Miroslav Katětov

Česká matematika v letech 1945-1985: topologie, teorie kategorií a kombinatorika

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 32 (1987), No. 4, 191--206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139309

Česká matematika v letech 1945–1985: topologie, teorie kategorií a kombinatorika

Miroslav Katětov, Praha

Tento článek vznikl z autorovy přednášky v říjnu 1985 na konferenci, kterou uspořádala matemticko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy ve spolupráci s Matematickým ústavem ČSAV a jejímž předmětem byl vývoj matematiky v ČSR v období 1945–1985. Přednáška se opírala o dosti rozsáhlý text, který byl přednesen zkráceně; tento článek je doplněnou a mírně upravenou verzí původního textu.

Přednáška se měla původně týkat jen topologie, pak však byla tematika rozšířena. To učinilo pro autora přípravu ještě obtížnější a pomoc ještě potřebnější, než kdyby bylo šlo jen o topologii. Chtěl bych proto nejdříve poděkovat všem kolegyním a kolegům, od nichž se mi dostalo pomoci, ať již vypracováním podkladů nebo diskusí a připomínkami. Děkuji zejména Z. Frolíkovi za celkovou diskusi a různé podklady, J. Nešetřilovi za rozsáhlé podklady ke kapitole o kombinatorice, P. Simonovi za podklady k problematice související s Booleovými algebrami, V. Trnkové za rozsáhlé podklady k teorii kategorií. Je přitom samozřejmé, že všechny případné omyly, nesrovnalosti a opomenutí jdou plně na autorův vrub, a to tím spíše, že snaha o stručnost a zároveň srozumitelnost mě vedly k podstatnému přepracování podkladů, při němž jsem se mohl dopustit různých nedopatření.

Rozsah látky způsobil, že jsem se musel zabývat jen některými vybranými směry práce a u nich uvést jen celkovou charakteristiku a někdy také několik málo konkrétních výsledků. Výběr se prováděl nejen podle závažnosti, ale také – a někdy spíše – podle toho, které výsledky se dají formulovat výrazně a srozumitelně bez zavádění speciálních pojmů; ve výběru se také obrážely subjektivní zájmy i znalosti. Za těchto okolností jsem musel uvažovat o tom, zda a kdy uvádět autory výsledků. Uvádím občas pracoviště, na kterém výsledky vznikly, a také uvádím některá jména; často však nejde přímo o jména autorů výsledků (jak bude patrné z následujícího odstavce). To je ve shodě se zaměřením článku na celkový vývoj a přínos naší topologie a dalších oborů, a nikoli na hodnocení přínosu jednotlivců.

Protože je třeba počítat též s čtenáři, kteří by chtěli získat přesnější nebo podrobnější informace, uvádím dosti často stručné odkazy na literaturu, a to zpravidla na konci příslušné pasáže. Odkazuji přitom podle možnosti na některou knihu nebo souborný článek (a to spíše zahraničních autorů; tak se totiž zároveň dokládá mezinárodní ohlas našich prací) obsahující příslušné výsledky a odkazy na původní práce. Není-li to možné, např. u nedávných výsledků, odkazuje se někdy na původní články. Pokud jde o obecnou topologii, najdou se podrobné a přesné údaje o československých publikacích v bibliografii, která byla zpracována (zatím jen provizorně) a rozmnožena v Matematickém ústavu Univerzity Karlovy. V souvislosti s odkazy chci ještě poznamenat, že leckteré starší výsledky byly později zlepšeny (prohloubeny, zobecněny nebo dokázány jednodušším způsobem) a v knižní literatuře se pak objevují v této pozdější verzi; to ovšem nemění nic na významu, který měly ve své době.

Je třeba ještě zdůraznit, že všude bude řeč pouze o matematice v České socialistické republice, tj. v Čechách a na Moravě. Pokud by se výjimečně mluvilo též o matematice na Slovensku, výslovně na to upozorním.

K obecnému úvodu připojím ještě stručnou zmínku o ocenění prací vzniklých v období 1945—1985 v oborech, o které zde jde. Byly uděleny tři státní ceny: v r. 1953 a 1972 za topologii, v r. 1985 dvojici pracovníků za kombinatoriku (bližší údaje se najdou např. v příslušných ročnících Časopisu pro pěstování matematiky); dva matematici, jejichž vědecké práce patří z převážné části do topologie, jsou členy ČSAV. Dodám ještě, že naproti tomu byly za celé období v českých krajích obhájeny jen dvě doktorské disertace z oborů, o nichž je řeč (doktory věd jsou ovšem také oba zmínění členové ČSAV).

Proberu teď postupně vědecké výsledky ve třech oblastech, o něž nyní jde.

I. Topologie

Topologie se nyní dělí, jak známo, především na obecnou topologii a ostatní topologické oblasti (algebraická topologie, topologie variet apod., diferenciální topologie). Pro hrubou orientaci o rozsahu světové práce v topologii uvedu následující dílčí údaj: v roce 1982 bylo v Mathematical Reviews skoro 900 položek zařazených do obecné topologie a přes 600 položek (tím opravuji mylný vyšší údaj v přednášce) v ostatních topologických oborech. Pro srovnání konstatuji, že za dobu od r. 1945 do r. 1985 (včetně) publikovali českoslovenští matematici asi 700 článků z topologie. V tomto počtu jsou zahrnuty také články z posledních let a četné články patřící do topologie jen podle široce pojaté sekundární klasifikace; údaj je proto značně vyšší než ten, který byl uveden v přednášce.

V několika předválečných letech bylo u nás v algebraické i obecné topologii vykonáno nesmírně mnoho díky E. Čechovi a zčásti také dík jeho žákům. V obecné topologii na to navazoval poválečný vývoj. V algebraické topologii se však u nás začalo znovu pracovat až se značným časovým odstupem a počet pracovníků byl pak dlouho vskutku minimální; až nedávno se objevili další, zcela mladí pracovníci. Vývoj algebraické topologie proto nebudu rozebírat; chci jenom konstatovat potěšující fakt, že se v posledních letech u nás rozvinula dosti intenzívní spolupráce mezi geometrií a algebraickou topologií (což ovšem celkem nutně dává také podnět k rozvoji diferenciální topologie).

Ve vývoji obecné topologie v Čechách a na Moravě po r. 1945 lze rozlišit dvě hlavní periody, a to zhruba do r. 1959 a od r. 1960. Mezníkem je zde skutečnost, že v letech 1959 a 1960 se u nás v topologii poprvé objevují ve větším (a pak postupně narůstajícím) počtu práce matematiků, kteří studovali na vysoké škole až po válce. Jistým dalším mezníkem, časově skoro shodným, je I. pražské topologické sympozium, které se konalo v r. 1961. Tato sympozia, konaná pak vždy jednou za pět let, jsou považována za jedno z nejdůležitějších pravidelných mezinárodních setkání v oblasti obecné topologie. Jsou jakousi přehlídkou světového vývoje v obecné topologii (včetně některých jejích aplikací) a zároveň československým příspěvkem k tomuto vývoji i podstatným přínosem pro topologickou práci v Československu. Je třeba ještě dodat, že podstatný význam pro práci v obecné topologii (a také v několika dalších oblastech) má též zimní škola abstraktní analýzy, která se již po delší dobu koná každoročně. Má jinou formu a také mnohem méně oficiální ráz než topologická sympozia, a možná také proto vyniká svou podnětností.

V období 1945–1959 se obecná topologie rozvíjela v Praze, a to zcela převážně na matematicko-fyzikální (do r. 1952 na přírodovědecké) fakultě, a rovněž v Brně. Pracovalo se na problematice uzávěrových a topologických prostorů, navazující na některé výsledky z předválečného Čechova topologického semináře v Brně, řešily se různé otázky související s Čechovým-Stoneovým kompaktním obalem a analogickými útvary. Zkoumala se lineárně uspořádaná kontinua a rozmanitá další problematika. Soustavně byla v několika pracích studována problematika teorie dimenze.

Z výsledků tohoto období uvedu jen dva: konstrukce regulárního prostoru, na němž neexistují spojité funkce (kromě konstant); věta o rovnosti velké induktivní (Brouwerovy-Čechovy) dimenze a dimenze Čechovy-Lebesgueovy (kombinatorické, pokrývací) pro všechny metrizovatelné prostory. – První z uvedených výsledků se nyní uvádí ve skoro každé knize o obecné topologii; viz např. R. Engelking, *General Topology*, Warszawa, 1977, oddíly 2.4 a 2.7. Druhý je obsažen např. v knize P. S. Alexandrov, B. A. Pasynkov, *Vveděnije v teoriju razmernosti*, Moskva 1973 (kap. VI, § 3).

Podat charakteristiku vývoje obecné topologie v ČSR v období 1960–1985 je mnohem obtížnější již proto, že počet článků publikovaných v letech 1960–1985 je zhruba desetkrát větší než počet článků v období 1945–1959.

Tematická šíře je v tomto období – ve shodě se světovým vývojem – mnohem větší a často se také jde do větší hloubky. Souvislosti s jinými obory matematiky (jde např. o Booleovy algebry, o teorii míry, o teorii kategorií – ta se ostatně před r. 1960 ve světě ještě nerozvinula) jsou v tomto období rozmanitější a hlubší; dá se říci, že aplikací obecné topologie je nyní mnohem více než dříve. Jde ovšem o aplikace uvnitř matematiky, sotva však také někdo očekává, že by obecná topologie měla – až snad na malé výjimky – přímé použití třeba v technických vědách.

Při této příležitosti bych chtěl říci, že podle mého názoru výsledky takových oborů jako např. obecná topologie nebo teorie kategorií nelze hodnotit jen z hlediska aplikací, ať již přímých nebo nepřímých; mohou mít – a také ve svém souhrnu mají – základní význam samy o sobě jako součást poznání, jako součást kultury. Dovolím si k tomu ocitovat několik míst z článku uveřejněného nedávno v předním filozofickém časopise a pocházejícího od tak významného vědce, jakým je Jakov Zeldovič. Ve svém článku (*Socialnoje obščečelovečeskoje značenije fundamentalnoj nauki*, Voprosy filosofii 1985, 6, 57–62) kritizuje J. Zeldovič nejdříve názor, který lze poněkud přehnaně formulovat takto: „věda (je míněn základní výzkum) je způsob, jak ukojovat osobní zvědavost na státní útraty". Pak kritizuje ten názor (který by se už dal do jisté míry hájit), že „dobrá fundamentální věda (rovněž se tím míní to, čemu se u nás obvykle říká základní výzkum) přináší praktické výsledky" a říká, že to je jen dílčí pravda. Tvrdí pak – zde budu citovat v originále – toto: „Fundamentalnaja nauka nužna i potomu, čto ona udovletvorjajet duchovnyje potrebnosti čeloveka. ... Znanije i ponimanije ustrojstva prirody takže javljajetsja važnějšej potrebnosťju čeloveka ... Ně buděm zabyvať rol fundamentalnoj nauki v rožděniji nauki prikladnoj, no sochranim uvaženije i voschiščenije samoj fundamentalnoj naukoj. Ona javljajetsja zamečatelnym tvorenijem čelovečeskogo razuma i, v svoju očereď, soveršenstvujet razum i dušu čeloveka."

Vraťme se však k obecné topologii v ČSR v období 1960—1985. Hlavní celková motivace práce je stejná jako jinde ve světě; chceme vědět a chápat, jak vypadají topologické útvary, co se v nich může a nemůže stát, jak souvisejí s jinými matematickými objekty. Poznamenávám pro zřetelnost, že nejde zdaleka jen o topologické prostory ve vlastním smyslu; ty jsou jen jedním z obecných prostředků, v nich se realizují a precizují intuitivní ideje spojitosti, limity atd.; jsou i jiné takové prostředky — uniformní prostory, proximitní prostory a četné další.

Podrobný přehled toho, co se u nás v uvedeném období udělalo v obecné topologii, a souvislostí se světovým vývojem i s aplikacemi by vyžadoval příliš mnoho místa. Vyberu proto jen několik témat, jež mají uzlový význam nebo ilustrují celkový charakter zkoumání. Povšechnou informaci o dalších směrech i o vývoji směrů, o nichž bude řeč, lze získat ze sborníků zmíněných sympozií.

Přejdu nyní k jednotlivým tematickým okruhům.

Pojem úplnosti

Řada významných výsledků se týkala pojmu úplnosti a různých jeho obměn. Jak známo, topologický prostor (půjde teď stále o úplně regulární prostory) se nazývá čechovsky úplný, jestliže je typu G_δ v každém prostoru, do kterého je vnořen jako hustá podmnožina; každý úplný metrický prostor je čechovsky úplný. U nás pak bylo dokázáno, že čechovsky úplné prostory lze charakterizovat existencí tzv. úplné posloupnosti otevřených pokrytí (zhruba řečeno, posloupnost $\mathscr{U}_n$ se nazývá úplná, jestliže každý filtr, který „projde" všemi $\mathscr{U}_n$, má hromadný bod) a byla podána charakterizace čechovsky úplných parakompaktních prostorů (mají perfektní zobrazení na úplný metrizovatelný prostor). Tyto a další v Praze získané výsledky podstatně přispěly ke vzniku dvou důležitých topologických pojmů: p-prostory, jež zavedl A. Archangelskij, a M-prostory, které zavedl K. Morita.

Další důležitá použití (u zahraničních i našich autorů) pojmu úplnosti se týkají různých verzí pojmu analytického prostoru. Uvedu z nich jen jedno: prostor je K-analytický, právě když má úplnou posloupnost spočetných pokrytí. O důležitosti zobecněného pojmu úplnosti svědčí také použití (I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*, Pacific J. Math. *51* (1974), 515—531) jedné z jeho verzí v následující významné větě o separátní spojitosti: máme-li funkci separátně spojitou na součinu $X \times K$, kde K je kompaktní a X je v příslušném smyslu úplný, pak funkce je spojitá (v obou proměnných zároveň) ve všech bodech jisté množiny $G \times K$, kde G je hustá množina typu G_δ. Tato věta souvisí též s teorií her, tím se však zde nemůžeme zabývat.

Totálně nesouvislé kompaktní prostory a Booleovy algebry

To, že mezi totálně nesouvislými (to znamená, že každý bod má libovolně malá okolí, jež jsou zároveň otevřená i uzavřená) kompaktními prostory a Booleovými algebrami je přirozená dualita, je nyní obecně známo; svého času to však byl velký objev (M. H. Stone, 1936). Booleovy algebry byly odedávna úzce spjaty s matematickou logikou; později (v šedesátých letech) se ukázalo, že tyto vztahy jsou značně hluboké a důležité. Tyto okolnosti činí nepochybným význam zkoumání kompaktních totálně nesouvislých prostorů; tomuto studiu je také skutečně ve světě věnována velká pozornost.

U nás se po válce Booleovy algebry nejdříve zkoumaly (aspoň pokud jde o souvislosti s topologií) jen epizodicky; šlo o existenci tzv. strnulých Booleových algeber (tj. těch, které nemají netriviální automorfismy; v silnější verzi: těch, které nemají netriviální surjektivní endomorfismy). Soustavná práce začala mnohem později, kolem r. 1971, a to v Praze. Získala se pak řada hlubokých a důležitých výsledků, které znamenají podstatný podíl na světovém vývoji. Uvedu jen dva a formuluji je pro Booleovy algebry. Byl udán první příklad strnulé úplné Booleovy algebry a bylo dokázáno, že každá Booleova algebra se dá úplně vnořit do úplné strnulé. Na druhé straně bylo zjištěno, že žádná úplná Booleova algebra není strnulá ve zmíněném silnějším smyslu. — Podstatná část československých výsledků týkající se Booleových algeber je shrnuta ve stati *Disjoint refinement*, kterou napsal B. Balcar a P. Simon pro chystanou publikaci *Handbook of Boolean Algebras*, která má vyjít v nakladatelství North Holland.

Protipólem strnulosti je homogenita: útvar (množina opatřená strukturou) je homogenní, jestliže je možné — až na triviální výjimky — převést automorfismem libovolný prvek x v libovolný prvek y. Ukazuje se, že za určitých předpokladů žádný netriviální uzavřený podprostor extremálně nesouvislého kompaktního prostoru (tyto prostory odpovídají úplným Booleovým algebrám) není homogenní. První podaný důkaz využívá teorie typů ultrafiltrů, jež byla v podstatné části vytvořena rovněž u nás. — Informace, byť jen dílčí, o těchto výsledcích je obsažena např. v § 16 knihy W. W. Comfort, S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer, 1974 a v článku W. W. Comfort, *Some recent applications of ultrafilters to topology*, sborník IV. pražského topologického sympozia, část A, str. 34—42.

Uvedu ještě jeden zcela nedávný významný výsledek (P. Simon, 1984; nebylo ještě publikováno) související s Booleovými algebrami, jenž se dá formulovat bez zavedení speciálních pojmů: Čechův-Stoneův obal spočetného diskrétního prostoru má kompaktní separabilní podprostor, jenž není jeho retraktem.

Analytické prostory

Jedním z těch topologických pojmů, které mají „uzlový" charakter, je pojem analytického (Suslinova) prostoru. „Uzlový" je v tom smyslu, že se dá charakterizovat několika zcela rozdílnými způsoby, a také v tom smyslu, že zasahuje do rozmanitých disciplín. V klasickém případě separabilních metrických prostorů lze analytický prostor definovat jako spojitý obraz úplného prostoru anebo jako výsledek Suslinovy množinové operace použité na kompaktní množiny. Poznamenejme, že v klasickém případě borelovské množiny jsou analytické, ale analytické množiny nemusí být borelovské a komplement analytické množiny nemusí být analytický; jestliže je analytickým, pak již původní množina i doplněk jsou borelovské. Máme zde podivuhodnou analogii, která ještě není plně osvětlena, se situací u rekurzívních a rekurzívně spočetných množin.

Význam klasických analytických prostorů i konkrétní potřeby některých disciplín vedly k zobecňování. První významné soustavné vysledky vznikly ve Francii kolem r. 1953. V r. 1961 se tato problematika začala zkoumat u nás a stále se v tom pokračuje. Intenzívně se pracuje také jinde, československý (konkrétněji, pražský) přínos je však velmi podstatný; to je patrné např. z toho, že některé výsledky (spíše z počátečního období tohoto výzkumu) jsou již v encyklopedii — viz *Matematičeskaja enciklopedija*, sv. 1—5, Moskva 1977—1985; sv. 1, stať *Analitičeskoje množestvo.*

Pro nedostatek místa není možné zde uvádět jednotlivé výsledky. Proto jen popíši význam jedné věty z r. 1970. Nechť zobrazení $\varphi : P \to S$ je měřitelné v tom smyslu, že je-li funkce f na S baireovská, pak také $f \circ \varphi$ je baireovská. Obecně pak z toho, že $f \circ \varphi$ je baireovská, neplyne, že by f byla baireovská na $\varphi(P)$, a prostor $\varphi(P)$ může mít „ošklivé" vlastnosti. To je jistá nepříjemnost; její dosah je patrný, jestliže si uvědomíme, že potíže tohoto typu jsou v teorii pravděpodobnosti tak podstatné, že se vážně uvažuje (to je také ve zmíněné encyklopedii — viz např. sv. 4, stať *Raspredělenije verojatnostěj*) o revizi jejích základů v tom smyslu, že by se za pravděpodobnostní míry považovaly jen ty normované míry, které splňují jisté další požadavky. Zmíněná věta právě říká, že je-li P analytický a S metrizovatelný, pak se zmíněné potíže nevyskytují a $\varphi(P)$ je analytický.

Uniformní prostory

V teorii uniformních prostorů se u nás intenzívně pracovalo v Praze (v MÚ ČSAV i na MFF UK) zhruba od r. 1972 (jednotlivé práce se vyskytly i dříve). Šlo o rozmanité a poměrně složité otázky, proto popíši jen některé výsledky, zejména pokud se dají poměrně snadno osvětlit, a jinak jen naznačím některé hlavní směry práce. — Celková informace, byť nutně neúplná, o těchto směrech se dá najít např. v přehledných článcích Z. Frolík, *Recent development of theory of uniform spaces* (část A sborníku IV. pražského topologického sympozia, str. 98—108) a Z. Frolík, M. Hušek, J. Pelant, V. Rödl, J. Vilímovský, *Uniform spaces* (*selected topics*), sborník V. pražského topologického sympozia, str. 206—214.

V první polovině sedmdesátých let byly u nás získány důležité výsledky týkající se obecných otázek struktury uniformních prostorů. Jak známo, uniformní prostor lze popsat tak, že se udá jeho báze (přesněji uniformní báze pokrytí), tj. soustava pokrytí, splňující jisté podmínky; uniformní pokrytí jsou pak ta, která jsou zjemňována některým pokrytím z této soustavy. Uniformní prostor má ovšem mnoho bází; naskýtá se obecná otázka, zda, popř. kdy lze bázi utvořit z pokrytí, která mají v jistém smyslu „dobré vlastnosti" (to se ovšem musí specifikovat). V úvahu připadají zejména vlastnosti kombinatorické povahy, mezi nimi např. bodová konečnost (soustava množin je bodově konečná, jestliže každá nekonečná podsoustava má prázdný průnik). V souvislosti s tím, že metrizovatelný prostor má libovolně jemná lokálně konečná pokrytí, je na první pohled plauzibilní ta domněnka, že uniformní prostor má vždy bázi z bodově konečných pokrytí. Tato domněnka byla v Praze vyvrácena a zároveň byla nalezena podmínka, která je nutná a stačí k tomu, aby prostor takovou bázi měl (přesná formulace podmínky je uvedena ve druhém z citovaných přehledných článků).

Zastavil jsem se u tohoto výsledku poměrně dlouho proto, že se jeho obsah dá poměrně snadno vyložit a že povaha kladené otázky je dosti typická pro určitý styl výzkumu v topologii, jakož i proto, že se jeho důkaz opírá o obtížné úvahy kombinatorické povahy.

Uvedu teď další poněkud podobný problém, který přitom přímo souvisí s funkcionální analýzou a s teorií míry. Máme-li uniformní prostor X, pak rozkladem jednotky na X nazýváme soubor $(f_a : a \in A)$ stejnoměrně spojitých nezáporných funkcí na X takový, že $\Sigma f_a = 1$; navíc budeme požadovat, aby zobrazení $x \mapsto (f_a(x) : a \in A)$ do prostoru $l_\infty(A)$ bylo stejnoměrně spojité. Poměrně brzy se zjistilo, že pokrytí vytvořená pomocí rozkladů jednotky tvoří vždy bázi uniformního prostoru (míním teď pokrytí, která se dostanou tak, že se vezme rozklad jednotky (f_a) a pro každé a se vezme množina bodů, v nichž je f_a kladné). Vznikla pak otázka po zostření: dá se požadovat, aby zobrazení $x \mapsto (f_a(x) : a \in A)$ bylo stejnoměrně spojité vzhledem k l_p-normě, kde $1 \leqq p < \infty$? Pro $p > 1$ vyjde poměrně snadno kladná odpověď (pro libovolný uniformní prostor X). Proto poněkud překvapil následující výsledek, nalezený rovněž v Praze: je velmi mnoho prostorů, u nichž rozklady (f_a) takové, že $x \mapsto (f_a(x) : a \in A)$ je stejnoměrně spojité v l_1-normě, nestačí k vytvoření báze uniformity; mezi takové prostory patří např. všechny normované lineární prostory nekonečné dimenze. Výsledek souvisí s teorií uniformních měr, o nichž ještě bude řeč. Důkaz je obtížný a využívá dosti jemných vět, zejména z teorie Banachových prostorů. — Viz druhý z citovaných přehledných článků.

Ještě jeden výsledek uvedu poněkud podrobněji. Již dávno (bylo to v podstatě již u R. Bairea) je známo toto: jestliže f a g jsou reálné funkce na metrickém prostoru, $f \geqq g$, f je zdola polospojitá, g je shora polospojitá, pak mezi ně lze vložit spojitou funkci φ („mezi ně" zde znamená $f \geqq \varphi \geqq g$); tvrzení platí též s ostrou nerovností místo neostré. Toto tvrzení bylo různě zobecňováno. Poměrně nedávno (1978) bylo pak v Praze podáno řešení obdobného problému pro uniformní prostory, přičemž dosavadní výsledky pro topologické prostory se dostanou jako koroláry. Důkazy mají v jistém smyslu kombinatorický ráz. — Viz D. Preiss, J. Vilímovský, *In-between theorems in uniform spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. *261* (1980), 483—501.

Řadu dalších tematických okruhů přejdu teď jen zmínkou; musím to učinit proto, že u nich by byl výklad výsledků příliš dlouhý. Velmi mnoho se vykonalo v problematice kategoriálního stylu (reflexe, koreflexe, různé druhy tzv. jemných uniformit), v otázkách přenášení, většinou naprosto netriviálního, pojmů a výsledků teorie topologických prostorů do teorie prostorů uniformních apod.

Na závěr výkladu o uniformních prostorech uvedu ještě stručně teorii uniformních měr, vybudovanou v Praze. Mírou se v tom, co teď budu popisovat, rozumí lineární funkcionál na jistém prostoru funkcí definovaných na daném prostoru; na funkcionál se ovšem kladou určité požadavky. Přechod od takto pojaté míry k míře jako aditivní, popř. spočetně aditivní množinové funkci není automatický, ale v řadě případů se dá hladce provést. Konkrétněji, jde nyní o případ, kdy se zabýváme uniformními prostory X; vezmeme Banachův prostor omezených stejnoměrně spojitých funkcí na X a jeho duál; tento duál opatříme vhodnou topologií, kterou zde nebudu popisovat. Nazveme nyní uniformní mírou na X každý prvek zmíněného duálu, který lze libovolně dobře aproximovat pomocí konečných lineárních kombinací evaluací (evaluací míním funkcionál, který funkci přiřazuje její hodnotu v pevně zvoleném bodě). Ukazuje se, že prostor uniformních měr na X je — ve smyslu, který je v zásadě nasnadě, musí se však precizovat — úplným volným obalem daného uniformního prostoru X. Setkávají se zde tedy, jak je patrné, dvě myšlenky: idea volného obalu, popř. volného útvaru, která má původ hlavně v algebře, jejíž uplatnění je však mnohem širší, a idea aproximace pomocí prvků finitní povahy (konkrétněji: aproximace integrálu spojité funkce vhodnou konečnou lineární kombinací funkčních hodnot). Základní myšlenky jsou tedy vlastně jednoduché. To, že vzniklé pojmy opravdu fungují, je pozoruhodný fakt; potřebný aparát není vůbec jednoduchý a vstupují do něj mimo jiné pojmy (metricky jemná uniformita), které v jistém smyslu patří do kategoriální topologie. Na uvedeném základě se pak rozvíjí hluboká teorie; jeden z problémů je, velmi zhruba řečeno, tento: kdy se dá od uniformní míry přejít ke spočetně aditivní míře (v běžném smyslu). Ukazuje se, že pro metrizovatelné X to jde právě tehdy, když prostor X je úplný. — Viz Z. Frolík, *Mesures uniformes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B 277 (1973), A 105—A 108; *Représentation de Riesz des mesures uniformes*, ibid. A 163—166. Dodávám, že recenze v Math. Reviews (MR 48: 2336, 2337) dává velmi stručný, ale poměrně výstižný přehled přístupů a výsledků.

Některé další struktury

V posledních desítiletích byly u nás zkoumány rozmanité topologické struktury (používá se též názvu „struktury spojitosti") jiné, než jsou uzávěrové struktury, topologie, uniformity, proximity. Některé z nich se vyskytly jen epizodicky, a proto nebudu o nich mluvit. Jen zmínkou uvedu „bezbodovou topologii", protože se u nás na této problematice začalo pracovat docela nedávno; poznamenám jen to, že získané výsledky již vzbudily jistou pozornost v zahraničí. Trochu podrobněji se zmíním o prostorech určených zadáním konvergentních posloupností neboli L-prostorech; připojím pak několik slov o jedné další struktuře.

Pojem L-prostoru je asi ještě starší než pojem topologického prostoru (resp. jeho přesná formulace); datuje se od r. 1906, dlouho však nebyl detailně zkoumán. U nás vznikly první práce o L-prostorech ještě před válkou. Soustavně pracující skupina, byť malá, začala však vznikat až zhruba v polovině sedmdesátých let v Praze (v MÚ ČSAV); podstatný přínos přichází nyní též ze Slovenska a přitom leckdy ve společných pracích; v případě L-prostorů se proto nutně musí mluvit o výsledcích z obou národních republik.

Výsledky získané v teorii L-prostorů lze celkově charakterizovat takto: mezi těmito prostory a prostory topologickými (popř. uzávěrovými) je řada analogií; některé z nich jsou podstatné, jiné jsou jen zdánlivé, neboť po příslušné stránce je situace v obou kategoriích podstatně odlišná. Vyjasnění těchto otázek bylo již do značné míry uskutečněno a československý podíl na tom je značný.

Ačkoli jinak zde neprobírám algebraické struktury opatřené topologií apod., je třeba dodat, že důležitou oblastí s mnoha otevřenými problémy je např. teorie grup opatřených strukturou L-prostoru. Také v této problematice se u nás úspěšně pracuje.

Přehled některých hlavních výsledků v teorii L-prostorů je obsažen v těchto článcích: J. Novák, *On some problems concerning convergence spaces and groups* (ve sborníku konference v Kanpuru, 1968, vydaném v Praze, Academia 1971; str. 219–229) a R. Frič, V. Koutník, *Sequential convergence since Kanpur conference* (sborník V. pražského topologického sympozia, str. 193–205).

Pro úplnost řeknu ještě několik slov o zcela jiné kategorii, totiž o merotopických prostorech. Dají se získat např. precizací intuitivního pojmu soustavy obsahující libovolně malé množiny; zahrnují jako speciální případ (podkategorii) topologické a uniformní prostory, jakož i L-prostory. Prací o těchto prostorech u nás bylo poměrně málo, měly však jistou odezvu v zahraničí. – Některé výsledky (i s příslušnými odkazy) jsou uvedeny v tomto přehledném článku: H. Herrlich, *Categorical topology 1971–1981* (sborník V. pražského topologického sympozia, str. 279–383).

Na závěr této části uvedu dva stručné doplňky. Topologie nyní úzce souvisí s teorií množin: některá tvrzení platí jen za určitých množinových předpokladů (nejznámějším z takových předpokladů je hypotéza kontinua); některá topologická tvrzení jsou přímo ekvivalentní s jistými množinovými předpoklady. Někdy se pouze dokazuje, že jisté tvrzení je slučitelné s obvyklou axiomatickou teorií množin, popř. že je na ní nezávislé. Stává se také, že se při zkoumání topologických objektů zavedou zcela určité kardinály, o nichž však není možné rozhodnout, zda jsou stejné či nikoliv; někdy se zase podaří dokázat v běžné teorii množin, že jsou si rovny. Výsledky bezprostředně souvisící s teorií množin některým z uvedených a podobných způsobů se ovšem nezřídka vyskytovaly také v našich topologických pracích.

Druhý doplněk se týká teorie tzv. fuzzy množin, jejichž zařazení v matematice se ještě neustálilo. V této teorii je základním pojmem stupeň náležení (prvku do množiny). Jestliže tento stupeň má jen hodnoty 0 a 1, dostáváme obvyklé množiny. Jinak, např. připouští-li se jako stupeň náležení též každé číslo mezi 0 a 1, dostáváme podstatně odlišný pojem. V teorii fuzzy množin se u nás (v Praze) po jistou dobu pracovalo dosti intenzívně a dosáhlo se cenných výsledků. – U fuzzy množin není snadné udat plně vyhovující odkaz. Uvedu nejnovější soubornou publikaci: *Aspects of Vagueness*, jež vyšla v r. 1984 v nakladatelství D. Reidel jako sv. 39 série Theory and Decision Library; obsahuje též některé pražské výsledky.

II. Teorie kategorií

Teorie kategorií je mladá disciplína, o hodně mladší než obecná topologie. Dá se říci, že plnoletosti dospěla v r. 1968 – v tom smyslu, že tehdy dostala v Mathematical Reviews svou vlastní velkou rubriku (18. Category theory, homological algebra). U nás se první práce z teorie kategorií objevila v r. 1963. Určitou úlohu v tom měla série přednášek o kategoriích, kterou měl v Praze známý algebraik prof. A. G. Kuroš (již zesnulý). Jinak však je československou specialitou, že teorie kategorií se u nás od samého začátku rozvíjela v dosti úzkém vztahu k obecným matematickým strukturám, zejména k tzv. strukturám spojitosti. Nyní se rozvíjí v Praze i v Brně; v Praze zejména na MFF UK, velmi podstatný je však také přínos jednotlivých pracovníků z ČVUT. To, na čem se pracuje u nás, pokrývá ovšem jen některé části celé teorie kategorií, v těchto částech jde však namnoze o podstatný příspěvek ke světovému vývoji.

U teorie kategorií vyberu jen několik málo témat. Poněkud podrobněji budu mluvit o vnořování, dosti stručně o kategoriální teorii automatů; pak budu mluvit o otázkách, které by se daly probírat také v rámci topologie, totiž o kategoriální topologii a o speciálním, ale velmi zajímavém tematickém okruhu, totiž o tzv. součinových reprezentacích.

Pouze zmínku mohu věnovat významné práci konané v Brně. Svým zaměřením se dosti liší od pražských směrů; jen pro orientaci uvedu, že souvisí mj. např. s teorií modelů a s infinitárními jazyky.

Řadu dalších témat musím přejít bez zmínky; chci jen zdůraznit, že práce v teorii kategorií má u nás významné souvislosti nejen s topologií a kombinatorikou, ale i s různými jinými blízkými i zdánlivě vzdálenějšími obory — s univerzální algebrou, se širšími základy informatiky aj.

Vnořování

Vnořovací věty se vyskytují, jak známo, ve všech abstraktnějších oborech matematiky. V algebře jsou leckdy triviální (příklad: každou grupu lze vnořit do grupy permutací dostatečně velké množiny); obtížné a hlubší jsou tam spíše věty o izomorfismu (ve smyslu patrném z následujícího příkladu: každá grupa je izomorfní s grupou všech automorfismů vhodného topologického prostoru). V případě kategorií je již problematika vnořování dosti obtížná. Dosáhlo se v ní u nás výsledků, které významně přispěly ke světovému vývoji; jejich značná část byla shrnuta (samozřejmě spolu s poznatky získanými v jiných zemích) v této monografii: A. Pultr, V. Trnková, *Combinatorial, algebraic and topological representation of groups, semigroups and categories*, North-Holland, 1980.

Uvedu teď jako ukázku některé jednotlivé výsledky.

Každou malou kategorii („malá" znamená, že třída objektů je množina) lze úplně vnořit do kategorie univerzálních algeber s jednou binární operací (anebo: s dvěma unárními operacemi). Každou kategorii, která se dá vnořit do kategorie množin, lze úplně vnořit do kategorie parakompaktních prostorů (připomínám, že úplnost vnoření f zde znamená toto: pro libovolné objekty x, y se množina všech morfismů z objektu x do objektu y zobrazuje na celou množinu morfismů z $f(x)$ do $f(y)$). Za jistého množinového předpokladu (dostatečně velké kardinály už nemohou být měřitelné) lze místo parakompaktních vzít metrizovatelné anebo kompaktní Hausdorffovy prostory. — Pro zajímavost uvedu ještě obdobný výsledek, který se týká regulárních prostorů bez spojitých funkcí (kromě konstant). To, že existují netriviální prostory tohoto druhu, byl jeden z význačných výsledků získaných u nás v období 1945—1959, jak již o tom byla zmínka. Ukazuje se, že třída zmíněných prostorů se po vhodné úpravě (musíme se zbavit konstantních zobrazení) stává „univerzální“ kategorií. Z toho pak ihned plyne např. existence vlastní třídy navzájem „neporovnatelných“ (v jistém silném smyslu) regulárních prostorů bez nekonstantních spojitých funkcí. Za zmíněného množinového předpokladu máme také obdobné tvrzení o existenci vlastní třídy navzájem neporovnatelných kompaktních Hausdorffových prostorů.

Mluvil jsem teď pouze o vnořování do kategorií objektů topologické povahy. Je také řada neméně pozoruhodných výsledků týkajících se vnořování do jiných konkrétně specifikovaných kategorií algebraické a kombinatorické povahy; nebudu je probírat a odkazuji na zmíněnou monografii.

Může se naskytnout otázka, v čem je vlastně – z širšího hlediska – význam uvedených vnořovacích vět. Přesto, že mohou mít aplikace v různých oblastech matematiky, domnívám se, že mají především obecný poznávací význam. Řeší totiž v důležitých speciálních případech obecný problém zásadní důležitosti, totiž otázku, do jaké míry a jak se dají velmi abstraktní systémy (leckdo by řekl „volné výtvory lidského ducha“) realizovat pomocí konkrétnějších objektů, jež jsou mnohem více, třebaže ne bezprostředně, spjaty se zkoumáním konkrétní reality.

Automaty

Pojem sekvenčního stroje (čili automatu) v kategorii zavedli v r. 1975 M. A. Arbib a E. G. Manes. Na práci těchto autorů navázala velmi brzy pražská skupina a podstatným způsobem rozvinula a prohloubila jejich koncepci. Kdyby se mělo popsat aspoň trochu přesně, o co vlastně jde, bylo by nutné zavést řadu pomocných pojmů. Omezím se proto jen na stručný náznak. Automat v běžném nejjednodušším smyslu lze popsat, odhlédneme-li teď pro jednoduchost od výstupů, následujícím způsobem. Je dána množina Σ možných vstupů, množina Q vnitřních stavů a zobrazení $d : Q \times \Sigma \to Q$ (pravidlo přechodu). Je-li automat na začátku ve stavu q_0 a přijde vstup σ_0, pak další stav je $d(q_0, \sigma_0)$; je-li další vstup σ_1, pak přejde do stavu $d(q_1, \sigma_1) = d(d(q_0, \sigma_0), \sigma_1)$ atd. Všimněme si nyní, že zobrazení $Q \mapsto Q \times \Sigma$ dává množinový funktor (množinový funktor je definován tím, že převádí množiny v množiny a zobrazení v zobrazení, přičemž jsou splněny jisté přirozené požadavky; příklad množinového funktoru: $X \mapsto X \times X$, $f \mapsto f \times f$). Zaveďme tedy (zase odhlížíme pro jednoduchost od výstupů) „sekvenční stroje typu F“ (kde F je množinový funktor) takto: stroj typu F je dán dvojicí (Q, d), kde Q je množina, d je zobrazení množiny FQ do Q. Jak je patrné, je-li F funktor $Q \mapsto Q \times \Sigma$, Σ pevné, dostáváme obyčejné automaty. V obecném případě však není na první pohled jasné ani to, co vlastně máme chápat jako chování automatu apod. Poněkud překvapivě se však ukazuje, že pojem „stroje typu F“ funguje velmi dobře a dává pěknou, zajímavou a podnětnou teorii, v níž, jak jsem již řekl, byly právě u nás získány podstatné výsledky. Zda tato teorie má aplikace, není ovšem jasné; jednou je asi bude mít, třebaže možná jen zprostředkovaně. – Dosti podrobnou informaci o problematice automatů v kategoriích lze získat v této práci: J. Adámek, V. Trnková, *Varietors and machines in a category*, Algebra Universalis 13 (1981), 89–132.

U této tematiky se nebudu snažit o uvedení konkrétních výsledků, ale spíše o osvětlení celkové povahy tohoto úseku.

Kategoriální topologii zde budeme chápat (jsou možná i odlišná vymezení) jako zkoumání topologických kategorií, jejich vlastností a vzájemných vztahů. Mělo by se ovšem říci, co je topologická kategorie; to však lze učinit nejdříve výčtem (topologické prostory, uniformní prostory atd.) a pak třeba nějakým prozatímním způsobem. Jde zde o abstrakci vyššího stupně: kdysi se zkoumaly jednotlivé prostory, pak např. souhrn (kategorie) všech topologických prostorů, a v kategoriální topologii takový souhrn vystupuje jako jeden z neomezeně mnoha předmětů zkoumání.

Kategoriální topologie je na pomezí obecné topologie a teorie kategorií. Co se v ní zkoumá, osvětlím příkladem jedné důležité vlastnosti: kategorie je kartézsky uzavřená, jestliže při přirozeném zavedení mocnin (což zhruba řečeno odpovídá prostorům spojizých zobrazení) jsou splněny některé základní požadavky jako např. $A^{B \times C} = (A^B)^C$. Ptáme se: které topologické kategorie jsou kartézsky uzavřené? Jiný příklad: již E. Čech zkoumal některé konkrétní modifikace prostorů (nejběžnější je modifikace, která uzávěrovému prostoru přiřazuje příslušný topologický prostor); později se zkoumaly četné jiné modifikace, např. ta, která přiřazuje uniformnímu prostoru totálně omezený uniformní prostor (jenž vznikne tak, že bereme v úvahu jen konečná uniformní pokrytí). Pojem modifikace se však dá precizovat a zahrnout do rámce kategoriálních pojmů; stává se pak předmětem zkoumání v kategoriální topologii.

Československé výsledky týkající se kategoriální topologie vznikaly v Praze (převážně na MFF UK) a později též v Brně. Bez dlouhého úvodu není možné uvést ukázky, a proto se zmíním konkrétněji jen o jednom úseku, který se u nás zkoumal již od počátku šedesátých let.

Jde o problematiku způsobů a „mechanismů" vytváření struktur topologické i jiné povahy, zejména o zavádění typů struktur pomocí množinových funktorů. Toto zavádění osvětlím na relativně elementárním příkladě. Vezmeme za východisko tuto strukturu: struktura (říkejme jí na chvíli E-struktura) na množině X je prostě jistý filtr na X. Nechť nyní S je množinový funktor (tj. S převádí množinu v množinu, zobrazení v zobrazení, přičemž jsou splněny jisté přirozené požadavky). Potom (při zmíněné volbě výchozího typu struktur) je struktura typu S na X prostě E-struktura na $S(X)$, tj. filtr na $S(X)$. Je-li např. S funktor, který převádí Q v $Q \times Q$, pak Q-struktura na X je prostě filtr na $X \times X$; přidáme-li známé potřebné požadavky, máme uniformní prostory. Způsobem, který jsem teď naznačil, lze dostat např. tyto typy prostorů: uzávěrové prostory, uniformní prostory, Csaszárovy syntopogenní prostory atd.

Pro řadu dalších českých prací týkajících se kategoriální topologie je charakteristické to, že výsledky relevantní pro tento obor vznikaly v nich často při práci na obvyklé hladině, tj. v rámci konkrétně specifikovaných kategorií.

Řada našich výsledků v kategoriální topologii je uvedena ve zmíněném přehledném článku H. Herrlicha (sborník V. pražského topologického sympozia). Poznamenávám, že článek obsahuje velmi rozsáhlou bibliografii, zhruba za období 1971 – 1981; české práce v ní tvoří více než 10 procent.

Součinové reprezentace

Jde vlastně o poměrně speciální topologickou tematiku. Je však velmi zajímavá a způsobem kladení otázek („co všechno se může stát?“) je dosti typická pro některé úseky abstraktnějších oborů matematiky. Ke kategoriím přičleňuji tuto tematiku proto, že kladené otázky se snadno přenášejí do každé kategorie (pokud v ní lze zavést kartézské součiny) a také proto, že při důkazech příslušných vět se používalo obecných kategoriálních idejí.

Jednu z nejjednodušších otázek patřících do tohoto okruhu lze uvést takto: Je-li X Cantorovo diskontinuum, pak X je homeomorfní s každým X^n; je-li X jednotkový interval, pak X^m a X^n, kde $m \neq n$, nejsou nikdy homeomorfní. Ptáme se, zda může nastat nějaká jiná situace. – Poznamenávám, že jsou různé jiné poněkud podobné otázky, např. zda se může stát, že X není homeomorfní s Y, ale X^2 a Y^2 jsou navzájem homeomorfní (tento problém položil S. Ulam přibližně před 50 lety, kladná odpověď se objevila brzy po válce, kladná odpověď ve třídě uzavřených podprostorů Cantorova diskontinua až o čtvrt století později).

U nás se na této problematice pracovalo intenzívně a úspěšně zhruba od začátku sedmdesátých let; podotýkám, že také v zahraničí jí byla (v případě topologických prostorů i jiných struktur) věnována poměrně značná pozornost. Prvním důležitým pražským výsledkem byla konstrukce lokálně kompaktního metrického prostoru X, jenž není homeomorfní s X^2, ale je homeomorfní s X^3. Problém se pak zobecnil takto: Vezmeme třídu všech typů (vzhledem k homeomorfismu) topologických prostorů určitého druhu a opatříme ji operací odpovídající kartézskému součinu. Ptáme se, které komutativní pologrupy lze do ní vnořit. Odpověď, získaná u nás, je ta, že lze vnořit každou komutativní pologrupu (jde ovšem stále o pologrupy na množině, nikoli na vlastní třídě), a to i v případě, že se omezíme na úplné metrické prostory. V případě absolutně borelovských separabilních prostorů se dá takto vnořit každá spočetná komutativní pologrupa, ale také aditivní grupa reálných čísel. V případě kompaktních metrizovatelných prostorů nulové dimenze se však nedá vnořit žádná netriviální pologrupa; v případě kompaktních metrizovatelných prostorů se dají vnořit pologrupy o jednom generátoru, pro složitější pologrupy však je problém otevřený. S uvedenými výsledky souvisí řada jiných poznatků a problémů; není však již možné se jimi zde zabývat. – Pro podrobnější informaci o některých podstatných výsledcích odkazujeme na článek: V. Trnková, *Representations of commutative semigroups by products of topological spaces* (sborník V. pražského topologického sympozia, str. 631 – 641).

III. Kombinatorika

Jak známo, kombinatorika se po různých stránkách značně liší od oblastí, o kterých byla dosud řeč. Nedá se — aspoň v nynější době — pojmout jako zkoumání struktur přesně vymezených typů, třebaže některé její významné součásti již tento charakter mají a jiné ho možná brzy budou mít; je sjednocována hlavně určitým stylem uvažování a intuice. S tím souvisí také ta okolnost, že není úplná shoda v tom, co do kombinatoriky patří a co již ne. Kombinatorika náleží mezi ty oblasti matematiky, jejichž vývoj byl značně ovlivněn konkrétními úlohami, často aplikačního rázu. Kombinatorika přitom zasahuje fakticky skoro do všech oblastí matematiky (že je tomu tak u topologie a kategorií, bylo již poněkud naznačeno).

Kombinatorika jako oblast matematiky vznikla již velmi dávno. Její opravdu intenzívní vývoj ve světovém měřítku však nastává až asi 10—15 let po druhé světové válce; kolem r. 1960 nabývá pevné podoby jedna z prvních ucelených a zároveň aplikačně významných teorií v rámci kombinatoriky, totiž teorie toků v sítích; přibližně v téže době se také objevují první moderní knihy (zčásti úvodní povahy) z oblasti kombinatoriky včetně grafů.

Vývoj kombinatoriky u nás je celkem ve shodě s průběhem světového vývoje. Až do začátku šedesátých let se pracuje hlavně v MÚ ČSAV. Práce tam pak stále pokračuje; podstatnou její část tvoří zkoumání grafů a matic ve vzájemné souvislosti a ve vztahu k jiným matematickým oborům.

Přechod do dalšího období, které lze vymezit roky 1964 až 1972, je vyznačen mezinárodní konferencí ve Smolenicích v r. 1963, která podstatně ovlivnila další vývoj v kombinatorice u nás. V uvedeném období se rozsah práce rozšiřuje; začíná se pracovat též v Brně a v Liberci. Z brněnské tematiky připomenu v této souvislosti otázku hamiltonovských kružnic v mocninách grafu. V Praze se na MFF UK práce v tomto období silně orientuje na tematiku, která se ve světě předtím skoro nevyskytovala, totiž na kombinatorické aspekty teorie struktur a kategorií. Šlo zejména o otázky reprezentace struktur pomocí grafů. Získané výsledky byly neméně cenné než výsledky obdobné povahy související s topologií, o nichž byla řeč v části věnované kategoriím; potřebnou informaci lze najít v citované monografii A. Pultra a V. Trnkové.

V následujícím období, které začíná zhruba v r. 1973 a stále trvá, dochází u nás v kombinatorice k dalšímu růstu — jak v počtu pracovníků (působících na různých pracovištích — v Praze např. kromě MFF UK též na ČVUT), tak v počtu článků, v šíři tematiky, v rozmanitosti používaných metod a souvislostí s jinými obory, a zároveň také v hloubce řešených problémů.

Proberu teď stručně tři oblasti práce v kombinatorice: rozklady, matroidy, grafy. Z dalších směrů práce uvedu jen názvy tří tematických okruhů: problematika výpočetní složitosti, otázky optimalizace (např. asymptoticky optimální kódy), otázky existence rychlých algoritmů; od odkazů u nich upouštím (obdobně a z obdobných důvodů jako na několika jiných místech): přehledné články patrně neexistují, a bylo by velmi obtížné vybrat ze souhrnu původních prací několik článků tak, aby poskytly nezkreslený obraz.

Rozklady

Důležitou tematiku, v níž se dosáhlo vynikajících výsledků, tvoří teorie rozkladů (která se patrně začíná utvářet v poměrně ucelenou disciplínu uvnitř kombinatoriky). Připomenu nejdříve, o co jde. Klasickými příklady tvrzení o rozkladech jsou van der Waerdenova a Ramseyova věta. Van der Waerdenova věta říká toto: rozložíme-li množinu přirozených čísel na konečně mnoho množin, pak aspoň jedna z nich obsahuje libovolně dlouhé konečné aritmetické posloupnsoti. Ramseyova věta říká (v jedné z mnoha formulací Ramseyova základního výsledku) toto: pro libovolná kladná celá čísla k, p, r existuje celé kladné n takové, že platí: jestliže máme množinu o n prvcích, vezmeme soustavu všech těch jejích podmnožin, které mají k prvků, a libovolný rozklad této soustavy na p podsoustav, pak vždy existuje množina o r prvcích, jejíž všechny k-prvkové podmnožiny náleží do stejné podsoustavy ze zmíněného rozkladu (pro názornost ještě uvedu speciální případ: pro každé r existuje n tak, že má-li množina X aspoň n prvků a je-li τ libovolná symetrická binární relace na X, pak existuje množina $Y \subset X$ o r prvcích taková, že buď každá dvojice (y_1, y_2), kde $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, patří do τ, anebo žádná taková dvojice do τ nepatří.

U nás byly dokázány významné další věty Ramseyova typu. Jednu z nich uvedu explicite: ke každému konečnému grafu G, jenž nemá kliky (plné podgrafy) o velikosti větší než m, a každému $r > 1$ existuje konečný graf H, jenž rovněž nemá kliky o velikosti $> m$ a jenž podstatně obsahuje G, čímž míním toto: když obarvíme hrany H, tj. rozdělíme je do r skupin, pak v H je „monochromatický“ podgraf izomorfní s G. – Viz J. Nešetřil, V. Rödl, *Ramsey property of graphs with forbidden complete subgraphs*, J. Combin. Theory, ser. B *20* (1976), 243–249.

Další velmi významný výsledek uvedu jen heslovitou zkratkou: „obecné relační struktury daného typu mají Ramseyovu vlastnost“. Formulace tvrzení i důkaz zde používají podstatně myšlenky teorie kategorií, a důkaz je dosti nesnadný. – Viz J. Nešetřil, V. Rödl, *Partition of finite relational and set systems*, J. Combin. Theory, ser. A *22* (1977), 289–312.

Uvedené výsledky byly již použity v matematické logice, a to v problematice modelů Peanovy aritmetiky (F. G. Abramson, L. A. Harrington, J. Symbolic Logic *43* (1978), 572–600), a v teorii ultrafiltrů (J. E. Baumgartner, A. D. Taylor, Trans. Amer. Math. Soc. *241* (1978), 283–309).

Poznamenejme ještě, že také původní Ramseyova věta velmi úzce souvisí s logikou. Jisté její zostření, zdánlivě nepatrné, se totiž dá dokázat běžným způsobem s použitím nekonečných množin; v obvyklé formalizované Peanově aritmetice však důkaz neexistuje. S tímto faktem souvisí řada dalších otázek; některé z nich jsou u nás nyní předmětem zkoumání.

Matroidy

Pojem matroidu lze získat vhodnou abstrakcí z různých verzí pojmu „nezávislé množiny“ (např. nezávislé množiny bodů v lineárním prostoru). Lze jej získat i různými jinými způsoby; naznačím ten, který má souvislost s topologií. Uvažujme uzávěrové prostory v nejširším Čechově smyslu (nepožaduje se, aby uzávěr sjednocení dvou množin byl sjednocením uzávěrů). Budeme požadovat, aby jednoprvkové množiny a uzávěry byly uzavřené; položíme požadavek „konečného generování“ (uzávěr množiny je sjednocením uzávěrů jejích konečných částí) a jeden další požadavek. Dostáváme pak přesně matroidy („nezávislé množiny“ jsou právě ty, které jsou topologicky diskrétní).

Pojem matroidu souvisí, jak je poněkud patrné již z toho, co jsem uvedl, s řadou matematických disciplín a má v nich důležité aplikace. Jeden z podstatných výsledků, který byl u nás získán v teorii matroidů, je — zhruba řečeno — ten, že pro matroidy platí dosti silná věta Ramseyova typu. — Viz J. Nešetřil, S. Poljak, D. Turzík, *Amalgamation of matroids and its applications*, J. Combin. Theory Ser. B *31* (1981), 9—22.

Přidám ještě jednu — podle mého názoru důležitou — historickou poznámku. Pojem matroidu se u nás fakticky vyskytl (v jiné formulaci) již v r. 1926 v jedné práci O. Borůvky (viz sborníky prací Moravské přírodovědecké společnosti, sv. III, spis 3), pro niž byla podnětem jistá úloha praktického rázu. Na tento článek pak navázal v r. 1930 V. Jarník (tamtéž, sv. VI, spis 4). Tyto články, jež ve své době celkem zapadly, byly fakticky také, jak se zdá, prvními československými pracemi z kombinatoriky. Dodávám ještě, že soustavnější studium matroidů začíná ve světě až ve třicátých letech u H. Whitneyho.

Grafy

V teorii grafů se u nás vykonala rozsáhlá a významná práce. Tematická šíře byla značná; proto jen naznačím některé směry práce; upustím od zmínek o aplikacích a převážnou většinou také od odkazů.

Na MFF UK byl zaveden a prozkoumán nový, významný pojem dimenze grafu definované pomocí vnoření do jistého druhu součinu nejjednodušších grafů. Toto pojetí souvisí bezprostředně s pojmem subdirektní reducibility, známým zejména z algebry, a zapadá do široké problematiky složitosti vytváření objektů ze zadaných jednoduchých útvarů. — Viz L. Lovász, J. Nešetřil, A. Pultr, *On a product dimension of graphs*, J. Combin. Theory Ser. B *29* (1980), 47—67, A. Pultr, J. Vinárek, *Productive classes and subdirect irreducibility, in particular for graphs*, Discrete Math. *20* (1977/78), 159—176.

Rovněž v Praze (na MFF UK, FJFI ČVUT a MÚ ČSAV) byly zkoumány otázky barevnosti a přitom byly vyřešeny některé známé dlouho otevřené problémy. Na popis těchto výsledků není zde dost místa; proto jen upozorním, že při tomto zkoumání se uplatnily konstrukční postupy i nekonstruktivní existenční důkazy používající metod teorie pravděpodobnosti a také postupy, jimiž se dokazuje neexistence algoritmů určitého druhu.

Z dalších úseků uvedu jen zmínkou turnaje (turnaj je orientovaný graf, který dostaneme, když každý se utká s každým a remisy nejsou možné) a náhodné grafy.