Sylvia Pulmannová

Axiomatizácia fyzikálnych systémov a „kvantové logiky"

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 28 (1983), No. 5, 247--258

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139419

Veřejné zasedání zakončil rektor Univerzity Karlovy prof. JUDr. Zdeněk Češka, člen korespondent ČSAV.

Potom setrval akademik Marčuk v delší přátelské besedě s představiteli MFF UK a ústavů ČSAV.

Axiomatizácia fyzikálnych systémov a „kvantové logiky“

Sylvia Pulmannová, Bratislava

1. Úvod

Začiatok éry modernej kvantovej mechaniky je vyznačený takmer súčasným objavením sa dvoch článkov: článku Heisenberga (1925, [25]) a Schrödingera (1926, [44]). Prvý z nich navrhol formalizmus maticovej mechaniky, zatiaľ čo druhý navrhol formalizmus vlnovej mechaniky. Obe tieto formulácie sú fyzikálne ekvivalentné a možno ich zahrnúť do obecnejšej formulácie kvantovej mechaniky, ktorú navrhol Dirac (1930, [8]) a matematicky presne sformuloval von Neumann (1932, [32]).

Každá fyzikálna teória obsahuje určitý matematický formalizmus, tj. súbor symbolov a pravidiel, ktorými sa tieto symboly riadia. Pomocou symbolov sa formulujú tvrdenia a vety a pomocou daných pravidiel môžeme odvodzovať nové tvrdenia z tvrdení daných. Dôležitou súčasťou formalizmu je dynamický zákon, ktorý umožňuje predpovedať chovanie sa fyzikálnych systémov v budúcnosti, t.j. dáva fyzikálnej teórii prediktívny charakter. Druhou hlavnou zložkou fyzikálnej teórie sú korešpondenčné pravidlá, ktoré priraďujú symbolom formalizmu empirický význam. Súhrn korešpondenčných pravidiel určuje fyzikálnu interpretáciu teórie. Korešpondenčné pravidlá klasickej mechaniky sú veľmi názorné a priamočiare a dávajú jednoznačnú fyzikálnu interpretáciu. Inak je tomu v kvantovej mechanike. Všeobecne prijatá formulácia kvantovej mechaniky je založená na Hilbertových priestoroch. Jej axiómy sú často kritizované ako umelé, vzdialené priamej experimentálnej overiteľnosti a vyvolali dosiaľ trvajúcu diskusiu o interpretácii a o alternatívnych teóriách merania v kvantovej mechanike. Bolo navrhnutých niekoľko alternatívnych formulácií [20], ktoré sa snažia vychádzať z axióm podľa možnosti prirodzených a fyzikálne zdôvodnených. Hľadá sa odpoveď na otázku, prečo sa na popis kvantovomechanického systému hodí práve Hilbertov priestor, resp. či neexistuje adekvátnejší popis. Najznámejšie sú tieto alternatívne formulácie kvantovej mechaniky: tzv. algebraický prístup ([15], [23], [27], [45]), konvexný prístup ([7], [30]) a kvantovo-logikový prístup. V tomto článku sa budeme zaoberať kvantovo-logikovým prístupom. Za jeho pôvodcu možno považovať von Neumanna (spolu s Birkhoffom [3], 1936) a ďalej ho rozvíjali v niekoľkých rôznych formuláciách najmä Varadarajan [47], Piron [33], Mackey [28], Gudder [17]–[21] a iní autori [6], [22], [29]. Podotýkame, že názov „logika", resp. „kvantová logika" je v literatúre zaužívaný, hoci sa niekedy kritizuje ako nesprávny; názov „logika" sa tu vzťahuje na určitú algebraickú štruktúru — ako uvidíme v ďalšom — a nemá nič spoločného s formálnou, či matematickou logikou (pozri napr. [2]). Ako alternatíva sa navrhuje názov „množina experimentálne overiteľných výrokov" o fyzikálnom systéme. Mnohí autori dávajú prednosť názvu „logika", zrejme preto, lebo je kratší.

2. Klasický fyzikálny systém

Základné pojmy formalizmu každej fyzikálnej teórie sú „fyzikálny systém" a „stav fyzikálneho systému". Pod fyzikálnym systémom sa obvykle rozumie časť fyzikálneho sveta, interakcia ktorej so zvyškom sveta je zanedbateľná, takže nespôsobuje ťažkosti pri identifikácii oddelenej časti. Stavom rozumieme výsledok určitého počtu procedúr, ktoré boli použité k príprave fyzikálneho systému, resp. k jeho oddeleniu od ostatného sveta.

Uvažujme najprv klasický fyzikálny systém, napr. sústavu N-telies, ktoré sa voľne pohybujú v priestore. Stav takéhoto fyzikálneho systému je určený, ak poznáme polohy a rýchlosti všetkých N-telies. (Budeme uvažovať systém vo fixovanom časovom okamihu t, zanedbáme teda na chvíľu problém časovej evolúcie.) Stav uvažovaného fyzikálneho systému si teda môžeme predstaviť ako bod v Euklidovom priestore R^{6N}, kde súradnice každého bodu predstavujú tri súradnice polohy a tri súradnice impulzu každého z N-telies. Priestor stavov sa nazýva fázový priestor uvažovaného systému. Každá fyzikálna veličina je funkcia definovaná na fázovom priestore Ω s hodnotami v množine reálnych čísel R^1 — každému stavu ω odpovedá nejaká hodnota $f(\omega)$ fyzikálnej veličiny f. Fyzikálnu veličinu si môžeme predstaviť ako určitú meraciu procedúru, ktorá každému stavu $\omega \in \Omega$ priradí určitú hodnotu $f(\omega)$. Z matematického hľadiska je výhodné (a z fyzikálneho hľadiska postačujúce) uvažovať merateľné funkcie (vzhľadom na σ-algebru borelovských množín $B(R^1)$ a nejakú σ-algebru S podmnožín Ω, napr. $B(R^{6N})$ v prípade, že $\Omega = R^{6N}$). Nech f je nejaká fyzikálna veličina. Keďže f je merateľná funkcia, je $f^{-1}(E) \in S$ pre každé $E \in B(R^1)$. Z hľadiska teórie pravdepodobnosti môžeme fázový priestor Ω považovať za množinu elementárnych udalostí (pozostávajúcich z toho, že fyzikálna veličina f nadobudne práve hodnotu $f(\omega)$, $\omega \in \Omega$), a S ako množinu všetkých náhodných udalostí (t.j. udalostí takých, že nejaká meraná fyzikálna veličina f nadobúda hodnotu v podmnožine E reálnej priamky; táto náhodná udalosť je reprezentovaná množinou $f^{-1}(E) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in E\}$). Množina $f^{-1}(E)$ sa interpretuje fyzikálne ako výrok „fyzikálna veličina f nadobúda hodnotu v množine E". Každú fyzikálnu veličinu možno nahradiť zobrazením $f^{-1} : E \to f^{-1}(E)$ z borelovských množín $B(R^1)$ do S. Zobrazenie f^{-1} sa nazýva pozorovateľná. Ak B je z S a χ_B je charakteristická funkcia množiny B, t.j.

$$\chi_B(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{ak} \quad \omega \notin B\,, \\ 1 & \text{ak} \quad \omega \in B\,, \end{cases}$$

tak χ_B^{-1} je pozorovateľná a $\chi_B^{-1}(\{1\}) = B$. Množinu S môžeme teda interpretovať ako množinu všetkých experimentálne overiteľných výrokov o fyzikálnom systéme. Táto množina se nazýva tiež logikou daného fyzikálneho systému. V našom prípade je to Booleova σ-algebra množín. Každému výroku $B \in S$ môžeme jedno-jednoznačne priradiť pozorovateľnú χ_B^{-1}; môžeme teda výrok definovať ako pozorovateľnú, ktorá pri meraní môže nadobúdať iba dve hodnoty: 0 a 1.

Každému $\omega \in \Omega$ odpovedá nejaký stav fyzikálneho systému. Môže sa stať, že stav systému nepoznáme presne, ale poznáme iba určitú hustotu rozloženia cez fázový priestor Ω. Takáto situácia spravidla nastáva v štatistickej fyzike, kde uvažujeme fyzikálne systémy obsahujúce veľký počet častíc, a nemôžeme poznať polohy a impulzy jednotlivých častíc, ale iba určité rozdelenie pravdepodobnosti. Takýmto spôsobom môže byť tiež určený stav fyzikálneho systému. Vo všeobecnosti stav fyzikálneho systému je popísaný nejakou pravdepodobnostnou mierou m na S. Bodu ω zodpovedá miera m_ω, koncentrovaná v bode ω, t.j. $m_\omega(\{\omega\}) = 1$. Takéto stavy sa nazývajú čisté a ostatné stavy sú zmiešané, alebo zmesi. Ak m je stav a f^{-1} je pozorovateľná, tak číslo $m(f^{-1}(E))$ udáva pravdepodobnosť toho, že meranie pozorovateľnej f^{-1} dáva hodnotu z množiny E.

Z hľadiska teórie pravdepodobnosti, dvojica (Ω, S) je pravdepodobnostný priestor, stav m je pravdepodobnostná miera a fyzikálne veličiny sú náhodné premenné. Ak je systém v čistom stave m_{ω_0}, $\omega_0 \in \Omega$, tak stredná hodnota náhodnej premennej f je

$$m_{\omega_0}(f) = \int_\Omega f(\omega)\, \mathrm{d}m_{\omega_0}(\omega) = f(\omega_0)\,,$$

a disperzia

$$\sigma^2_{\omega_0}(f) = m_{\omega_0}([f - m_{\omega_0}(f)]^2) = 0\,.$$

(Poznamenávame ,že používame rovnaký symbol pre mieru i integrál; ak f je charakteristická funkcia množiny B, $f = \chi_B$, tak máme $m_{\omega_0}(\chi_B) = m_{\omega_0}(B)$.) Podobne môžeme určiť stredné hodnoty a disperzie pre ľubovoľný stav m. Čisté stavy fyzikálneho systému sú práve tie, v ktorých fyzikálne veličiny nadobúdajú presné hodnoty, t.j. s nulovou disperziou. V prípade klasického fyzikálneho systému môžeme uplatniť všetky pojmy a tvrdenia z teórie pravdepodobnosti. Napríklad, ak $f_1, f_2, \ldots, f_n$ je n fyzikálnych veličín, tak vždy existuje združené rozdelenie pravdepodobnosti, t.j. pre každý stav m na (Ω, S) existuje pravdepodobnostná miera P_m na $B(R^n)$ taká, že pre ľubovoľnú merateľnú funkciu $F : R^n \to R^1$ je

$$m[(F(f_1, \ldots, f_n)^{-1})(E)] = P_m(F^{-1}(E))\,, \quad E \in B(R^1)\,.$$

3. Kvantovomechanický fyzikálny systém

Všeobecne prijatá formulácia kvantovej mechaniky je založená na nasledujúcich axiómach [32], [34].

1. Ku každému fyzikálnemu systému možno priradiť komplexný separabilný Hilbertov priestor H. Každý stav systému je úplne popísaný nejakým projektorom na jednorozmerný podpriestor v H, alebo konvexnou kombináciou takýchto projektorov.

2. Pozorovateľné (t.j. fyzikálne veličiny) sú reprezentované samoadjungovanými (nie nevyhnutne ohraničenými) operátormi v H.

3. Ak je stav systému reprezentovaný projektorom na podpriestor generovaný vektorom $\psi \in H$, potom pravdepodobnosť, že meranie pozorovateľnej, ktorá je reprezentovaná operátorom A, dá hodnotu ležiacu v množine $E \in B(R^1)$, je $(\psi, P^A(E)\,\psi)$, kde $P^A(E)$ je projekčný operátor priradený množine E spektrálnym rozkladom operátora A a $(\ , \ )$ je skalárny súčin v H.

4. Existuje spojitá, unitárna, jednoparametrická grupa U_t, nazývaná dynamická grupa systému, ktorá môže byť napísaná vo tvare $U_t = e^{-iHt}$, kde H je samoadjungovaný operátor. Operátor H, nazývaný dynamický operátor systému, určuje dynamiku systému za predpokladu, že na systéme nerobíme žiadne meranie. Ak stav systému v čase $t = 0$ je popísaný vektorom ψ (t.j.projektorom na podpriestor generovaný týmto vektorom), tak v čase t je popísaný vektorom $\psi_t = U_t\psi$. Vektor ψ_t ako funkcia času vyhovuje Schrödingerovej rovnici $(d/dt)\,\psi_t = -iH\psi_t$.

5. Ak výsledok merania pozorovateľnej A patrí do množiny E, potom po meraní je systém v stave ψ takom, že $(\psi, P^A(E)\,\psi) = 1$.

Ak fyzikálna veličina je reprezentovaná samoadjungovaným operátorom A,množina hodnôt, ktoré môže nadobúdať pri meraní, je práve spektrum $\sigma(A)$ operátora A. Každému samoadjungovanému operátoru môžeme vzájomne jednoznačne priradiť jeho spektrálny rozklad, t.j. zobrazenie $E \to P^A(E)$ z $B(R^1)$ do množiny všetkých ortogonálnych projektorov v H, alebo, ekvivalentne, všetkých uzavretých podpriestorov H, ktorú označíme $L(H)$. Toto zobrazenie je σ-homomorfizmus, t.j. má nasledujúce vlastnosti: (i) $P^A(R^1) = I$, kde I je identický operátor, (ii) $P^A(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P^A(E_i)$, pre každú postupnosť $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ navzájom disjunktných množín z $B(R^1)$. Z (i) a (ii) vyplýva, že $P^A(R^1 - E) = I - P^A(E) = P^A(E)^{\perp}$.

Základy teórie Hilbertových priestorov možno nájsť v [24], fyzikálne aplikácie v [34].

Množinu $L(H)$ môžeme považovať za množinu všetkých experimentálne overiteľných výrokov o fyzikálnom systéme, t.j. za logiku tohto systému. Nie je to už Booleova algebra, ale zložitejšia algebraická štruktúra [47]. Ak dimenzia Hilbertovho priestoru H je väčšia alebo rovná trom, zo známej Gleasonovej vety [16], [47] vyplýva, že existuje jedno-jednoznačné priradenie medzi stavmi fyzikálneho systému a pravdepodobnostnými mierami na $L(H)$. Nie všetky pojmy a zákony z teórie pravdepodobnosti možno preniesť do tejto schémy. Existujú napríklad dvojice pozorovateľných, ktoré nemožno merať súčasne s ľubovoľnou presnosťou — ako to vyplýva z Heisenbergových vzťahov neurčitosti, a nemusia vždy existovať združené rozdelenia pozorovateľných.

Uvažujme fyzikálny systém pozostávajúci z N kvantovomechanických častíc a uvažujme pozorovateľné polohy a impulzu týchto častíc. Odpovedajúce operátory nech sú $Q_i(x)$, $Q_i(y)$, $Q_i(z)$, $P_i(x)$, $P_i(y)$, $P_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Podľa Heisenbergových relácií neurčitosti pre disperzie k-tej zložky súradníc a k-tej zložky impulzu i-tej častice platí v každom stave popísanom projektorom $P[\psi]$ na jednorozmerný podpriestor generovaný vektorom $\psi \in H$ (stručne: v stave ψ)

$$\sigma_\psi(Q)\,\sigma_\psi(P) \geqq \frac{\hbar}{2}\,, \tag{1}$$

kde $\hbar$ je Planckova konštanta. Túto reláciu možno odvodiť z komutačných pravidiel operátorov P a Q (pre jednoduchosť vynechávame indexy):

$$(QP - PQ)\,\psi = i\hbar\psi \tag{2}$$

pre všetky vektory $\psi \in D$, kde D je nejaká hustá podmnožina H. Platí totiž nasledujúca lemma [34].

Lemma. Ak ψ je vektor v obore definície operátorov A_1^2, $A_1A_2 - A_2A_1 = [A_1, A_2]$, A_2^2, kde A_1, A_2 sú samoadjungované operátory v H, tak

$$(A_1^2\psi, \psi)\,(A_2^2\psi, \psi) \geqq \tfrac{1}{4}|([A_1, A_2]\,\psi, \psi)|^2\,. \tag{3}$$

Ak položíme $A_1 = Q - (\psi, Q\psi)$, $A_2 = P - (\psi, P\psi)$, a uvážime, že $(A_1^2\psi, \psi)$ a $(A_2^2\psi, \psi)$ sú disperzie $\sigma_\psi^2(Q)$ a $\sigma_\psi^2(P)$ pozorovateľných Q a P v stave ψ, a ak vezmeme do úvahy komutačné pravidlo (2), dostaneme zo vzťahu (3) nerovnosť (1).

Heisenbergove vzťahy neurčitosti vyplývajú teda z vlastností Hilbertovho priestoru. Možno tiež dokázať, že pre pozorovateľné P a Q nemôže existovať združené rozdelenie pravdepodobnosti v žiadnom stave.

4. Alternatívny formalizmus

Popíšeme axiomatický prístup navrnutý Mackeym [28] a ďalej rozvinutý Maczyńskim [29]. Budeme vychádzať z dvoch abstraktných množín: množiny S stavov a množiny O pozorovateľných. Interpretácia je taká, že element $s \in S$ odpovedá nejakému predpisu o príprave fyzikálneho systému a element $A \in O$ odpovedá nejakej meracej procedúre. Pre $A \in O$, $s \in S$, $E \in B(R^1)$ pravdepodobnosť, že meranie A má ako výsledok číslo v množine E, ak bol systém pripravený podľa s, je označená symbolom $p(A, s, E)$. Základné symboly teda sú S, O a pravdepodobnostná funkcia

$$p : O \times S \times B(R^1) \to R^1\,.$$

Táto funkcia má priamu experimentálnu verifikáciu. Mackey uvádza naledujúce axiómy pre trojicu (O, S, p). Prvá axióma je intuitívne zrejmá.

Axióma 1. Pre každé $A \in O$ a každé $s \in S$ zobrazenie $E \to p(A, s, E)$ je pravdepodobnostná miera na $B(R^1)$.

Ďalšia axióma hovorí, že ak majú byť dve pozorovateľné rôzne, musí ich aspoň jeden stav rozlíšiť, a ak majú byť dva stavy rôzne, musí aspoň jedna meracia procedúra dať v nich rôzne pravdepodobnostné rozdelenia.

Axióma 2. Ak $p(A, s, E) = p(A', s, E)$ pre každé $s \in S$ a $E \in B(R^1)$, potom $A = A'$. Ak $p(A, s, E) = p(A, s', E)$ pre každé $A \in O$ a $E \in B(R^1)$, potom $s = s'$.

Ďalšia axióma umožňuje tvoriť funkcie od pozorovateľných. Napríklad ak $A \in O$ v stave s dá pri meraní hodnotu λ, zrejme pri meraní pozorovateľnej A^2 dostaneme hodnotu λ^2. Ak tento proces mnohokrát opakujeme, výsledné distribúcie pre tieto dve pozorovateľné budú vo vzťahu

$$p(A^2, s, E) = p(A, s, E^{1/2}).$$

Ak to zovšeobecníme pre všetky merateľné funkcie, dostaneme nasledujúcu axiómu:

Axióma 3. Ak $A \in O$ a $f : R^1 \to R^1$ je merateľná funkcia, tak existuje $B \in O$ taká, že

$$p(B, s, E) = p(A, s, f^{-1}(E))$$

pre každé $s \in S$ a $E \in B(R^1)$. Píšeme $B = f(A)$.

Z axiómy 2 vyplýva, že $f(A)$ je jednoznačne určená pri danom A a danom f.

Ďalšia axióma hovorí, že množina stavov S je uzavretá na tvorenie spočítateľných konvexných kombinácií. To možno interpretovať napríklad ako zmiešavanie systémov.

Axióma 4. Ak $s_1, s_2, \ldots \in S$ a $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$, $0 \leqq t_i \leqq 1$, potom existuje $s \in S$ tak, že

$$p(A, s, E) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i p(A, s_i, E)$$

pre každé $A \in O$ a $E \in B(R^1)$.

Výrok možno definovať ako takú pozorovateľnú, ktorá môže pri meraní nadobúdať iba hodnoty 0 a 1; t.j. $p(A, s, \{0, 1\}) = 1$. Nech χ_E je charakteristická funkcia množiny $E \in B(R^1)$. Pre ľubovoľnú pozorovateľnú $A \in O$ potom je

$$p(\chi_E(A), s, \{0, 1\}) = p(A, s, \chi_E^{-1}\{0, 1\}) = p(A, s, R^1) = 1.$$

Z toho vidíme, že $\chi_E(A)$ je výrok. Naopak, ak A je výrok, t.j. $p(A, s, \{0, 1\}) = 1$ pre každé $s \in S$, tak ľahko vidieť, že $A = \chi_{\{1\}}(A)$. Teda $P \in O$ je výrok práve vtedy, keď existuje $A \in O$ a $E \in B(R^1)$ tak, že $P = \chi_E(A)$. Označme množinu všetkých výrokov L. Ak $P \in L$, definujeme $P^\perp = \chi_{\{0\}}(P)$. Potom pre každé $s \in S$ máme

$$p(P^\perp, s, \{1\}) = p(P, s, \{0\}) = 1 - p(P, s, \{1\}).$$

Vidíme, že P má hodnotu 1, ak P má hodnotu 0 a naopak. Pre $P_1, P_2 \in L$ definujme $P_1 \leqq P_2$ ak $p(P_1, s, \{1\}) \leqq p(P_2, s, \{1\})$ pre každé $s \in S$. Zrejme $(L, \leqq)$ je čiastočne. usporiadaná množina (poset). Pre $P_1, P_2 \in L$ položíme $P_1 \perp P_2$, t.j. P_1 je ortogonálne k P_2, ak

$$p(P_1, s, \{1\}) + p(P_2, s, \{1\}) \leqq 1$$

pre každé $s \in S$, alebo, ekvivalentne, ak $P_1 \leqq P_2^{\perp}$. Fyzikálne $P_1 \perp P_2$ značí, že P_1 a P_2 nemôžu pri meraní súčasne nadobudnúť hodnotu 1. Nech napr. $P_1 = \chi_E(A)$ a $P_2 = \chi_F(A)$, $A \in O$, $E, F \in B(R^1)$. Potom $E \subseteq F$ implikuje $P_1 \leqq P_2$ a $E \cap F = \emptyset$ implikuje $P_1 \perp P_2$.

Posledná axióma je táto:

Axióma 5. Ak $P_1, P_2, \ldots \in L$ a $P_i \perp P_j$ pre $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$, potom existuje $P \in L$ tak, že

$$p(P, s, \{1\}) = \sum_{i=1}^{\infty} p(P_i, s, \{1\})$$

pre každé $s \in S$.

Fyzikálna interpretácia poslednej axiómy je nasledujúca: meracia procedúra odpovedajúca P spočíva v meraní všetkých P_i; ak jedno z nich dá hodnotu 1 (a teda všetky ostatné musia mať hodnotu 0), tak P má hodnotu 1, v opačnom prípade mu pripíšeme hodnotu 0.

Na základe axióm 1 až 5 je možné ukázať, že $(L, \leqq, \perp)$ je σ-ortomodulárny poset. Tým sa myslí, že $(L, \leqq, \perp)$ je čiastočne usporiadaná množina, zobrazenie $\perp : L \to L$ je ortokomplementácia, t.j.

(i) $(a^{\perp})^{\perp} = a$

(ii) $a \leqq b$ implikuje $b^{\perp} \leqq a^{\perp}$

(iii) $a \vee a^{\perp}$ existuje v L a rovná sa najväčšiemu prvku 1 v L. (Symboly $\vee$ a $\wedge$ značia spojenie a priesek, ak existujú v L). Ďalej platí

(iv) ak $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť navzájom ortogonálnych prvkov, tak $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i$ existuje v L, a je splnený tzv. ortomodulárny zákon

(v) $a \leqq b$ implikuje, že $b = a \vee (a \vee b^{\perp})^{\perp}$.

Ľahko vidno, že $\chi_{R^1}(A)$, $A \in O$, je najväčší prvok v L. Vlastnosti (i), (ii), (iii) sú zrejmé. Dá sa ukázať, že prvok P v axióme 5 je suprémum, t.j. $P = \bigvee_{i=1}^{\infty} P_i$.

Ku každému $A \in O$ môžeme priradiť zobrazenie $E \to \chi_E(A)$, $E \in B(R^1)$. Toto priradenie je jedno-jednoznačné. Dá sa dokázať, že zobrazenie $E \to \chi_E(A)$ má vlastnosti:

(i) $R^1 \to \chi_{R_1}(A) = 1$,

(ii) $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \to \bigvee_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(A)$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$,

(iii) $(R^1 - E) \to \chi_E(A)^{\perp}$.

Zobrazenie s týmito vlastnosťami sa nazýva σ-homomorfizmus z $B(R^1)$ do L. Obvykle sa predpokladá, že každému σ-homomorfizmu odpovedá nejaká pozorovateľná.

Pre $s \in S$ položme $m_s : L \to R^1$, $m_s(P) = p(P, s, \{1\})$. Potom m_s je pravdepodobnostná miera na L, t.j. platí

(i) $m_s(1) = p(1, s, \{1\}) = 1$,

(ii) $m_s(\bigvee_{i=1}^{\infty} P_i) = p(\bigvee_{i=1}^{\infty} P_i, s, \{1\}) = \sum_{i=1}^{\infty} p(P_i, s, \{1\}) = \sum_{i=1}^{\infty} m_s(P_i)$, ak $P_i \perp P_j$ pre $i \neq j$, podľa axiómy 5.

5. Zovšeobecnený prístup k popisu fyzikálnych systémov

Nech L je σ-ortomodulárny poset a M je množina pravdepodobnostných mier na L taká, že $m(a) \leqq m(b)$ pre $\forall\, m \in M$ implikuje $a \leqq b$, $a, b, \in L$. Ak položíme $S = M$ a za O vezmeme množinu všetkých σ-homomorfizmov x z $B(R^1)$ do L a definujeme

$$p(x, m, E) = m(x(E)),\ E \in B(R^1)\,,$$

potom trojica (O, S, p) vyhovuje axiómam 1, 2, 3 a 5.

Každému fyzikálnemu systému môžeme priradiť dvojicu (L, M), kde L je σ-ortomodulárny poset a M je σ-konvexná množina pravdepodobnostných mier na L. L sa nazýva logikou a prvky v M sú stavy. Dvojica (L, M) sa nazýva kvantová logika. Logika, ktorá je sväz (t.j. pre $\forall\, a, b \in L$ spojenie $a \vee b$ a priesek $a \wedge b$ existujú v L), sa nazýva sväzová logika. Napr. logika $L(H)$ Hilbertovho priestoru H je sväzová logika. Požiadavka, že logika L má σ-konvexnú množinu stavov, ktorá určuje usporiadanie (axióma 4), je netriviálna, lebo existujú logiky (dokonca sväzové), ktoré nemajú vôbec žiadne stavy [13]. Táto požiadavka v skutočnosti obmedzuje výber σ-ortomodulárnych posetov, vhodných na popis fyzikálnych systémov. Usporiadanie v L môže rôznym spôsobom súvisieť s množinou stavov M. Hovoríme napríklad, že M určuje usporiadanie v silnom zmysle (M je u.u.s.z.), ak z tvrdenia „$m(a) = 1$ implikuje $m(b) = 1$" vyplýva tvrdenie „$a \leqq b$", t.j. ak

$$\{m \in M : m(a) = 1\} \subseteq \{m \in M : m(b) = 1\} \Rightarrow a \leqq b\,.$$

Ak M je u.u.s.z., tak okrem iného dostávame, že pre každý prvok $a \in L$, $a \neq 0$ existuje aspoň jeden stav $m \in M$ taký, že $m(a) = 1$.

Predpoklad, že M je u.u.s.z. je výhodný, lebo výsledná matematická štruktúra je bohatšia. Fyzikálna interpretácia tohto predpokladu je táto: ak $m(a) = 1$, hovoríme, že výrok a je pravdivý v stave m. Silné usporiadanie si môžeme predstaviť ako logickú implikáciu: ak výrok „a je pravdivé" implikuje výrok „b je pravdivé" tak $a \leqq b$. Ani toto usporiadanie však nerobí z množiny L „logiku" v štandardnom zmysle slova. V štandardnej logike totiž implikácia každým dvom prvkom priraďuje výpoveď v tom istom jazyku, t.j. napr. môžeme hovoriť o výroku $(a \to b) \to c$. Ale v kvantovej logike relácia usporiadania predstavuje iba binárnu reláciu, a teda formule tvaru $(a \leqq b) \leqq c$ nemajú zmysel. Z tohto hľadiska „kvantová logika" v skutočnosti nepredstavuje novú formu logiky, alternatívnu k štandardnej, ale iba názov pre formalizáciu určitej triedy faktov — kvantových javov — ktoré sa skúmajú v rámci štandardnej logiky.

V ďalšom uvedieme niektoré problémy, ktoré sa riešia v rámci kvantových logík a vyriešenie ktorých môže prispieť k lepšiemu pochopeniu kvantových javov a k objasneniu problému kvantových meraní.

Z hľadiska teórie pravdepodobnosti hlavný rozdiel medzi logikou a Booleovou σ-algebrou spočíva v tom, že zatiaľ čo v Booleovej σ-algebre platí distributívny zákon, t.j. pre každé tri prvky a, b, c platí $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ a duálne, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$; v logike platí iba ortomodulárny zákon, t.j. pre $a, b \in L$ také, že $a \leqq b$ platí $b = a \vee (a^{\perp} \wedge b)$. Podmnožinu B logiky L nazývame Booleovou pod- σ-algebrou L, ak platí (i) $a \in B$ implikuje $a^{\perp} \in B$, (ii) pre každú postupnosť $\{a_i\} \subset B$ $\bigvee a_i$ existuje a patrí do B, (iii) pre každé tri prvky $a, b, c \in B$ platia distributívne zákony. Prvky podmnožiny A logiky L sa nazývajú kompatibilné, ak existuje Booleova pod-σ-algebra $B \subset L$, ktorá obsahuje A. Pozorovateľné $\{x_i : i \in I\}$ sú kompatibilné, ak sú kompatibilné prvky množiny $\bigcup_I \{(x_i E) : E \in B(R^1)\}$. V tomto prípade existuje Booleova pod-σ-algebra $B \subset L$ taká, že $x_i : B(R^1) \to B$ pre všetky $i \in I$. S kompatibilnými pozorovateľnými môžeme, zhruba povedané, zaobchádzať ako s klasickými pozorovateľnými. Napríklad, združené rozdelenia pravdepodobnosti v obvyklom zmysle slova existujú práve len pre kompatibilné pozorovateľné [47]. Rôzne pojmy a tvrdenia z teórie pravdepodobnosti možno aplikovať aj na kompatibilné pozorovateľné na logike. Slabšie definície združených rozdelení pravdepodobnosti v sväzových logikách zaviedli Gudder [18], Urbanik [46], Varadarajan [47] a iní. Tieto slabšie formy združených rozdelení pravdepodobnosti môžu existovať aj pre nekompatibilné pozorovateľné aspoň v niektorých stavoch. Gudderov typ združeného rozdelenia je najjednoduchší a najbližší klasickému pojmu. Je definovaný týmto spôsobom: hovoríme, že pozorovateľné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ majú združené rozdelenie pravdepodobnosti v Gudderovom zmysle v stave m, ak existuje pravdepodobnostná miera μ na $B(R^n)$ taká, že

$$\mu(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = m(x_1(E_1) \wedge x_2(E_2) \wedge \ldots \wedge x_n(E_n))$$

pre každý pravouholník $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \in B(R^n)$. Združené rozdelenia v Gudderovom zmysle existujú vo všetkých stavoch kvantovej logiky práve vtedy, keď uvažované pozorovateľné sú kompatibilné.

Nech a je ľubovoľný prvok v logike L. Potom množina $L_{[0,a]} = \{b \in L : b \leqq a\}$ s čiastočným usporiadaním prevzatým z L, s najväčším prvkom a a s ortokomplementáciou $b \to a \wedge b^{\perp}$, je logika. Logika L sa nazýva separabilná, ak každá podmnožina navzájom ortogonálnych prvkov v nej je nanajvýš spočítateľná. Platí nasledujúce tvrdenie: ak pozorovateľné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na separabilnej logike L majú združené rozdelenie pravdepodobnosti v nejakom stave m, tak existuje prvok $a_0 \in L$ taký, že zobrazenia $x_i : E \to x_i(E) \wedge a_0$ z $B(R^1)$ do L, $i = 1, 2, \ldots, n$, sú kompatibilné pozorovateľné na logike $L_{[0,\omega_0]}$. Vidíme, že z existencie združeného rozdelenia Gudderovho typu vyplýva akási „čiastočná kompatibilita" uvažovaných pozorovateľných. Môžeme rozlíšiť nasledujúce druhy pozorovateľných: pozorovateľné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú (a) kompatibilné, ak združené rozdelenie existuje vo všetkých stavoch, (b) čiastočne kompatibilné, ak združené rozdelenie existuje len v niektorých stavoch, (c) totálne nekompatibilné, ak združené rozdelenie neexistuje v žiadnom stave [11], [42].

Urbanikov, resp. Varadarajanov typ združených rozdelení vyžaduje existenciu súčtu pozorovateľných (aj nekompatibilných). Takýto súčet existuje napríklad v logike Hilbertovho priestoru. Tento typ združených rozdelení možno použiť napríklad pri skúmaní niektorých typov náhodných procesov na logike [40]. Pozorovateľné P a Q, t.j. impulz a súradnica častice, sú príkladom pozorovateľných, ktoré nemajú združené rozdelenie Gudderovho typu v žiadnom stave (sú totálne nekompatibilné), majú však združené rozdelenie Urbanikovho typu v niektorých stavoch [46]. Urbanikov typ združených rozdelení je definovaný naledujúcim spôsobom [18], [46], [47]: pozorovateľné x, y majú združené rozdelenia pravdepodobnosti v Urbanikovom zmysle v stave m, ak $px + qy$ existuje (v zmysle definície napr. v [11]) pre každé $p, q \in R^1$ a ak existuje miera μ na $B(R^2)$ tak, že

$$\mu\{(t_1, t_2) : pt_1 + qt_2 \in E\} = m((px + qy)(E))$$

pre všetky $p, q \in R^1$ a všetky $E \in B(R^1)$. Pre klasické fyzikálne systémy sú obe definície združených rozdelení ekvivalentné.

Problémami zovšeobecnenia pojmov a tvrdení z teórie pravdepodobnosti pre kvantovomechanické systémy sa zaoberá tzv. nekompatibilná teória pravdepodobnosti. Okrem spomenutých problémov sa skúma napr. platnosť zákonov veľkých čísel a centrálnej limitnej vety [9], vyšetrujú sa problémy ergodickej teórie [12] a pod.

Ďalší okruh problémov súvisí s otázkou, za akých podmienok je možné ztotožniť kvantovú logiku s logikou Hilbertovho priestoru a či je toto ztotožnenie možné na základe fyzikálne prirodzených axióm [6], [22], [33], [49]. Dôležitá vlastnost tzv. rýdzo kvantových systémov je superpozičný princíp [8], [19], [37]. V rámci tradičného kvantovomechanického formalizmu, založeného na Hilbertových priestotoch, je superpozičný princíp vyjadrený tak, že ak ψ_1 a $\psi_2$sú čisté stavy (resp. vektory v Hilbertovom priestore H, normované na 1), tak lineárnej kombinácii $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, kde c_1, c_2 sú komplexné čísla, normovanej na jednotku, tiež zodpovedá čistý stav. Tento stav se nazýva superpozícia stavov ψ_1 a ψ_2. Superpozičný princíp teda úzko súvisí s linearitou Hilbertovho priestoru.

V rámci všeobecnej kvantovej logiky (L, M), stav $m \in M$ sa nazýva čistý, ak ho nemožno vyjadriť v tvare konvexnej kombinácie iných dvoch stavov, t.j. ak z rovnosti $m = tm_1 + (1 - t) m_2$, $0 < t < 1$, vyplýva $m = m_1 = m_2$. Pojem superpozície tu zaviedol Varadarajan [47]: ak K je podmnožina stavov (nie nevyhnutne čistých) z M, tak stav $m_0 \in M$ nazývame superpozíciou stavov z K, ak z tvrdenia „$m(a) = 1$ pre každé $m \in K$“ vyplýva tvrdenie „$m_0(a) = 1$“, kde a je prvok z L. Superpozičný princíp môžeme sformulovať nasledovne: hovoríme, že v kvantovej logike (L, M) platí superpozičný princíp, ak pre každé dva čisté stavy $p, q \in M$ existuje čistý stav $r \in M$, rôzny od p a q, ktorý je ich superpozíciou [37]. V klasických systémoch takéto tvrdenie neplatí pre žiadne dva čisté stavy. Prechod medzi klasickými a rýdzo kvantovými fyzikálnymi systémami tvoria tzv. systémy so superselekčnými pravidlami (pozri napr. [26], [28]). V nich superpozíciou niektorých dvoch čistých stavov môžeme získať nový čistý stav, iných nie. Pre rýdzo kvantový systém, v ktorom platí superpozičný princíp bez obmedzenia, možno pri fyzikálne prijateľných dodatočných predpokladoch ukázať, že množina jeho čistých stavov sa dá reprezentovať vektormi nejakého Hilbertovho priestoru [41].

Nemenej dôležité sú problémy týkajúce sa časového vývoja a symetrií fyzikálnych systémov [5], ktoré vedú k skúmaniu automorfizmov kvantových logík [38]; ako aj problémy vzájomnej interakcie fyzikálnych systémov, vedúce k skúmaniu súčinov logík [43], [48].

Mnoho pozornosti sa venuje tiež výskumu základných vlastností logík, pozorovateľných a stavov [4], [31], [36]. Skúmajú sa tiež otázky, súvisiace s tzv. problémom skrytých parametrov, t.j. možnosti vnorenia logiky kvantovomechanického systému do Booleovej σ-algebry [1], [14], [35], atď.

6. Záver

Axiomatická kvantová teória je typickým príkladom interdisciplinárnej teórie. Má veľký vplyv na rozvoj mnohých odvetví matematiky i fyziky. Napríklad vo fyzike možno aplikovať jej výsledky a metódy v štatistickej fyzike, termodynamike, fyzike pevných látok, laserovej fyzike atď. V matematike axiomatická kvantová teória čerpá z viacerých odvetví a podnecuje ich rozvoj. Sú to napr. Hilbertove priestory, von Neumannove algebry, spektrálna teória, C^*-algebry, Jordanove algebry, reprezentácie grúp, modulárne sväzy, ortomodulárne sväzy, spojité geometrie a i. Aj keď súčasné metódy, pojmy a výsledky axiomatickej kvantovej teórie môžu byť prekonané a nahradené inými, ich aplikácie a rozvoj matematiky, ktorý podnietili, zostanú trvalým prínosom.

Literatúra

[1] Alda V.: *On 0—1 measure for projectors, II.* Aplikace Matematiky *26* (1981), 57—58.

[2] Beltrametti, E. G., Casinelli, G.: *Logical and mathematical structures of quantum mechanics.* Revista del Nuovo Cimento *6* (1976).

[3] Birkhoff, G., von Neumann, J.: *The logic of quantum mechanics.* Ann. of Math. *37* (1936), 823—843.

[4] Brabec, J., Pták, P.: *On compatibility in quantum logics.* Found. Phys., *12* (1982), 107—112.

[5] Bóna, P.: *Notes on the time development of classical quantities.* Acta Phys. Slov. *25* (1975), 3—21.

[6] Bugajska, K., Bugajski, S.: *The lattice structures of quantum logics.* Ann. Inst. Henri Poincaré *19* (1973), 333—340.

[7] Davies, E. B., Lewis, T.: *An operational approach to quantum probability.* Commun. Math. Phys. *17* (1970), 239—260.

[8] Dirac, P. A. M.: *The principles of quantum mechanics.* Ruský preklad. Fizmatgiz, Moskva 1960.

[9] Dvurečenskij, A.: *Law of large numbers and the central limit theorems on a logic.* Math. Slovaca *29* (1979), 397—410.

[10] Dvurečenskij, A., Pulmannová, S.: *Connection between joint distributions and compatibility of observables.* Vyjde v Rep. Math. Phys. 1983.

[11] Dvurečenskij, A., Pulmannová, S.: *On the sum of observables in a logic.* Math. Slovaca *30* (1980), 393—399.

[12] Dvurečenskij, A., Riečan, B.: *On the individual ergodic theorem on a logic.* CMUC *21* (1980), 385—391.

[13] Greechie, R.: *Orthomodular lattices admitting no states.* J. Comb. Theory *10* (1971), 119—132.

[14] Einstein, A., Podolski, B., Rozen, N.: *Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?* Phys. Rev. *47* (1935), 777—780.

[15] EMCH, G.: *Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory.* Wiley-Interscience, NY 1972.

[16] GLEASON, A. M.: *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space.* J. Math. Mech. *6* (1957), 885—894.

[17] GUDDER, S. P.: *Spectral methods for a generalized probability theory.* Trans. Amer. Math. Soc. *119* (1965), 423—442.

[18] GUDDER, S. P.: *Joint distributions of observables.* J. Math. Mech. *18* (1968), 326—335.

[19] GUDDER, S. P.: *A superposition principle in physics.* J. Math. Phys. *11* (1970), 1037—1040.

[20] GUDDER, S. P.: *A survey of axiomatic quantum mechanics,* in Hooker ed. *Logico-algebraic approach to quantum mechanics II,* (1979), 323—373.

[21] GUDDER, S. P.: *Stochastic methods in quantum mechanics.* Elsevier North Holland, 1979.

[22] GUZ, W.: *On the lattice structure of quantum logics.* Ann. Inst. Henri Poincaré *28* (1978), 1—7.

[23] HAAG, R., KASTLER, D.: *An algebraic approach to quantum field theory.* J. Math. Phys. *5* (1964), 843—861.

[24] HALMOS, P. R.: *Introduction to Hilbert space.* Chelsea Publ. Co., New York 1972.

[25] HEISENBERG, W.: *Über quantum theoretischen Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.* Z. Phys. *33* (1925), 879—893.

[26] JAUCH, J.: *Foundations of quantum mechanics.* Addison Wesley, Reading, Mass. 1968.

[27] JORDAN, P., VON NEUMANN, J., WIGNER, E.: *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism.* Ann. Math. *35* (1934), 29—64.

[28] MACKEY, G. W.: *The mathematical foundations of quantum mechanics.* W. A. Benjamin INC, NY 1963.

[29] MACZYŃSKI, M.: *A remark on Mackey's axiom system for quantum mechanics.* Bull. Acad. Polon. Sci. *15* (1967), 583—587.

[30] MIELNIK, B.: *Geometry of quantum states.* Commun. Math. Phys. *9* (1968), 55—80.

[31] NEUBRUNN, T.: *On certain type of generalized random variables.* AFRNUC *29* (1974), 1—6.

[32] VON NEUMANN, J.: *Grundlagen der Quantenmechanik.* Springer, Berlin 1932.

[33] PIRON, C.: *Foundations of quantum physics.* W. A. Benjamin, Reading, Mass. 1976.

[34] PRUGOVEČKI, E.: *Quantum mechanics in Hilbert space.* Acad. Press, New York and London 1971.

[35] PTÁK, P.: *Weak dispersion free states and the hidden variables hypothesis.* Vyjde v J. Math. Phys. 1982.

[36] PTÁK, P.: *Realcompactness and the notion of observable.* Jorn. London Math. Soc. *23*, (1981), 534—537.

[37] PULMANNOVÁ, S.: *A superposition principle in quantum logics.* Commun. Math. Phys. *49* (1976), 47—51.

[38] PULMANNOVÁ, S.: *Symmetries in quantum logics.* Int. J. Theoret. Phys. *16* (1977), 681—688.

[39] PULMANNOVÁ, S.: *Joint distribution of observables.* Int. J. Thoret. Phys. *17* (1978), 665—675.

[40] PULMANNOVÁ, S., DVUREČENSKIJ, A.: *Stochastic processes on quantum logics.* Vyjde v Rep. Math. Phys., 1983.

[41] PULMANNOVÁ, S.: *Superpositions of states and a representation theorem.* Ann. Inst. Henri Poincaré *32* (1980), 351—360.

[42] PULMANNOVÁ, S.: *Compatibility and partial compatibility in quantum logics.* Ann. Inst. Henri Poincaré *34* (1981), 391—403.

[43] PULMANNOVÁ, S.: *On the coupling of quantum logics.* Vyjde v Int. J. Theoret. Phys., 1983.

[44] SCHRÖDINGER, E.: *Quantisierung als Eigenwert Problem.* Ann. Phys. *79* (1926), 361—376, 489 to 527.

[45] SEGAL, I. E.: *Postulates for general quantum mechanics.* Ann. Math. *48* (1947), 930—948.

[46] URBANIK, K.: *Joint probability distributions of observables in quantum mechanics.* Studia Meth. *21* (1961), 117—133.

[47] VARADARAJAN, V. S.: *Geometry of quantum theory I.* Van Nostrand, Princeton NY, 1968.

[48] ZECCA, A.: *On the coupling of logics.* J. Math. Phys. *19*, (1978), 1482—1491.

[49] ZIERLER, N.: *Axioms for non-relativistic quantum mechanics.* Pac. J. Math. *11* (1961), 1151—1169.