Nail H. Ibragimov

Sophus Lie a harmonie v matematické fyzice (k 150. výročí narození)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 39 (1994), No. 4, 192--208

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139454

Sophus Lie a harmonie v matematické fyzice

(k 150. výročí narození)

Nail H. Ibragimov

NAIL H. IBRAGIMOV se vzdělával na moskevském fyzikálně-technickém institutu a na univerzitě v Novosibirsku. Přednášel na univerzitě v Novosibirsku, na leteckém institutu v Ufě, na moskevské univerzitě, moskevském fyzikálně-technickém institutu a byl hostem Georgia Tech a College de France. V současné době je zaměstnán v ústavu matematického modelování Ruské akademie věd. Jeho kniha *Transformační grupy aplikované v matematické fyzice* obdržela v roce 1987 státní cenu.

„Mimořádný význam Lieova díla pro všeobecný rozvoj geometrie nemůže být přeceněn; jsem přesvědčen že v budoucnosti bude stále narůstat," psal Felix Klein [13] ve svém návrhu, aby výsledky Sophuse Lieho o grupově teoretických základech geometrie byly oceněny cenou N. I. Lobačevského. Tato cena byla zřízena Fyzikálně-matematickou společností Imperátorské univerzity v Kazani v roce 1895 a jejím cílem bylo projevit uznání pracím v geometrii, obzvláště v neeuklidovské geometrii, na základě návrhů předních specialistů. První tři udělené ceny získaly tyto osobnosti:

1897:	S. Lie	(Navrhovatel: F. KLEIN)
1900:	W. Killing	(Navrhovatel: F. ENGEL)
1904:	D. Hilbert	(Navrhovatel: H. POINCARÉ)

Nelze pochybovat, že Lieovy práce v oboru diferenciálních rovnic si zaslouží stejně vysoké ocenění. Jedním z Lieových překvapujících výsledků v tomto oboru byl jeho objev, že většina známých metod integrace diferenciálních rovnic, které se do té doby zdály být umělé a vnitřně spolu nesouvisející, může být zavedena na společném základě teorie grup. Dále podal Lie klasifikaci obyčejných diferenciálních rovnic libovolného řádu podle grup, které připouštějí, tedy určil všechny rovnice, které mohou být explicitně rozřešeny, nebo mohou být redukovány na rovnice nižšího řádu, a to na základě grupově teoretických úvah. Ale tyto výsledky a bohatá zásoba dalších jeho výsledků se nechtěly poddat populárnímu výkladu a dlouhá léta zůstávaly zvláštní doménou několika zasvěcených. V současné době zjišťujeme, že nastala podobná situace při

---

NAIL H. IBRAGIMOV: *Sophus Lie and Harmony in Mathematical Physics, on the 150th Anniversary of His Birth.* The Mathematical Intelligencer *16*, No 1, 20–28.
Přeložil a odborně upravil OLDŘICH KOWALSKI.

řešení problémů matematické fyziky: mnohé metody mají grupově teoretický základ, ale vyučují se způsobem, jako by je někdo objevil čistou náhodou.

Měl jsem štěstí, že jsem se začal zajímat o aplikace grup na diferenciální rovnice hned v začátcích své práce na univerzitě a že jsem napsal svou první práci pod vedením profesora L. V. Ovsjanikova, který se tolik zasloužil o to, aby vzbudil zájem o tuto disciplínu a učinil z ní moderní vědecký obor. Ve své pozdější práci jsem se znovu a znovu přesvědčoval, jak účinným prostředkem je Lieova teorie při řešení složitých problémů. Tato teorie podstatně rozšiřuje a zostřuje intuitivní pojem symetrie, poskytuje konkrétní metody pro aplikace, pomáhá při vhodné formulaci problémů a často otvírá možné přístupy k jejich řešení.

V tomto článku objasňuji své hledisko, jakou roli hraje teorie Lieových grup v matematické fyzice. Zčásti využívám svých přednášek, které jsem měl v průběhu let na moskevské univerzitě a na moskevském fyzikálně-technickém institutu.

Krátký životopis

Marius Sophus Lie se narodil 17. prosince 1842 v Nordfjordeidu v Norsku jako šesté a nejmladší dítě luteránského kněze Johanna Hermana Lieho. Studoval v Kristiánii (nynější Oslo) od roku 1857, nejprve na gymnáziu a pak (1859–1865) na univerzitě. Z událostí v Lieově životě, které formovaly jeho tvůrčí zaměření, stojí za zmínku zejména tyto: jeho vlastní studium geometrických prací Chaslese, Ponceleta a Plückera v roce 1868, jeho cesty do Německa a Francie v letech 1869–1870, jeho styky s Felixem Kleinem, Chaslesem, Jordanem a Darbouxem a jeho úzké přátelství s Kleinem vedoucí k dlouholeté spolupráci. Lie pracoval na univerzitě v Kristiánii od roku 1872 do roku 1886, pak v letech 1886–1898 v Lipsku. Zemřel 18. února 1899 v Kristiánii.

Život a intelektuální vývoj a díla největšího norského matematika jsou popsány ve vzpomínkách jeho kolegů a v pozdějších životopisech (viz například [7], [22], [27], [29] a odkazy tam uvedené). Zvláště upozorňuji na velmi pečlivý úvod F. Engela k Lieovým sebraným spisům [21]. To vše dává podrobnou představu o podstatě Lieových myšlenek a charakterizuje ho jako člověka.

Symetrie diferenciálních rovnic

V pojmu diferenciální rovnice jsou obsaženy dvě složky. Například v případě obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu je nutné

1) specifikovat plochu $F(x, y, y') = 0$ v prostoru tří proměnných x, y, y'; tuto plochu budeme nazývat *skelet* diferenciální rovnice;
2) definovat třídu přípustných řešení; například hladké řešení je spojitě diferencovatelná funkce $\varphi(x)$ taková, že křivka

$$y = \varphi(x), \quad y' = \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$$

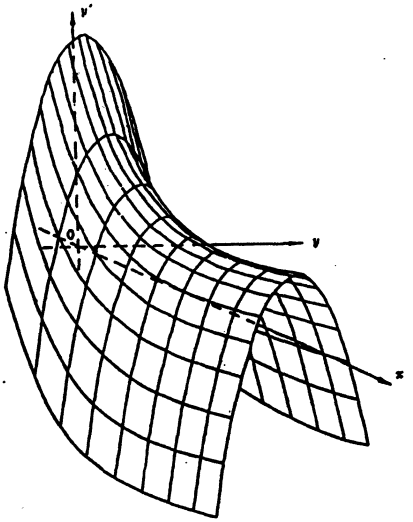
leží na výše zmíněné ploše, tj. platí

$$F\left(x, \varphi(x), \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

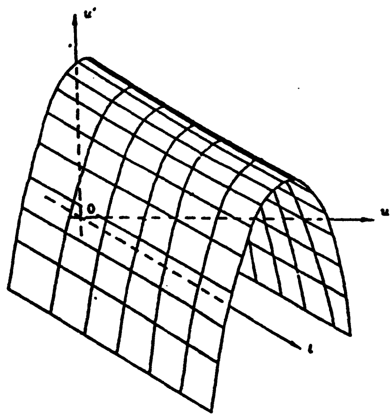
identicky vzhledem k x; pokud připustíme i nespojitá řešení nebo zobecněné funkce (při zachování téhož skeletu), situace se úplně změní.

Rozhodujícím krokem při integraci diferenciální rovnice je zjednodušení jejího skeletu pomocí vhodné transformace proměnných. Pro tento účel se využívá *grupa symetrií* diferenciální rovnice zvaná též *přípustná grupa*, což je grupa transformací roviny (x, y), jejíž rozšíření na derivace $y', \ldots$ zachovává skelet rovnice.

PŘÍKLAD. Riccatiova rovnice $y' + y^2 - 2/x^2 = 0$ připouští grupu transformací $\bar{x} = x\mathrm{e}^{\alpha}$, $\bar{y} = y\mathrm{e}^{-\alpha}$, protože skelet rovnice (obr. 1) je invariantní vůči nehomogennímu roztažení $\bar{x} = x\mathrm{e}^{\alpha}$, $\bar{y} = y\mathrm{e}^{-\alpha}$, $\bar{y}' = y'\mathrm{e}^{-2\alpha}$, které se obdrží „prodloužením" dané transformace na první derivaci y'. Substituce $t = \ln x$, $u = xy$ vede na diferenciální rovnici $u' + u^2 - u - 2 = 0$. Takto dostaneme „napřímení" skeletu původní Riccatiovy rovnice do podoby parabolické válcové plochy (obr. 2); původní transformační grupa je zde pak nahrazena grupou translací $\bar{t} = t + a$, $\bar{u} = u$, $\bar{u}' = u'$.



Obr. 1.



Obr. 2.

Grupová klasifikace

V krátkém sdělení před Vědeckou společností v Göttingen (3. prosince 1874) jsem kromě jiného podal seznam všech spojitých grup transformací se dvěma proměnnými x, y a zvláště jsem zdůraznil, že toto se může stát základem klasifikace a rozumné integrační teorie pro všechny diferenciální rovnice tvaru $f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0$, které připouštějí spojitou grupu transformací. Velký program, který jsem zde načrtl, jsem postupně vypracoval ve všech detailech (S. LIE [16], str. 187).

Tabulka I. Lieova grupová klasifikace rovnic druhého řádu

Dim. grupy	Báze Lieovy algebry	Rovnice
1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	$y'' = f(y, y')$
2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ $X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = f(y')$ $y'' = \frac{1}{x}f(y')$
3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$ $X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$ $X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}$ $X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' + 2\left(\frac{y' + Cy'^{3/2} + y'^2}{x - y}\right) = 0$ $y'' = Cy^{-3}$ $y'' = Ce^{-y'}$ $y'' = Cy'^{(k-2)(k-1)},\ k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2$
8	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x},\ X_5 = y\frac{\partial}{\partial x},$ $X_6 = y\frac{\partial}{\partial y},\ X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},\ X_8 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 0$

V tomto a v následujících dvou odstavcích uvedeme některé z hlavních výsledků realizace Lieova programu, přičemž se omezíme na obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu. Naše omezení není motivováno ničím podstatným, co by se týkalo metody, ale pouze naším přáním soustředit se na konkrétní případy a podat krátká, ale definitivní tvrzení.

Pro rovnice druhého řádu vypadá klasifikace grup [16] obzvlášť jednoduše. Tato klasifikace je uvedena stručně a explicitně v [18], § 3, a je reprodukována v tabulce I. Připomeňme, že Lie prováděl svou klasifikaci v komplexním oboru a používal komplexní substituce a komplexní báze příslušných algeber, kde to bylo potřebné. Například rovnice

$$y'' = C(1 + y'^2)^{3/2} e^{q \operatorname{arctg} y'}, \quad C, q = \text{konst.},$$

připouští 3-rozměrnou Lieovu algebru s bází

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (qx + y)\frac{\partial}{\partial x} + (qy - x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Tuto rovnici nelze převést na žádnou z rovnic v tabulce I s pomocí reálných transformací. Ale s použitím komplexní transformace $\bar{x} = \frac{1}{2}(y - ix)$, $\bar{y} = \frac{1}{2}(y + ix)$ ji lze převést na rovnici

$$\bar{y}'' = C\bar{y}\,\frac{k-2}{k-1}, \quad k = \frac{q+1}{q-1}.$$

Tabulka II. Kanonické tvary 2-rozměrných Lieových algeber a invariantních rovnic druhého řádu

Typ	Struktura algebry L_2		Báze v kanonických proměnných		Rovnice
1	$[X_1, X_2] = 0,$	$X_1 \vee X_2 \neq 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$	$X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = f(y')$
2	$[X_1, X_2] = 0,$	$X_1 \vee X_2 = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$	$X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = f(x)$
3	$[X_1, X_2] = X_1,$	$X_1 \vee X_2 \neq 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$	$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \frac{1}{x}f(y')$
4	$[X_1, X_2] = X_1,$	$X_1 \vee X_2 = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$	$X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = f(x)y'$

Algoritmus integrování rovnic

Povšiml jsem si, že většina obyčejných diferenciálních rovnic, které se daly integrovat starými metodami, byla zleva invariantní vzhledem k jistým transformacím a že příslušné integrační metody vlastně využívají tuto vlastnost. Když už jsem tedy uměl převést mnohé staré integrační metody na společný základ, položil jsem si přirozený problém: vybudovat obecnou teorii integrace pro všechny diferenciální rovnice připouštějící konečné nebo infinitezimální transformace. (S. LIE [17], str. iv.)

Jestliže rovnice druhého řádu připouští Lieovu algebru dimenze $r \geqq 2$, pak ji lze integrovat kvadraturami na základě grupově teoretické metody. To lze udělat různými způsoby; jeden z nich je uveden v tabulce III. Je založen na jednoduché skutečnosti, že v komplexním případě má každá Lieova algebra dimenze $r > 2$ význačnou 2-rozměrnou podalgebru. Avšak struktura 2-rozměrné Lieovy algebry s bází

$$X_\alpha = \xi_\alpha(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_\alpha(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha = 1, 2,$$

může být jednoduše popsána pomocí operace komutátoru

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 .$$

a operace pseudoskalárního součinu

$$X_1 \vee X_2 = \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2.$$

Tento popis je dán v tabulce II; detaily se najdou v [4, 6, 11, 12, 19, 23, 32].

PŘÍKLAD. Budeme aplikovat hořejší algoritmus na diferenciální rovnici

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy}.$$

Tabulka III. Algoritmus pro integraci rovnice druhého řádu používající 2-rozměrnou Lieovu algebru

Krok	Operace	Výsledek
1	Vypočtěte přípustnou Lieovu algebru L_r.	Báze pro L_r: $X_1, \ldots, X_r$
2	Je-li $r = 2$, přejděte k dalšímu kroku; je-li $r > 2$, pak vyznačte některou 2-rozměrnou podalgebru L_2 v L_r. (Je-li $r = 1$, pak může být snížen řád rovnice; je-li $r = 0$, pak grupovou metodu nelze aplikovat.)	Báze pro L_2: X_1, X_2
3	Určete typ algebry L_2 z tabulky II. K tomu účelu vypočtěte komutátor $[X_1, X_2]$ a pseudoskalární součin $X_1 \vee X_2$; jestliže $[X_1, X_2]$ není rovno 0 ani X_1, pak zvolte novou bázi X_1', X_2' tak aby $[X_1', X_2'] = X_1'$.	Redukce struktury na kanonický tvar z tabulky II
4	Na základě tabulky II vyjádřete získanou bázi pomocí operátorů s kanonickými proměnnými x, y. Přepište danou rovnici pomocí kanonických proměnných a integrujte ji.	Nalezení nových proměnných umožňujících integraci rovnice
5	Vyjádřete získané řešení pomocí původních proměnných.	Řešení dané rovnice

První krok: najít přípustnou algebru. To lze provést s využitím tzv. *určující rovnice*. Jako výsledek standardního a jednoduchého výpočtu se ukáže, že naše rovnice připouští Lieovu algebru L_2 s bází

$$X_1 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = -x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Z tabulky III vidíme, že můžeme přejít rovnou k dalšímu kroku.

Třetí krok: najít typ algebry L_2. Zde máme

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad X_1 \vee X_2 = \frac{1}{2} x^2 y \neq 0.$$

Algebra L_2 tedy spadá pod typ 3 z tabulky II.

Čtvrtý krok: najít transformaci proměnných umožňující integraci. Především označme hledané kanonické proměnné jako t a u (místo x a y) a vyjádřeme X_1 a X_2 pomocí těchto proměnných. Ze vztahů

$$X_1(t) = 0, \quad X_1(u) = 1,$$

najdeme substituci

$$t = \frac{y}{x}, \quad u = -\frac{1}{x},$$

která převádí 1-parametrickou grupu generovanou operátorem X_1 (jde o grupu projektivních transformací) na grupu translací vzhledem k proměnné u. Po této substituci bude mít báze algebry L_2 tvar

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = \frac{t}{2}\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}$$

a shoduje se (až na nepodstatný koeficient $\frac{1}{2}$ v X_2) s kanonickou bází typu 3 z tabulky II. (Poznamenejme, že při této proceduře jsme ztratili nejjednodušší řešení původní rovnice, a to řešení ve tvaru $y = Cx$.) Po substituci je rovnice převedena na tvar

$$\frac{u''}{u'^2} + \frac{1}{t^2} = 0.$$

Obecné řešení je dáno alternativními vzorci

$$u = -\frac{t^2}{2} + C \quad \text{a} \quad u = \frac{t}{C_1} + \frac{1}{C_1^2} \ln |C_1 t - 1| + C_2.$$

Pátý krok: určení řešení v původních proměnných. Zde provedeme zpětný přechod od proměnných t, u k proměnným x, y s tím, že jsme dříve vyloučili speciální řešení tvaru $y = Cx$. Pak obdržíme obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu ve tvaru

$$y = Cx, \quad y = \pm\sqrt{2x + Cx^2},$$
$$C_1 y + C_2 x + x \ln \left| C_1 \frac{y}{x} - 1 \right| + C_1^2 = 0$$

(celkem tři alternativy).

Linearizace

Při studiu obyčejných diferenciálních rovnic je užitečné mít jednoduchá kritéria pro to, zdali lze danou rovnici převést na rovnici lineární. Jestliže shrneme Lieovy výsledky v tomto směru, můžeme formulovat následující větu ([16], Část III, § 1; viz též [1] a [2]).

VĚTA 1. *Následující tvrzení jsou spolu ekvivalentní:*

(i) *Obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu*

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

může být transformací proměnných převedena na lineární diferenciální rovnici;

(ii) *Rovnice* (1) *je tvaru*

$$y'' + F_3(x,y)\, y'^3 + F_2(x,y)\, y'^2 + F_1(x,y)\, y' + F(x,y) = 0 \tag{2}$$

s koeficienty F_3, F_2, F_1, F splňujícími podmínky integrability pro následující pomocný systém parciálních diferenciálních rovnic

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= z^2 - Fw - F_1 z + \frac{\partial F}{\partial y} + FF_2, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -zw + FF_3 - \frac{1}{3}\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{2}{3}\frac{\partial F_1}{\partial y}, \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= zw - FF_3 - \frac{1}{3}\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{2}{3}\frac{\partial F_1}{\partial x}, \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= -w^2 + F_2 w + F_3 z + \frac{\partial F_3}{\partial x} - F_1 F_3;
\end{aligned}
$$

(iii) *Rovnice* (1) *připouští 8-rozměrnou Lieovu algebru infinitezimálních transformací;*

(iv) *Rovnice* (1) *připouští 2-rozměrnou Lieovu algebru s bází X_1, X_2 takovou, že*

$$
(4) \qquad X_1 \vee X_2 = 0.
$$

PŘÍKLAD 1. Rovnice $y'' = e^{-y'}$ z tabulky I se nedá linearizovat, protože není tvaru (2) z podmínky (ii).

PŘÍKLAD 2. Předpokládejme v rovnici (2), že $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. Pak soustava rovnic (3) bude mít speciální tvar

$$
\begin{gathered}
z_x = y^2 - Fw + F_y, \quad z_y = -zw, \\
w_x = zw, \quad w_y = -w^2,
\end{gathered}
$$

a podmínka integrability $z_{xy} = z_{yx}$ dává $F_{yy} = 0$. Z toho plyne, že rovnice $y'' + F(x,y) = 0$, kde $F(x,y)$ samo není lineární vzhledem k y, nemůže být transformována na lineární rovnici.

PŘÍKLAD 3. Podívejme se, za jakých předpokladů se dá linearizovat rovnice $y'' = f(y')$ z tabulky I. Podle podmínky (ii) z věty 1 se žádá, aby $f(y')$ byl mnohočlen maximálně třetího stupně vzhledem k y', tj. rovnice musí být tvaru

$$
(5) \qquad y'' + A_3 y'^3 + A_2 y'^2 + A_1 y' + A_0 = 0
$$

s konstantními koeficienty A_i. Snadno vidíme, že pomocný systém rovnic (3) splňuje podmínky integrability pro libovolnou volbu těchto konstant. Tedy rovnice (5) se dá linearizovat pro libovolné konstantní koeficienty A_i.

PŘÍKLAD 4. Nyní uvažujme následující rovnici z tabulky I:

$$
y'' = \frac{1}{x} f(y').
$$

Aby se rovnice dala linearizovat, vyžaduje to, aby byla tvaru (2), tj.

$$y'' + \frac{1}{x}\left(A_3 y'^3 + A_2 y'^2 + A_1 y' + A_0\right) = 0 \tag{6}$$

s konstantními koeficienty A_i. Podmínky integrability pro pomocný systém rovnic (3) dávají

$$A_2(2 - A_1) + 9A_0A_3 = 0, \quad 3A_3(1 + A_1) - A_2^2 = 0.$$

Položíme-li $A_3 = -a$, $A_2 = -b$, dostaneme

$$A_1 = -\left(1 + \frac{b^2}{3a}\right), \quad A_0 = -\left(\frac{b}{3a} + \frac{b^3}{27a^2}\right).$$

Rovnice (6) se tedy dá linearizovat, když a jen když je tvaru

$$y'' = \frac{1}{x}\left[a y'^3 + b y'^2 + \left(1 + \frac{b^2}{3a}\right) y' + \frac{b}{3a} + \frac{b^3}{27a^2}\right]. \tag{7}$$

Zde je vhodné najít příslušnou transformaci souřadnic z podmínky (iv). Proveďme to pro rovnici (7) v případě $a = 1$, $b = 0$:

$$y'' = \frac{1}{x}\left(y' + y'^3\right). \tag{8}$$

Tato rovnice připouští 2-rozměrnou algebru s bází

$$X_1 = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{9}$$

splňující podmínku (4). Tato algebra L_2 náleží k typu 2 z tabulky II a linearizující substituce se obdrží přechodem ke kanonickým proměnným $\bar{x} = y$, $\bar{y} = x^2/2$, vzhledem k nimž se báze (9) vyjádří ve tvaru $X_1 = \partial/\partial\bar{y}$, $X_2 = \bar{x}\,(\partial/\partial\bar{y})$. Zanedbáme-li partikulární řešení tvaru $y =$ konst., rovnice (8) se transformuje na tvar $\bar{y}'' + 1 = 0$.

Invariantní řešení

Speciální typy přesných řešení rovnic, nyní široce známé jako *invariantní řešení*, se po dlouhou dobu s výhodou používaly k řešení konkrétních problémů. Staly se známými v matematice, mechanice a fyzice dokonce před vznikem teorie grup, kdy měly postavení jakéhosi matematického folklóru. Lie v [20] objasnil grupově teoretický smysl těchto řešení a zkoumal možnost integrace parciálních diferenciálních rovnic v případě, že přípustná grupa je dostatečně bohatá. (Viz [20], kapitoly III a IV.)

Postupně teorie grup umožnila objasnit, zostřit a rozšířit mnoho intuitivních myšlenek a vtělit metodu invariantních řešení jako podstatnou složku moderní grupové analýzy. Byl to právě pojem invariantního řešení, který umožnil rozšířit aplikace teorie grup z obyčejných diferenciálních rovnic na problémy matematické fyziky, a to zejména díky pracím [1, 5, 24, 26, 31].

PŘÍKLAD. Uvažujme rovnici

$$y'' = y^{-3}$$

z tabulky I, která připouští 3-parametrickou grupu transformací. Její řešení

$$y = \sqrt{1 + x^2}$$

je invariantní vzhledem k 1-parametrické grupě generované infinitezimální transformací

$$X_1 + X_3 = (1 + x^2)\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

Jestliže toto invariantní řešení podrobíme transformacím přípustné 3-parametrické grupy, obdržíme

$$y = \left[C_1 x^2 + 2\sqrt{C_1 C_2 - 1}\, x + C_2\right]^{1/2},$$

což je obecné řešení. To znamená, že každé řešení hořejší rovnice je invariantní vzhledem k některé 1-parametrické podgrupě přípustné 3-parametrické grupy (detaily viz v [2]).

Princip invariance v problémech matematické fyziky

Když přejdeme od obyčejných diferenciálních rovnic k parciálním, stává se (s řídkými výjimkami) nemožným a každopádně nijak zvlášť užitečným vyjádřit explicitně obecné řešení. Ale matematická fyzika vždy hledá jen taková řešení, která splňují některé další podmínky — počáteční podmínky, okrajové podmínky atd. Při řešení mnoha problémů matematické fyziky je výhodné použít následujícího, napůl empirického pravidla, které lze zformulovat přesně jen v jistých případech.

Princip invariance. *Jestliže problém s okrajovými podmínkami je invariantní vůči nějaké grupě transformací, pak je třeba hledat řešení mezi funkcemi, které jsou invariantní vůči této grupě.*

Hořejší invarianci je třeba chápat jako invarianci příslušné diferenciální rovnice, dále variety, na níž jsou předepsány okrajové podmínky, a nakonec též jako invarianci samotných okrajových podmínek.

Pokud se ztrácí invariance okrajových podmínek (což se často stává), právě vyslovený princip může být použit jinými způsoby. To nastane například při použití metody majoranty v důkazu věty Cauchyho–Kovalevské ([9] pojednává o metodě invariantní majoranty). Jiným příkladem je Riemannova metoda, která redukuje Cauchyho problém s libovolnými (tedy nikoli invariantními) podmínkami na speciální Goursatův problém, který je již invariantní a dá se řešit pomocí principu invariance. Zde pouze v krátkosti objasníme jádro tohoto přístupu; s podrobnostmi se lze seznámit v [12].

Grupový přístup k Riemannově metodě

V tomto odstavci se pokusíme o jistou syntézu, která bude kombinací Riemannovy metody [30] integrace lineárních hyperbolických rovnic druhého řádu s Lieovou grupovou klasifikací [16] takových rovnic. Důležitá je zde rovněž invariantní formulace Lieových výsledků (v pojmech Laplaceových invariantů), kterou podal Ovsjanikov [25].

Riemannova metoda převádí problém integrace rovnice

$$L[u] \equiv u_{xy} + a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + c(x,y)\,u = f(x,y) \tag{10}$$

na konstrukci pomocné funkce v, která splňuje adjungovanou rovnici s danými podmínkami pro charakteristiky:

$$L^*[v] = 0, \quad v|_{x=x_0} = \exp \int_{y_0}^{y} a(x_0,\eta)\,\mathrm{d}\eta, \quad v|_{y=y_0} = \exp \int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\,\mathrm{d}\xi. \tag{11}$$

Pokud nalezneme funkci v, pak řešení Cauchyova problému pro rovnici (10) s počátečními podmínkami předepsanými na libovolné necharakteristické křivce se obdrží na základě dobře známé integrální formule. Funkce v se nazývá *Riemannova funkce* a okrajový problém (11) pro její určení se nazývá *Cauchyho problém pro charakteristiky* nebo též *Goursatův problém*.

Veličiny

$$h = a_x + ab - c, \quad k = b_y + ab - c$$

se nazývají Laplaceovy invarianty pro rovnici (10). Ty se nezmění při jakékoli lineární transformaci funkce u s proměnnými koeficienty (pokud proměnné x, y zůstávají nezměněny). Naproti tomu veličiny

$$p = \frac{k}{h}, \quad q = \frac{1}{h}(\ln h)_{xy} \tag{12}$$

zůstávají invariantní vzhledem k obecné transformaci $\bar{x} = \alpha(x)$, $\bar{y} = \beta(y)$, $\bar{u} = \lambda(x,y)\,u$ homogenní části rovnice (10). Tyto invarianty jsou užitečné při klasifikaci rovnic typu (10) vzhledem k přípustné grupě. Rovnice (10) v *homogenním případě* ($f = 0$) totiž *připouští 4-rozměrnou Lieovu algebru infinitezimálních transformací* [přesněji faktorovou algebru podle ideálu generovaného libovolným řešením $\varphi(x,y)$ rovnice (10)] *v případě, že veličiny* (12) *jsou konstantní. Pokud některá z nich není konstantní, pak rovnice* (12) *připouští nanejvýš 2-rozměrnou Lieovu algebru*. Důkaz se najde v [25], § 9.6. S využitím tohoto výsledku se dokáže následující věta (viz [11] nebo [12]):

VĚTA 2. *Předpokládejme, že rovnice* (10) *má konstantní invarianty* (12). *Potom Goursatův problém* (11) *připouští 1-parametrickou grupu transformací. Proto lze aplikovat princip invariance a Riemannova funkce se dá odvodit z obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu.*

PŘÍKLAD 1. Pro telegrafní rovnici $u_{xy}+u=0$ máme $p=1$, $q=0$. Lze tedy aplikovat větu 2. Goursatův problém (11), totiž

$$v_{xy}+v=0, \quad v|_{x=x_0}=1, \quad v|_{y=y_0}=1 \tag{13}$$

musí podle věty 2 připouštět 1-parametrickou grupu generovanou infinitezimální transformací

$$X=(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}-(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Funkcionálně nezávislé invarianty této grupy jsou v a $z=(x-x_0)(y-y_0)$. Tedy invariantní řešení je tvaru $v=V(z)$ a po substituci do rovnice (13) obdržíme jistý tvar Besselovy rovnice: $zV''+V'+V=0$ s podmínkou $V(0)=1$. Tedy pro telegrafní rovnici je Riemannovou funkcí Besselova funkce J_0.

PŘÍKLAD 2. Riemann ([30], § 9) použil svůj postup na rovnici

$$u_{xy}+\frac{l}{(x+y)^2}u=0, \quad k=\text{konst.}\neq 0. \tag{14}$$

Pro odpovídající problém (11) je podmínka kladená na charakteristické křivky tvaru

$$v|_{x=x_0}=1, \quad v|_{y=y_0}=1. \tag{14'}$$

Riemann redukoval problém (14), (14') na řešení obyčejné diferenciální rovnice (které vedlo ke speciálním Gaussovým hypergeometrickým funkcím) tím, že uvažoval v jako funkci proměnné

$$z=\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x_0+y_0)(x+y)}. \tag{15}$$

Nyní se na všechno podíváme z hlediska teorie grup. Invarianty (12) rovnice (14) jsou $p=1$, $q=2/l$. Tedy větu 2 lze použít. Řešením „určující rovnice“ obdržíme operátor

$$X=(x-x_0)(x+y_0)\frac{\partial}{\partial x}-(y-y_0)(y+x_0)\frac{\partial}{\partial y},$$

přípustný pro Goursatův problém (14), (14'). Invarianty tohoto operátoru jsou v a hodnota z daná rovnicí (15). Tedy invariantní řešení je tvaru $v=V(z)$. To je přesně invariantní řešení nalezené Riemannem!

PŘÍKLAD 3. Dále vezměme rovnici

$$u_{xy}+\frac{l}{x+y}=0, \quad l=\text{konst.}\neq 0,$$

jako „mezistupeň“ mezi rovnicemi (13) a (14). Invarianty (12) jsou zde $p=1$, $q=1/l(x+y)$. Protože q není konstantní, věta 2 se nedá aplikovat.

Úplný seznam rovnic, na něž lze aplikovat větu 2, se najde v [11].

Fundamentální řešení

Budeme sledovat stejnou myšlenku jako v předchozím odstavci, tj. použití principu invariance na okrajové problémy s libovolnými předepsanými hodnotami tím, že problém převedeme na invariantní problém speciálního tvaru. Podívejme se, co může teorie Lieových grup poskytnout pro konstrukci fundamentálních řešení tří základních rovnic matematické fyziky. Tento přirozený směr vývoje grupové analýzy umožňující přechod k distribucím byl nastíněn v [10], kde byly provedeny některé heuristické úvahy a položeny některé problémy. Jurij Berest [3], který je mým žákem, obdržel nedávno pozoruhodné výsledky v aplikaci této metody na vlnové rovnice na Riemannově varietě s netriviální konformní grupou. Některé detaily o postupech, jak se dají infinitezimální transformace aplikovat na distribuce, se najdou v [12].

Laplaceova rovnice

Uvažujme rovnici

$$\Delta u = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

pro nalezení fundamentálního řešení jako okrajový problém, kde v daném bodě, například v počátku, je dána singularita δ-funkce. Tento okrajový problém je invariantní vzhledem ke grupě rotací a dilatací generované operátory

$$\begin{aligned} X_{ij} &= x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \\ Z &= x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (2-n) u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Báze invariantů pro tuto grupu je tvořena jedinou funkcí $J = u\,|x|^{n-2}$. Podle principu invariance je třeba hledat fundamentální řešení jako invariantní řešení určené rovnicí $J =$ konst. Odtud plyne

$$u = C\,|x|^{2-n}. \tag{17}$$

Dosazením ze (17) do (16) najdeme hodnotu konstanty C ve tvaru $C = 1/(2-n)\,\Omega_n$, kde Ω_n je povrch jednotkové sféry v n-rozměrném euklidovském prostoru. *Tedy fundamentální řešení bylo až na konstantní násobek určeno z podmínky invariance a sama diferenciální rovnice posloužila pouze k normalizaci řešení.*

Rovnice vedení tepla

Rovnice

$$u_t - \Delta u = \delta(t, x) \tag{18}$$

s n-rozměrným Laplaceovým operátorem v prostoru proměnných x^i je invariantní vzhledem ke grupě rotací, Galileiho transformací a dilatací generované infinitezimálními transformacemi

$$X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y_i = 2t \frac{\partial}{\partial t} - x^i u \frac{\partial}{\partial u},$$
$$Z = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - nu \frac{\partial}{\partial u}.$$

Tato grupa připouští invariant

$$J = u\, t^{n/2}\, \mathrm{e}^{|x|^2/4t}.$$

Proto má invariantní řešení tvar

(19) $$u = C\, t^{-n/2} \mathrm{e}^{-|x|^2/4t}.$$

Rovnice (18) slouží jako podmínka pro normalizaci: substitucí z (19) do (18) dostaneme hodnotu příslušné konstanty: $C = (2\sqrt{\pi})^{-n}$.

Vlnová rovnice

Pro rovnici

(20) $$u_{tt} - \Delta u = \delta(t, x)$$

je grupa symetrie generována operátory

$$X_{ij} = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y_i = t \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial t},$$
$$Z = t \frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (1 - n)\, u \frac{\partial}{\partial u}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Operátory X_{ij} a Y_i generují grupu rotací a Lorentzových transformací a tato grupa má dva invarianty: u a $\tau = t^2 - |x|^2$. Proto by se invariantní řešení mělo hledat ve tvaru $u = f(\tau)$. Podmínka invariance vzhledem ke grupě dilatací s generátorem Z má pak tvar

(21) $$2\tau f'(\tau) + (n - 1) f(\tau) = 0.$$

Uvažujme nyní jen lichá n, protože pro sudá n bychom museli použít Hadamardovu metodu „balayage". Položme tedy $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, \dots$, a přepišme rovnici (21) ve tvaru $\tau f'(\tau) + m f(\tau) = 0$, což dává známé obecné řešení

$$f(\tau) = \begin{cases} C_1 \theta(\tau) + C_2 & \text{pro } m = 0, \\ C_1 \delta^{(m-1)}(\tau) + C_2 \tau^{-m} & \text{pro } m \neq 0. \end{cases}$$

Dosazením těchto vzorců do rovnice (20) se dostane $C_1 = \frac{1}{2}\pi^{-m}$, $C_2 = 0$. Takto dává princip invariance fundamentální řešení

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta(t^2 - |x|^2), & n = 1, \\ \frac{1}{2}\pi^{(1-n)/2}\delta^{(n-3)/2}(t^2 - |x|^2), & n \geqq 3, \end{cases}$$

kde θ je Heavisideova funkce a $\delta^{(n-3)/2}$ označuje derivaci příslušného řádu δ-funkce.

Keplerovy zákony

Pohyb hmotného bodu pod vlivem centrální síly s potenciálem $V = \alpha/|x|$ splňuje zákon zachování momentu hybnosti $M = m(x \times v)$, kde m je hmotnost částice, x a v jsou její polohový vektor a vektor rychlosti. Tento zákon zachování, známý z nebeské mechaniky jako druhý Keplerův zákon, je důsledkem invariance Lagrangeových pohybových rovnic vzhledem ke grupě rotací a plyne z věty Noetherové. Napišme infinitezimální transformace grupy rotací s použitím vektorového parametru $a = (a^1, a^2, a^3)$ ve tvaru

$$\bar{x} = x + \delta x, \quad \delta x = x \times a. \tag{22}$$

Potom z grupového pohledu *druhý Keplerův zákon vyjadřuje invarianci studovaného problému vzhledem k infinitezimálním rotacím* (22).

Keplerův problém je rovněž invariantní vzhledem k nehomogenním dilatacím generovaným operátorem

$$X = 3t\frac{\partial}{\partial t} + 2x^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Společný invariant grupy rotací a grupy dilatací je veličina $J = t^2/r^3$. *Existence tohoto invariantu je v nebeské mechanice známa jako třetí Keplerův zákon.*

Nakonec, Keplerův problém připouští speciální grupu symetrií, která v označení užitém v (22) může být napsána ve tvaru

$$\bar{x} = x + \delta x, \quad \delta x = (x \times v) \times a + x \times (v \times a).$$

Tato 3-parametrická grupa se liší od obyčejných Lieových grup bodových a kontaktních transformací tím, že je obecnější; nazývá se *grupou Lieových–Bäcklundových transformací* [2]. Výpočet grupy symetrií (23) je proveden v [9], str. 346. Z věty Noetherové se obdrží *vektorový* [první] *integrál pohybu*

$$A = v \times M + \alpha\frac{x}{|\bar{x}|},$$

který byl poprvé objeven Laplacem [4]. Vezmeme-li skalární součin Laplaceova vektoru A s polohovým vektorem x, snadno odtud plyne, že orbitou keplerovského pohybu je kuželosečka. To je první Keplerův zákon. Takže z hlediska teorie grup *vyjadřuje* *první Keplerův zákon invarianci vůči 3-parametrické grupě Lieových–Bäcklundových transformací generované infinitezimálními transformacemi (23).*

Tedy všechny tři Keplerovy zákony nebeské mechaniky mají grupově teoretický charakter.

Závěrečné poznámky

Mohl bych v tomto duchu pokračovat, protože existuje mnoho zábavných aplikací Lieovy teorie a v současné době čekají na své aplikace nově vyvinuté metody grupové analýzy. Ale doufám, že jsem řekl dost, abych vás přesvědčil, že znalost klasických základů a moderních grupově teoretických metod se stala důležitou součástí matematické kultury pro každého, kdo sestrojuje a zkoumá matematické modely problémů vzatých z přírody. Více se lze dozvědět z krásných knih Lieho, Bianchiho a dalších matematiků a také z novějších prací (viz literaturu).

Na závěr bych rád přenesl na Lieovu teorii v matematické fyzice jednu poznámku Einara Hilleho z [8]: „Přivítám [polo]grupu, kdekoli nějakou uvidím, a zdá se, že je vidím všude! Přátelé si však povšimli, že existují i matematické objekty, které nejsou [polo]grupami.“

Literatura

[1] W. F. AMES: *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering,* Vols. I and II. New York: Academic Press (1965, 1972).

[2] R. L. ANDERSON and N. H. IBRAGIMOV: *Lie–Bäcklund Transformations in Applications.* Philadelphia: SIAM (1979).

[3] YU. BEREST: *Construction of fundamental solutions for Huygens equations as invariant solutions.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, *317* (4), 786–789 (1991).

[4] L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni.* Pisa: Spoerri (1918).

[5] G. BIRKHOFF: *Hydrodynamics.* Princeton, NJ: Princeton University Press (1950, 1960).

[6] G. W. BLUMAN and S. KUMEI: *Symmetries and Differential Equations.* New York: Springer-Verlag (1989).

[7] T. HAWKINS: *Jacobi and the birth of Lie's theory of groups.* Arch. History Exact Sciences *42* (3), 187–278 (1991).

[8] E. HILLE: *Functional Analysis and Semigroups.* New York: Amer. Math. Soc. (1948), preface.

[9] N. H. IBRAGIMOV: *Transformation groups Applied to Mathematical Physics.* Dordrecht: D. Reidel (1985).

[10] N. H. IBRAGIMOV: *Primer on the Group Analysis.* Moscow: Znanie (1989).

[11] N. H. IBRAGIMOV: *Essays in the Group Analysis of Ordinary Differential Equations.* Moscow: Znanie (1991).

[12] N. H. IBRAGIMOV: *Group analysis of ordinary differential equations and new observations in mathematical physics.* Uspechi Mat. Nauk, to appear.

[13] F. KLEIN: *Theorie der Transformationsgruppen B. III, Pervoe prisuzhdenie premii N. I. Lobachevskogo, 22 okt. 1897 goda.* Kazan: Tipo-litografiya Imperatorskogo Universiteta (1898), pp. 10–28.

[14] P. S. LAPLACE: *Mécanique céleste.* T. I. Livre 2, Chap. III (1799).

[15] S. LIE: *Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen.* Arch. for. Math. VI (1881).

[16] S. LIE: *Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.* Arch. Math. VIII, 187–453 (1883).

[17] S. LIE: *Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 1. (Bearbeitet unter Mitwirkung von F. Engel).* Leipzig: B. G. Teubner (1888).

[18] S. LIE: *Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik.* Leipz. Ber. (1889).

[19] S. LIE: *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen (Bearbeitet und herausgegeben von Dr. G. Scheffers).* Leipzig: B. G. Teubner (1891).

[20] S. LIE: *Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.* Leipz. Ber. I, 53–128 (1895).

[21] S. LIE: *Gesammelte Abhandlungen, Bd. 1–6.* Leipzig–Oslo.

[22] M. NOETHER: *Sophus Lie.* Math. Annalen *53,* 1–4 (1990).

[23] P. J. OLVER: *Applications of Lie groups to Differential Equations.* New York: Springer-Verlag (1986).

[24] L. V. OVSJANIKOV: *Group properties of differential equations.* Novosibirsk: USSR Academy of Science, Siberian Branch (1962).

[25] L. V. OVSJANIKOV: *Group Analysis of Differential Equations.* Boston: Academic Press (1982).

[26] A. Z. PETROV: *Einstein Spaces.* Oxford: Pergamon Press (1969).

[27] E. M. POLISCHUK: *Sophus Lie.* Leningrad: Nauka (1983).

[28] V. V. PUKNACHEV: *Invariant solutions of Navier–Stokes equations describing free-boundary motions.* Dokl. Akad. Nauk SSSR *20* (2), 302–305 (1972).

[29] W. PURKERT: *Zum Verhältnis von Sophus Lie und Friedrich Engel.* Wiss. Zeitschr. Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Math.-Naturwiss. Reihe XXXIII, Heft 1–2, 29–34 (1984).

[30] G. F. B. RIEMANN: *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.* Abh. K. Ges. Wiss. Göttingen *8* (1860).

[31] L. I. SEDOV: *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics, 4th ed.* New York: Academic Press (1959).

[32] H. STEPHANI: *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries.* Cambridge: Cambridge University Press (1989).

Adresa autora:

Institute of Mathematical Modeling
Miusskaya Sq. 4
Moscow 125047
Russia