejichž publikaci se pokračuje) odhalily rozsáhlost jeho pozoruhodných vhledů [2]. Podal první topologickou definici křivky, plochy i třírozměrného tělesa a formuloval větu o Jordanově křivce [3]. Vyloučením obvykle špatně definovaných nekonečně malých veličin a obratným využíváním aritmetického pojmu limity definoval konvergenci, spojitost a derivace v moderním smyslu, včetně jednostranné spojitosti a jednostranných derivací. Na začátku třicátých let minulého století sestrojil také první příklad všude spojité funkce, která nemá nikde derivaci. V tomtéž období položil počátky sice komplikované, ale úspěšné konstrukci reálných čísel — jeho tzv. „měřitelných čísel" — a obsáhlou teorii reálných funkcí. Vyvinul elementární teorii nekonečných množin a jasně pochopil, že takové množiny jsou charakterizovány tím, že je vždy lze vzájemně jednoznačně zobrazit na jejich vlastní část. Ve svém díle o logice publikovaném v r. 1837 [4] předvedl, že pochopil pojem proměnné jako místa, do něhož lze dosazovat hodnoty z dané třídy, a v dalším pak podal první formální pojetí platnosti, pravdivosti a sémantického vyplývání, a to způsobem, který bývá obvykle připisován Tarskému z dvacátých let tohoto století. Bolzano znal většinu toho, co jsme zde uvedli, nejméně dvě či tři desetiletí (a v některých případech i století) dříve, než byly tyto výsledky publikovány matematiky, kterým jsou nyní zpravidla připisovány (jako Dedekind a Weierstrass). Ale to nebyly šťastné náhody. Bolzano nebyl nikdy profesionálním matematikem a pracoval většinou v izolaci, a přesto formuloval pečlivě propracovanou metodologii, jejíž náčrt byl obsažen v jeho první publikaci [5] a která se mu stala vodítkem v jeho bádání po celý zbytek jeho života.

Bernard Bolzano se narodil v Praze 5. října 1781. Téměř nepřetržitý válečný stav, existující v Evropě mezi léty 1789 a 1815, tvořil pozadí jeho dětství i začátku jeho životní dráhy. V té době byly Čechy s Prahou jako hlavním městem částí habsburské

STEVE RUSS: *Bolzano's Analytic Programme.* Mathematical Intelligencer Vol. *14* (3) (1992), pp. 45–53.
Přeložil JIŘÍ FIALA.

monarchie, řízené z Vídně císařem Františkem I. Hlavním intelektuálním hnutím v Čechách bylo tzv. „katolické osvícenství", které zdůrazňovalo témata racionality a užitečnosti ve všech věcech a konalo mnoho pro pozvednutí vyučování na všech úrovních. Bolzanův otec byl italským obchodníkem s uměním, který se přistěhoval do Prahy v šedesátých letech 18. století, kde se oženil s Němkou Cecilií Maurerovou. Z jejich 12 dětí se jen dvě dožily dospělého věku. Bolzano sám nebyl silným a zdravým dítětem, ale i přes bolesti hlavy a srdeční slabost byl, jak napsal, „velmi živým dítětem, které se ani na chvíli nezklidnilo" [6, str. 56]. Tato dispozice k nepřetržité aktivitě vzdor častým nemocem jej neopustila, ani když stárnul. Tak např. je v jeho matematických denících přes 8000 listů rukopisů a k tomu existují ještě deníky týkající se logiky, filosofie a etiky. (Všechny jeho spisy, z nichž většina nebyla dosud publikována, se nyní postupně stávají dostupnými v *Bolzano-Gesamtausgabe*; celkovými editory matematických svazků tohoto vydání jsou profesoři Jan Berg a Bob van Rootselaar [7]).

V roce 1796 se Bolzano zapsal na filosofickou fakultu pražské univerzity a čtyři roky navštěvoval přednášky převážně z filosofie a matematiky. Ačkoliv zpočátku shledával oba obory dosti těžkými, brzy rozpoznal v matematice pole působnosti pro zkoumání základů a pojmů matematiky, což byly věci, které ho velmi přitahovaly. Odvolává se zvláště na Kästnerovy *Anfangsgründe der Mathematik*, v nichž Kästner dokazoval to, co se zpravidla přechází, neboť to každý už zná, tj. snažil se o to, aby si byl čtenář jasně vědom základu [Grund], na němž tyto soudy spočívají. A to se mu ze všeho líbilo nejvíce. „Mé zvláštní potěšení z matematiky spočívalo tudíž právě na těchto spekulativních partiích, jinými slovy cenil jsem si pouze tu část matematiky, která byla současně filosofií" [6, str. 64].

Na podzim roku 1800 začal Bolzano tříletá theologická studia. Ačkoli byl v základu pravověrným katolíkem, shledal, že se jeho racionalistické sklony neshodují úplně s jeho theologickými studiemi tak, jak si to původně představoval. Dospěl k poznání, že jeho posláním není služba, ale učitelské působení. Jeho stálá snaha o jasnost a správné uspořádání pojmů v každém výkladu byla nepochybně ovlivněna výchovnými a vyučovacími hodnotami. (Jeho hlavní dílo o logice [4] obsahovalo dlouhou část o tom, jak se mají uspořádávat a psát učebnice!) Během svých theologických studií připravoval svou doktorskou tezi o geometrii, která byla otištěna v roce 1804 [5]. Bolzanovi se nepodařilo získat místo matematika, což spolu s nerozhodností ohledně další kariéry znamenalo pro něj nejistou budoucnost. Když se pak rozhodl pro theologické místo, daly se události do pohybu. 5. dubna 1804 získává doktorát; 7. dubna je vysvěcen na kněze; a 19. dubna je mu přiděleno nově vytvořené místo profesora theologie na pražské univerzitě. Taková místa byla vytvořena na všech univerzitách, aby čelila vlně liberalismu a volnomyšlenkářství.

Kromě svých přednášek musel Bolzano dvakrát týdně kázat studentům a obyvatelům Prahy. Tyto povinnosti plnil vážně a s nadšením a brzy se stal vysoce uznávaným a oblíbeným kazatelem v Praze a jeho kázání navštěvovalo pravidelně více než tisíc lidí. Přes tyto kazatelské úspěchy nebyl Bolzano nikdy považován za politicky vhodného pro takové místo a jeho jmenování bylo od samého počátku sledováno vídeňskými autoritami s podezřením. Autorizované učebnice používal jen k tomu, aby je kritizoval, a jeho názory byly zjevně pacifistické a socialistické. Po dlouhém procesu (v němž se odhodlaně hájil) byl Bolzano v r. 1819 propuštěn pro kacířství, dán pod policejní dohled a byla mu zakázána publikační činnost. Tento vynucený odchod do penze pravděpodobně značně prodloužil jeho život — trpěl totiž tuberkulózou —, neboť mohl nyní trávit většinu svého času zotavováním se a psaním na statku v Těchobuzi v jižních Čechách, kde byl hostem svých přátel Josefa a Anny Hoffmannových. Po tomto klíčovém obratu v jeho životním běhu začal Bolzano pracovat na svých dvou hlavních projektech: *Wissenschaftslehre* [4] o logice a *Grössenlehre* [8] o matematice. Po smrti Františka I. v roce 1835 se sice zákazy Bolzana postupně zmírňovaly, ale Bolzano se už nikdy nezapojil ani do politiky ani do revoluce v r. 1848, roce jeho úmrtí. Po tomto krátkém uvedení do Bolzanova života se nyní obrátíme ke zkoumání těch principů, které řídily jeho výběr bádání.

Počínaje svou tezí [5] z roku 1804 formuloval Bolzano řadu obecných náhledů o matematice (označení „filosofie matematiky" v moderním smyslu by bylo přehnané), zahrnujících jeho pojetí správnosti jak pojmu, tak důkazu. V tomto díle se zabýval především nalezením (z jeho pohledu vůbec poprvé) správných důkazů elementární geometrie. Zastával názor, že takové důkazy musí nutně používat pouze pojmy přiměřené zkoumaným větám:

> Nemohl bych být spokojen s dokonale přesným důkazem, jestliže by nebyl odvozen od pojmů, které dokazovaná teze obsahuje, nýbrž by používal jakýchsi náhodných, cizích, prostředkujících pojmů, což je vždy chybný *přechod k jinému druhu.* [5, Předmluva]

Podle Bolzana není tedy logická nebo formální správnost jediným kritériem adekvátního nebo korektního důkazu: Pojmy obsažené ve vyvozování musí být v určitém smyslu přiměřené závěru. Například hovoříme-li o elementární teorii trojúhelníka a rovnoběžek, jsou pojmy přímky a směru přiměřené, zatímco pojmy pohybu a roviny takové nejsou. Bolzano byl přesvědčen, že pohyb patří jiné oblasti než geometrie a že jeho používání v geometrických důkazech je příkladem „přechodu k jinému druhu" (což je typ chyby, na který poprvé upozornil Aristoteles v souvislosti s používáním číselných faktů při dokazování geometrických výsledků). V mnoha případech to také vede k logickému kruhu, neboť možnost použitého pohybu je dokázána právě geometrickou větou. Bolzano tedy předpokládá určitou hierarchii pojmů, jdoucí od pojmů jednodušších ke složitějším, hierarchii, jejíž struktura je dána definicemi. Důkaz výsledku, zahrnujícího pojmy určité úrovně v této hierarchii, nemůže tudíž předpokládat pojmy z úrovně vyšší. Např. použití Eukleidova postulátu o rovnoběžkách předpokládá rovinu a stejně je tomu i při zacházení s úhly jako kvantitami.

V tomto světle představuje Bolzanova elementární geometrie přímek a trojúhelníků, v níž nelze úhly sečítat a odečítat jako kvantity, dosti neobvyklý vývoj. Důkazy, jež ignorují hierarchický princip, jsou ovšem často úspěšné v tom smyslu, že jsou logicky správné a přesvědčující. Avšak dodržování tohoto principu by mělo vést k důkazům, které respektují a odrážejí „objektivní závislost" [9, § 12] mezi pravdami. Tento cíl určuje totiž Bolzanův ústřední motiv v jeho raném díle. Z moderního pohledu je pozoruhodné, že takový dogmatický a esencialistický pohled vedl k metodologii, která byla v jeho rukou tak mimořádně plodná.

Metodologie, která byla v pozadí jeho raného geometrického díla, se ustaluje v jeho díle o základech matematiky, otištěném v roce 1810 [9] a nakonec vnitřně utváří matematický výzkumný program, který Bolzano uskutečňoval po celý zbytek života [10]. Práci [9] zamýšlel jako první z řady článků, které měly obsahovat reorganizaci matematických teorií (včetně nejjednodušších teorií aritmetiky a geometrie) ve shodě s jeho hierarchickou metodologií, ale nepokračoval v tom. Ačkoli napsal části druhého pojednání, nebyly už publikovány až do nedávné doby [7, Vol. 2A5]. Selhání Bolzanova programu nebylo ovšem důsledkem nedostatku nadšení z jeho strany. Potřeboval prostě ujištění ze strany ostatních matematiků, že byla jeho pracím věnována aspoň nějaká kritická pozornost. Protože však k tomu nedošlo ani v časopisech ani v korespondenci, rozhodl se Bolzano odložit hlavní práci na základech a — jak upřímně doznává — „stát se známějším učenému světu tím, že budu publikovat práce, jejichž názvy by byly lépe uzpůsobeny k tomu, aby vzbudily pozornost“. [1, Předmluva]. Na tomtéž místě vysvětluje, že tato strategie motivovala publikaci jeho prací [11, 12] v roce 1816 a 1817. Náměty těchto prací, stejně jako [1], byly tudíž voleny převážně z důvodů publicity. Dokazuje se tam jen pár nových výsledků; každý z těchto článků usiluje především o podání nových (a z Bolzanova pohledu poprvé přesných) důkazů mnoha dobře známých vět analýzy. Toto soustředění pozornosti na důkazy základních vět pocházelo opět z Bolzanových základních konceptuálních požadavků: odstranit z analýzy nejen ideje nekonečna a nekonečně malých veličin, ale také pozůstatky geometrického názoru. Jeho práce [11, 12] tedy pouze ukazují, jaký druh reorganizace měl Bolzano na mysli. Bez obalu o tom mluví v Předmluvě k [11], když označuje tuto práci za „ukázku nového způsobu rozvoje analýzy“. Záměr upozornit těmito pracemi na své myšlenky se nakonec naplnil, ale až dlouho po Bolzanově smrti. První důležité uznání Bolzanova díla se objevilo v souvislosti s prací [11] v Hankelově článku „Grenze [limita]“, v Erschově a Grüberově *Allgemeine Encyklopädie* z roku 1871.

Abychom si ozřejmili Bolzanův přístup k analýze, podívejme se na práci [1] z roku 1817, v níž podává svůj důkaz věty o nulovém bodě spojité funkce. Bolzano zahajuje tuto práci jasným prohlášením svého metodologického postoje ohledně této věty: Právě proto, že lze tuto větu formulovat v čistě analytických termínech, nemůže být žádný důkaz používající čas, pohyb anebo geometrii správný:

> Nepokládáme-li vědecký důkaz za *pouhé potvrzení* [Gewissmachung], nýbrž za *zdůvodnění* [Begründung], tj. uvedení objektivních důvodů pro zkoumanou pravdu, pak je samozřejmé, že opravdu vědecký důkaz nebo objektivní důvod nějaké pravdy, jež platí stejně pro *všechny* kvantity, ať už jsou v prostoru nebo ne, nemůže spočívat na pravdě, která platí pouze pro kvantity, které jsou v prostoru. [1, Předmluva]

Pro Bolzana prostě *musí* existovat analytický důkaz a ve zbytku práce na tomto důkazu pracuje.

Základní struktura jeho díla je jednoduchá. V Předmluvě, která je stejně dlouhá jako zbytek práce, kritizuje Bolzano dřívější pokusy o důkaz, a to jak z technických důvodů (např. nevhodná definice spojité funkce jakožto funkce nabývající všech hodnot mezi jakýmikoli dvěma jejími hodnotami), tak z důvodů metodologických, které, jak jsme viděli, Bolzana vysoce motivovaly. Pak opakuje svou vlastní definici spojitosti funkce (tato definice se objevila poprvé v [11]) před hlavní částí práce. Tam zahájí krátkou diskusí o nekonečných řadách, která je přípravou na jeho formulaci konvergenčního kritéria a na jeho dvě hlavní věty: Věta 1 je ranou formou Bolzano-Weierstrassovy věty, formou, která používá toto konvergenční kritérium; a Věta 2, věta o nulovém bodu funkce, je větou, která závisí jak na definici spojitosti, tak na Větě 1. V tomto díle a fakticky i v širším programu neusiloval Bolzano pouze o „aritmetizaci analýzy“, tj. nechtěl pouze očistit pojem limity, konvergence a derivace od geometrických příměsí a nahradit je čistě aritmetickými pojmy. Byl si vědom hlubšího problému: potřeby zjemnit a obohatit pojem čísla samého. A právě v tomto širším rámci lze nejlépe porozumět důležitosti a účinnosti Bolzanových definic konvergence a spojitosti. Bolzano vnesl také důležité náhledy do používání symbolů a proměnných v matematice. Tím, že používal aritmetický pojem limity, pochopil např. jasně potřebu dvou různých proměnných a jejich kvantifikace. Uvědomil si také, že jedna z těchto proměnných musí mít danou nebo zvolenou hodnotu. V Bolzanově době bylo v kontextu konvergentních řad běžné hovořit tak, jako kdyby stačilo prostě řadu částečných součtů uvést do chodu, asi tak jako budík, a pozorovat, jak se postupně blíží k nějaké mezní hodnotě. Bolzano namísto toho hovořil o tom, že je třeba nejprve vybrat hodnotu vyjadřující požadovaný stupeň přiblížení a pak explicitně najít dostatečně velké částečné součty, které by zaručily to, že se tyto součty liší méně, než stanoví tato tolerance. Ponechme na chvíli stranou otázku existence limit v těchto případech a všimněme si, že tento důraz na výběr jasně odhaluje „transakční“ povahu moderního pojmu limity.

Je podivné, že se Bolzano v raných pracích o analýze nikde neodvolává na pojem limity, ačkoli tento pojem velmi často používá, a to vždy moderním způsobem a mnohem obratněji než většina jeho současníků. Tím, že to takto dělal, zdůrazňoval důležitý aspekt své metodologie pojmové správnosti, totiž odmítnutí používat nekonečně malé veličiny — jak tohoto názvu, tak pojmu. Místo toho vždy hovořil o „veličinách, které mohou být libovolně malé“ s objasněním, že to jsou obyčejné aritmetické veličiny, pojímané jako malé, zvolené hodnoty, které zůstávají konstantní v celém daném kontextu. Bolzano zavedl také konvenční značení ω a Ω s různými indexy (psanými nahoře) pro rozlišení různých „libovolně malých veličin“. Společná je jim univerzální kvantifikace, obsažená v ideji výběru. Tak v Předmluvě k [1], po kritice mnoha neuspokojivých běžně používaných definic spojitosti, čteme:

> Podle *správné definice* znamená výraz, *že se funkce fx mění podle zákona spojitosti pro všechny hodnoty uvnitř určitých mezí*, přesně to, že je-li x nějaká taková hodnota, pak může být rozdíl $f(x+\omega) - fx$ učiněn menším než jakákoli daná veličina, za předpokladu, že ω může být vzato jakkoli malé ... tj. $f(x+\omega) = fx + \Omega$.

V § 17 práce [1] používá Bolzano tuto definici k důkazu toho, že každý polynom je spojitý, a ve [12] dokazuje několik elementárních vět o spojitých funkcích. Definice je jasná a je formulována tak, že dovoluje snadnou algebraickou manipulaci. Je také originální v tom smyslu, že se zde poprvé v tisku objevuje tato kombinace pojmů (která tehdy byla už neformálně pochopena mnoha matematiky) a její přesná aritmetická formulace a použití.

Pro svůj důkaz věty o nulovém bodě však potřebuje Bolzano naléhavě nějakou formu Bolzano-Weierstrassovy věty — třeba tu, že každá omezená množina reálných čísel má limitní bod. (V té době ovšem neexistovala formální definice reálných čísel, ba ani čísel racionálních či přirozených. Historický vývoj takových definic anebo konstrukcí postupoval zhruba v obráceném „logickém" pořadí.) Aby ji získal, potřeboval kritérium konvergence pro nekonečné řady a v prvních několika oddílech [1] zkoumal mocninné řady v x s částečnými součty, které tvořily novou řadu, kterou ve [13] reprezentoval jako

$$F_1x,\ F_2x,\ F_3x,\ \ldots,\ F_nx,\ \ldots,\ F_{n+r}x,\ \ldots.$$

Hodnota x je zde konstantní a v této době neexistuje pojem stejnoměrné konvergence. Pak formuluje v § 7 klíčový výsledek o konvergenci:

> Má-li řada veličin F_1x, F_2x, F_3x, ..., F_nx, ..., $F_{n+r}x$, ... tu vlastnost, že rozdíl mezi jejím n-tým členem F_nx a jakýmkoli pozdějším, $F_{n+r}x$, bez ohledu na to, jak je od členu F_nx vzdálen, je menší než jakákoli daná veličina, pokud je n dosti velké, pak vždy existuje určitá *konstantní veličina*, která je navíc jediná, k níž se členy této řady blíží a k níž se mohou dostat tak blízko, jak chceme, pokračujeme-li v řadě dosti daleko.

Posloupnost s touto vlastností nese zpravidla Cauchyovo jméno. Čtyři roky poté, co Bolzano publikoval svou práci v Praze v r. 1817, popsal Cauchy touž vlastnost ve svém velmi čteném *Cours d'Analyse*. (Grattan-Guiness v [14] uvádí jistou dosti propracovanou evidenci, že Cauchy mohl skutečně převzít ideu této vlastnosti od Bolzana, ale není to zdaleka přesvědčující.) Podle Kitchera [15] budeme nazývat posloupnost s touto vlastností „B-posloupností" (podle „Bolzano" anebo podle toho, že se částečné součty „shlukují", což je v angličtině možno také označit slovem „bunching").

Bolzano podal zajímavý důkaz věty o těchto B-posloupnostech, který se rozpadá do těchto čtyř částí:

(i) existuje-li taková konstantní veličina (X), pak může být určena tak přesně, jak požadujeme;

(ii) předpoklad takové veličiny X „neobsahuje tedy žádnou nemožnost";

(iii) tudíž taková veličina X skutečně existuje; a

(iv) tato veličina X je jediná.

Bolzano dal jasné a přesné důkazy kroků (i) a (iv), ačkoli je jeho důkaz (i) pozoruhodně rozvláčný. V krocích (ii) a (iii) anebo mezi nimi je však z moderního hlediska důkaz podezřelý. Ve zdůvodnění (ii) říká Bolzano, že „předpoklad konstantní veličiny (X) s touto vlastností blízkosti členů naší řady neobsahuje nic nemožného, protože na základě tohoto předpokladu lze určit tuto veličinu tak přesně, jak požadujeme" [1, § 7]. Co se týče (iii), tvrdí, že „skutečná hodnota X se tudíž liší od hodnoty F_nx nejvýše o d a může být tedy určena tak přesně, jak požadujeme, neboť d lze zvolit libovolně malým. Existuje tedy *reálná veličina* [reele Grösse], k níž se členy zkoumané řady přibližují jak je žádáno, jestliže v této řadě pokračujeme dosti daleko" [1, § 7].

Abychom zde porozuměli Bolzanovu uvažování, potřebujeme nejprve vysvětlit větu: „neobsahuje žádnou nemožnost". Od svého raného díla byl Bolzano zřejmě přesvědčen, že stačí dokázat *možnost* pojmu, aby jej pak matematici mohli oprávněně používat. Několikrát to zdůrazňuje v [5], či aspoň ukazuje možnost nějakého objektu dříve, než jej použije. Ačkoli byla matematika té doby definována jako „věda o kvantitách“, definuje ji Bolzano v Předmluvě k [9] zcela abstraktně jako „vědu zabývající se obecnými zákony, podle nichž jsou věci řízeny ve své existenci.“ Jasně říká, že není záležitostí matematiky dokazovat aktuální existenci čehokoli (to je záležitost metafyziky). Matematika se má spíše zabývat „podmínkami možnosti“ [9, § 8] nějaké věci. V Bolzanově způsobu myšlení tedy stačí ukázat možnost nějaké veličiny k tomu, aby mohla být zavedena a používána (což je zřejmě všechno, co myslel v (iii)). Kitcher to vykládá tak, že Bolzanovo myšlení skryté za požadavkem (ii) mohlo spočívat v tom, že pokud by se vyvodil nějaký spor z možnosti X, pak by se mohl vyvodit týž spor z dostatečně blízké aproximace X. To znamená, že bychom se na (i) mohli dívat jako na jakýsi důkaz relativní konzistence (ii).

Mnozí komentátoři (např. Steele v [16]) říkají, že je v celém důkazu logická chyba, protože tam chybí vlastní existenční důkaz, a že Bolzano dělal co mohl v době, kdy ještě neexistovala definice reálných čísel. Mohli bychom tvrdit téměř opak: Ne, že se Bolzano dopustil logické chyby, ale že obhajoval a odvolával se na hluboký vhled do povahy čísel, totiž to, že „správný pojem“ čísla je právě ten, v němž má každá B-posloupnost limitu. Použití takového pojetí jako podstatné části důkazu snese srovnání s přijetím existence takové limity jakožto axiomu a se zavedením definice pomocí jistých nekonečných množin (řezů anebo tříd ekvivalence). Protože nemůžeme doufat v to, že bychom mohli podat *formální* důkaz konzistence takových axiomů anebo definic, je konzistence jejich zavedení přesvědčením, založeným v obecné intuici anebo náhledu, který je zachycuje. To ovšem neznamená popření nutnosti definičního anebo axiomatického přístupu k reálným číslům, nýbrž ukázání toho, že to jsou pouze formální protějšky klíčové intuice čísla, téže intuice, kterou museli zakoušet Dedekind, Cantor i jiní později v témže století. Bolzanův „důkaz“ je užitečný právě proto, že uspěl na neformální úrovni, a tudíž ukazoval přesvědčivě na ty vlastnosti, které vyžaduje formální pojem čísla. Snažil se uvést jisté důvody (zvláště v (i) a (ii)) toho, že správně pochopená čísla jsou taková, pro něž je vlastnost být B-posloupností dostatečná pro zajištění konvergence. Bolzano nebyl možná první, kdo to uviděl, byl však bezpečně první, kdo to vyjádřil tak úspěšně v termínech B-posloupností.

Na tomto nutném základě formuloval a dokázal Bolzano první hlavní větu své práce z r. 1817 [1]:

> Věta 1. Neplatí-li nějaká vlastnost M pro *všechny* hodnoty proměnné veličiny x, avšak platí pro *všechny* hodnoty *menší* než jisté u, pak vždy existuje veličina U, která je největší z těch, o nichž lze tvrdit, že všechna menší x mají tuto vlastnost M. [1, § 12]

Je-li A neprázdná posloupnost reálných čísel a vlastnost M znamená „nebýt členem A“, pak tato věta tvrdí, že má-li A dolní mez, pak musí mít největší dolní mez. Tato věta je tedy ekvivalentní celé třídě vět, které se často označují jako Bolzanovy-Weierstrassovy. Důkaz, který Bolzano podává, je dobře organizovaný, jasný a přesný. Vychází přitom z intervalu $[L, R]$ (kde $L = u$ a $R = u + D$ pro nějakou kladnou veličinu D) s vlastností, že M platí pro všechna $x < L$, avšak ne pro všechna $x > R$, a pak pokračuje opakovaným půlením tak, aby dostal posloupnost do sebe vnořených intervalů, jejichž koncové body zachovávají tuto vlastnost, a tudíž uzavírají hodnotu

U tak, jak bylo prohlašováno. U pak splývá buďto s jedním z koncových bodů, anebo je nekonečně mnoho takových intervalů. Po srovnání s geometrickou posloupností s poměrem 1/2 použije Bolzano kritérium konvergence k tomu, aby dokázal, že koncové body konvergují k hodnotě U.

I když takový argument musel být dobře znám pro konečný počet půlení v kontextu numerického řešení rovnic a ačkoli připomíná jisté geometrické argumenty v Eukleidových knihách X a XII, argumenty, které závisí na neurčitém počtu půlení, jeví se Bolzanovo použití půlícího argumentu v kontextu procesu, který nemusí nikdy skončit a v němž nemusí koncové body nikdy dosáhnout limitní hodnoty (ačkoli se k ní blíží libovolně blízko), originální.

Bolzano pak dokazuje obecný případ věty o nulovém bodu spojité funkce:

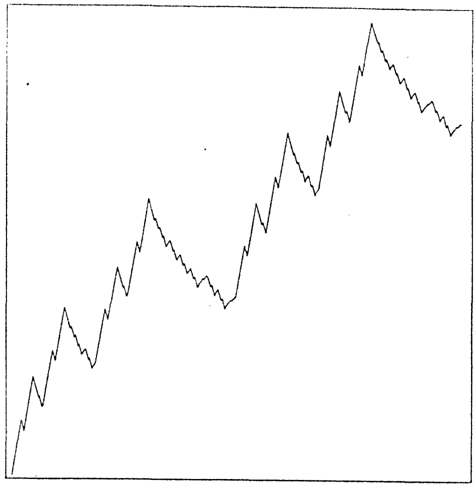
> Věta 2. Mění-li se dvě funkce x, řekněme fx a φx podle zákona spojitosti buďto pro všechny hodnoty x, anebo pro ty hodnoty, které se nacházejí mezi α a β, a když $f\alpha < \varphi\alpha$ a $f\beta > \varphi\beta$, pak vždy existuje jistá hodnota x mezi α a β, pro niž $fx = \varphi x$. [1, § 15]

Důkaz, který Bolzano uvádí pro tuto větu, je elegantní aplikací jeho definice spojitosti a výsledku o úplnosti, formulovaného ve Větě 1. Ke konci Předmluvy shrnuje ve znamenitém příkladu „kostru“ důkazu a teprve pak se pouští do formálních podrobností. Bylo by to možno téměř doslova použít v úvodních přednáškách z analýzy.

V důsledku Bolzanova suspendování a zákazu publikování byly tyto tři práce o analýze, totiž [11] (publikováno v r. 1816) a [1, 12] (publikované v roce 1817), posledními matematickými publikacemi až do čtyřicátých let minulého století. Od konce let dvacátých až do své smrti v r. 1848 však Bolzano pracoval na velké řadě *Grössenlehre*, která měla být systematickým rozvinutím celé matematiky od jejích vlastních základů až k posledním oblastem zkoumání. V jedné z nejzajímavějších části tohoto rukopisu vyvinul Bolzano teorii reálných čísel (anebo *měřitelných* čísel, jak jim říkal) tak, že aplikoval relaci ekvivalence na jisté druhy číselných vztahů [17]. To mu pak dovolilo dokázat, že tato měřitelná čísla tvoří uspořádané těleso, které je úplné v tom smyslu, že každá omezená neprázdná množina má limitní bod. Tím prokázal oprávněnost svého dřívějšího náhledu na čísla a reformuloval a dokázal své kritérium konvergence v termínech B-posloupností měřitelných čísel, majících měřitelnou limitní hodnotu [18]. (Podrobnosti o některých z těchto prací lze nalézt v pracích Laugwitze [19] a Spalta [20].) Ve čtyřicátých letech poznal, že svou *Grössenlehre* nebude moci dokončit, a začal publikovat jednotlivé články. Doufal, že by jeho žáci mohli v jeho díle pokračovat a završit je a že by mohl toto celé dílo spatřit vytištěné. Ačkoli k tomu nedošlo, redigoval a vydal jeho přítel Příhonský posmrtně svazek *Paradoxien des Unendlichen* [16], kterým se Bolzano proslavil jako matematik více než jakýmkoli dílem, které publikoval za svého života.

I když musí být tento přehled Bolzanových raných příspěvků k analýze krátký, musíme zmínit funkci, kterou Bolzano objevil, totiž funkci, která nemá nikde derivaci a přesto je všude spojitá v daném intervalu. V [11] z r. 1816 použil Bolzano pojem libovolně malých veličin k sestrojení krásného důkazu věty o derivacích (a také k tomu, aby podal základní definici derivace pomocí limit, definici dnes standardní, avšak v jeho době vzácnou). Tyto argumenty kontrastovaly výrazně s vágním jazykem špatně definovaných infinitezimálů, který profesionální matematici té doby ještě dlouho používali. Tak např. v [11] dokázal Bolzano přímým způsobem, že derivovatelnost funkce v nějakém bodě implikuje její spojitost v tomto bodě. To byl výrazný vhled do povahy celé rodiny pojmů — funkce, spojitosti, derivovatelnosti —, takže během nějakých deseti let byl Bolzano s to dát příklad toho, že opak neplatí.

Není možné v detailech předvést vše, co Bolzano vykonal, můžeme dát jen celkový náčrt. V § 11 *Functionenlehre* z počátku třicátých let (viz [18]) konstruuje Bolzano funkci F s tou vlastností, že hodnota Fx je limitou hodnot $y_n x$ při n jdoucím do nekonečna [21], kde y_n je definováno rekurzívně takto: y_1 je na úsečce spojující (a, A) s (b, B), takže $y_1 = A+(x-a)(B-A)/(b-a)$; y_2 má pak graf sestávající ze čtyř úseček, vytvořený spojením postupných dvojic v řadě (a, A), $(a + \frac{3}{8}(b - a), A + \frac{5}{8}(B - A))$, $(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(A+B))$, $(a+\frac{7}{8}(b-a), A+\frac{9}{8}(B-A))$, (b, B). Pak pro všechna n se dostane funkce y_{n+1} rozkladem každé úsečky y_n na čtyři nové úsečky stejným způsobem, jakým se y_2 dostalo z y_1. Vezmeme-li za y_1 počáteční úsečku spojující počátek s $(1, 1)$, pak je čtvrtá iterace y_4 této funkce ukázána na obrázku 1. V tomto prvním provedení předpokládal Bolzano prostě a bez důkazu, že limita posloupnosti spojitých funkcí je sama spojitá, což obecně neplatí, avšak v tomto konkrétním případě ano. Ukázal fakticky jen to, že funkce F není monotonní v žádném dostatečně malém okolí bodu v počátečním intervalu. Později pak v § 135 dokázal, že tato funkce nemá konečnou derivaci v žádném z bodů husté podmnožiny tohoto intervalu. Dodatečně pak bylo dokázáno, že tato funkce nemá derivaci v žádném bodě [22]. Limitní funkce F také představuje to, co by bylo zřejmě první analyticky definovanou fraktální množinou. V diskusi, která za tím následovala, ukázal Bolzano jasně, že si je vědom potřeby mnohem širšího pojmu funkce, než bylo v jeho době běžné.



Obr. 1. Čtvrtá iterace Bolzanovy funkce s počáteční úsečkou spojující $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Z historického hlediska ukazuje Bolzanovo matematické dílo zajímavou věc: Přes všechnu svou originalitu a plodnost zjevně nemělo nejmenšího vlivu na dílo či myšlení žádného z následujících matematiků. Bolzano byl buďto špatně pochopen, nečten, anebo neznám po velmi dlouhou dobu. Jakou cenu mohou tedy mít pokusy těch, kteří se snaží pochopit tento spodní proud historie, pochopit směs vhledů a omylů izolovaného amatéra? Nebylo jeho dílo nakonec jen zajímavou slepou uličkou v bludišti historie? Dějiny idejí zahrnují mapování a zjišťování smyslu proměn idejí a teorií. Mnohem víc ji zajímají zdroje, motivy, hodnoty a stanovení „ducha doby“ než snaha po změření toho, jak velký byl vliv A na B. V mysli člověka, který měl jen velmi skromné technické schopnosti a velmi omezený čas pro svá zkoumání, se odehrálo něco zajímavého, že dosáhl rozsáhlých plodných a jemných vhledů do toho, co se stalo ústředními pojmy matematiky. Stojí tedy za to zkoumat nejen to, co udělal, ale i program metod a principů, jimiž se tak úspěšně řídil. Taková analýza by mohla naznačit nové přístupy, nová řešení současných i budoucích problémů.

Upřímně děkuji za četné poznámky k tomuto článku Karen Parshallové a Davidu Fowlerovi a také Maurici Benyonovi za obrázek 1.

Literatura

[1] B. Bolzano: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Praha, Hasse (1817). Nové vydání (editor P. E. B. Jourdain) vyšlo v *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, No. 153, Leipzig (1905). Anglický překlad byl proveden autorem tohoto článku a vyšel v Historia Mathematica *7* (1980), 156–185.

[2] Stále nejlepším přehledem Bolzanova života a matematického díla v angličtině je článek 'Bolzano, Bernard' od profesora Boba van Rootselaara v *Dictionary of Scientific Bibliography*, New York, Scribners (1973). Ačkoli je v leccems zastaralý (např. v životopisných údajích a v poznámkách o pracích o reálných číslech), poskytuje tento článek užitečné shrnutí Bolzanova přínosu k logice v [4].

[3] Znamenitý přehled Bolzanova přínosu k topologii je v článku Dale M. Johnsona: *Prelude to dimension theory: The geometrical investigations of Bernard Bolzano*, Arch. History Exact Sci. *17* (1976), 275–296.

[4] B. Bolzano: *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter*, 1–4. Sulzbach, Seidel (1837). Podstatná část tohoto díla je přeložena do angličtiny v R. George (ed.): *Theory of Science*, Oxford, Basil Blackwell (1972) a v J. Berg (ed.): *Theory of Science*, Dordrecht, Reidel (1973).

[5] B. Bolzano: *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie.* Praha, Barth (1804).

[6] M. J. Fesl (ed.): *Lebensbschreibung des Dr Bernard Bolzano mit einigen seiner ungedruckten Aufsätze und dem Bildnisse des Verfassers.* Sulzbach, Seidel (1836). Uvedená čísla stránek se však vztahují k dostupnějšímu výtahu z tohoto díla, který je obsažen v E. Winter (ed.): *Bernard Bolzano: Ausgewählte Schriften.* Berlin, Union Verlag (1976).

[7] E. Winter, J. Berg et al. (eds.): *B. Bolzano-Gesamtausgabe.* Stuttgart, Frommann Holzboog (1969). Dosud bylo publikováno hodně přes polovinu z přepokládaných 56 svazků tohoto vynikajícího a pečlivého vydání. Bibliografická řada tohoto vydání, která začíná svazkem E2/1 (1972) je nyní nejautoritativnějším zdrojem literatury o Bolzanovi a četných vydání jeho děl.

[8] Užitečný přehled *Grössenlehre* v angličtině je uveden v Jan Berg: *Bolzano's Logic.* Stockholm, Almquist and Wiksell (1962). Několik svazků původních rukopisů v znamenité a užitečné edici Jana Berga a Boba van Rootselaara se už objevilo v [7]. Všechna raná díla [1, 5, 9, 11, 12] a důležité části díla o reálných číslech a teorii funkcí jsou už také přeložena do angličtiny a vyjdou v S. B. Russ: *The Mathematical Works of Bernard Bolzano.* Oxford University Press.

[9] B. Bolzano: *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung.* Prague, Widtmann (1810).

[10] Na konci šesedátých let analyzoval Lakatos vědecké teorie pomocí pojmu 'výzkumného programu', teoretické struktury sloužící jako vodítko budoucích výzkumů. Viz I. Lakatos and A. Musgrave (eds.): *Criticism and the Growth of Knowledge.* Cambridge, Cambridge University Press (1970), 91–195. Práce 'Cauchy and the continuum'

v J. WORRALL and G. CURRIE (eds.): *Imre Lakatos, Philosophical Papers.* Vol. 2, *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge, Cambridge University Press (1978), 43–60, používá tyto principy na zvláštní případ. Nedávná kniha T. KOETSIERA: *Lakatos's Philosophy of Mathematics: A Historical Approach*, Amsterdam, North-Holland (1991) studuje tyto principy v matematice v obecnosti. Vzhledem k explicitnímu výkladu metodologie a její užitečnosti je Bolzanovo dílo zvláště zajímavým případem pro analýzu v lakatosovském rámci.

[11] B. BOLZANO: *Der binomische Lehrsatz und als Forderung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen.* Prag, Enders (1816).

[12] B. BOLZANO: *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des Unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorlegt.* Leipzig, Kummer (1817).

[13] Bolzano používá indexy uprostřed nad F pro částečné součty, zde jsou přepsány jako obyčejné indexy.

[14] Viz IVOR GRATTAN-GUINNESS: *Bolzano, Cauchy and the 'New Analysis' in the nineteenth century.* Arch. History Exact Sci. *6* (1970), 372–400.

[15] PHILIP KITCHER: *Bolzano's ideal of algebraic analysis.* Stud. History Philos. Sci. *6* (1975), 229–269.

[16] D. A. STEELE: *Paradoxes of the Infinite by Dr Bernard Bolzano.* London, Routledge and Kegan Paul (1950). Je to anglický překlad Bolzanova díla: F. PŘÍHONSKÝ (ed.): *Paradoxien des Unendlichen.* Leipzig, Reclam (1851).

[17] Otištěno v oddíle nazvaném *Unendliche Grössenbegriffe* ve sv. 2A8 [7].

[18] *Functionenlehre* je částí *Grössenlehre*, otištěné ve sv. 2A10 [7]. Berg datuje tuto část rukopisu rokem dokončení 1834. Byla také publikována jako 1. sv. K. RYCHLÍK: *Bernard Bolzanos Schriften.* Praha (1930).

[19] DETLEF LAUGWITZ: *Bolzano's infinitesimal numbers.* Czechoslovak Math. J. *32* (107) (1982), 667–670.

[20] DETLEF SPALT: *Bolzanos Lehre von den messbaren Zahlen 1830–1989.* Arch. History Exact Sci. *42* (1) (1991), 15–70.

[21] Bolzano zde používá značení y^n, y^1 atd. Použili jsme indexy, aby nedošlo k záměně s mocninami.

[22] VOJTĚCH JARNÍK: *Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis.* Praha, JČMF (1981). Viz oddíl 'On Bolzano's Function', 67–81.

Steve Russ vystudoval matematiku a filosofii na londýnské univerzitě a pak působil vědecky na Open University, kde získal PhD v historii matematiky. Pak učil a stal se vedoucím kateder škol ve státním i nezávislém sektoru. Od r. 1987 přednášel na katedře informatiky na University of Warwick, přičemž jeho vědecký zájem patřil základům programování, formálním specifikacím a historii jak počítačů, tak matematiky. Podílel se na organizaci mnoha událostí v posledních letech, pořádaných Britskou společností pro dějiny matematiky, chtěl podpořit tyto výzkumy a učinit je užitečnými pro vyučování matematiky. Nyní připravuje překlad hlavních Bolzanových matematických prací, který má být publikován nakladatelstvím Oxford University Press v r. 1993. Jako zábavu má squash a badminton a dále četbu té literatury, kterou nestačil přečíst v době, kdy chodil do školy.