Lawrence A. Zalcman

Netradiční integrální geometrie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 27 (1982), No. 1, 9--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139587

vysokých teplotách a v proměnných polích může způsobit fundamentální pokrok v elektrotechnice.

O pracích, které se vedou v našem ústavu a mají přímý praktický význam, bude řeč jinde. Na konci svého referátu bych se chtěl ještě jednou vrátit na začátek a znovu zdůraznit, že stanovit přesnou hranici mezi základním a aplikovaným výzkumem není možné (např. objev laserů přes jejich ohromný praktický význam lze chápat také jako úspěch základního výzkumu).

Rozdíl mezi nimi ovšem existuje, jako existují i rozdíly v zaměření talentu lidí pracujících v první či druhé oblasti výzkumu. Z tohoto důvodu musí být vědecké kolektivy kvalitativně různé, ale mírný podíl základního výzkumu v prakticky zaměřeném ústavu, jakož i mírný podíl aplikací v ústavu zabývajícím se základním výzkumem, může být velice užitečný.

Vše záleží na správných proporcích.

Netradiční integrální geometrie

Lawrence Zalcman

1. Úvod. Netradiční integrální geometrií v nadpisu míníme to, čemu se občas říká stereologie nebo stereometrie. Je to zkoumání vlastností geometrických útvarů na základě informací o jejich průnicích s plochami nižší dimenze a o hodnotách integrálů přes tyto plochy. Aktivita v této oblasti a zájem o ni je značný, zejména se zřetelem na aplikace. Ty sahají doslova od nebes nad námi až po zemi a vody pod ní: od radioastronomie přes geofyziku [19] až k hledání nafty a (jiných) ukrytých pokladů. Existují dokonce souvislosti s navrhováním součástí jaderných reaktorů.

Snad nejzajímavější aplikace se týká neurochirurgie nebo — přesněji řečeno — radiologie (rentgenová tomografie). Jde zde o určení velikosti, rozsahu a umístění mozkových nádorů pomocí rentgenových paprsků vyslaných z konečně mnoha různých směrů. (Ukazuje se, že — teoreticky řečeno — takové údaje *nikdy* nestačí k získání požadovaných informací; na druhé straně se tyto metody v praxi docela osvědčují.) Teoretické i praktické aspekty tohoto postupu jsou popsány v zajímavých přehledných článcích Smithe, Solomona a Wagnera [27] a Sheppa a Kruskala [24].

LAWRENCE ZALCMAN: *Offbeat Integral Geometry*. The American Mathematical Monthly, Volume *87*, Number 3, March 1980.

Můj vlastní zájem o předmět je úplně jiné povahy a spočívá zcela v teoretické oblasti. Vzhledem k tomu nebude v tomto článku o aplikacích řečeno nic více. Obraťme tedy pozornost k méně praktickým aspektům.

2. Stereologie. Nechť G je oblast v rovině ohraničená Jordanovou křivkou. Je G určena jednoznačně délkou (lineární Lebesgueovou mírou) průniků G se všemi přímkami? Zdá se, že otázky tohoto typu byly poprvé (v poněkud obecnější formě) vyšetřovány J. Radonem ([18]) r. 1917. Že lze *nějaké* geometrické informace z těchto údajů vytěžit je okamžitě zřejmé: např. konvexní obal G je právě doplněk sjednocení všech přímek, jejichž průnik s G má *nulovou* délku. Je méně zřejmé, jak lze dát dohromady znalost všech délek zmíněných průniků (ale ne jejich umístění!) a obdržet zpět oblast G. Ačkoli následující věta neposkytuje recept na takovou rekonstrukci, dává odpověď na naši původní otázku, a to ve výjimečně silné podobě.

Věta (H. Cramér, H. Wold, [7]). *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Předpokládejme, že*

$$\int_L f \, ds = 0 \tag{1}$$

pro skoro všechny přímky L v každém směru. Potom platí $f = 0$ skoro všude.

Předpoklad, že f je integrovatelná vzhledem k (dvourozměrné) Lebesgueově míře zaručuje přes Fubiniovu větu, že pro každý pevně zvolený směr je f integrovatelná na skoro všech přímkách tohoto směru. Proto má předpoklad (1) smysl. Na druhé straně samotná existence a anulování integrálů (1) zdaleka nestačí k tomu, aby se f anulovala všude. To ukazuje známý Sierpińského příklad (viz [25]) *neměřitelné* množiny S v rovině, která má s každou přímkou této roviny nejvýše dvoubodový průnik. Je-li $f = \chi_S$ (charakteristická funkce množiny S), je okamžitě vidět, že podmínka (1) je splněna, ale χ_S se zřejmě neanuluje skoro všude.

Abychom mohli použít Cramérovy-Woldovy věty k řešení původního problému, označíme S_1 a S_2 dvě měřitelné množiny v rovině, které mají obě konečnou míru. Předpokládejme, že pro každou přímku L je délka množiny $S_1 \cap L$ a $S_2 \cap L$ stejná. Když položíme $f = \chi_{S_1} - \chi_{S_2}$, vidíme, že platí (1), a tedy $\chi_{S_1} = \chi_{S_2}$ skoro všude. To znamená, že S_1 a S_2 se liší nejvýše o množinu nulové míry. V případě, že S_1 a S_2 jsou Jordanovy oblasti, plyne odtud $S_1 = S_2$.

Existují tři dobré důvody pro to, abychom zde tuto větu dokázali: důkaz je krátký, extrémně elegantní a vysoce podnětný. Je zde však ještě další důvod. Každý matematický článek by měl obsahovat alespoň jeden úplný důkaz a tento důkaz je jediný, který hodlám udělat.

Nechť

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \iint f(x, y) \, e^{i(\xi x + \eta y)} \, dx \, dy \tag{2}$$

je Fourierův obraz funkce f. O $\hat{f}$ potřebujeme vědět pouze dvě věci: $\hat{f}$ je spojitá a zobrazení přiřazující $\hat{f}$ funkci f je prosté. Speciálně je-li $\hat{f} = 0$, pak $f = 0$ (skoro všude). Tvrdím, že pokud f splňuje (1), platí $\hat{f}(0, \eta) = 0$. Skutečně,

$$\hat{f}(0, \eta) = \iint f(x, y)\, e^{i\eta y}\, dx\, dy = \int\left(\int f(x, y)\, dx\right) e^{i\eta y}\, dy = 0\,,$$

protože vnitřní integrál se anuluje pro skoro všechny pevně zvolené hodnoty y. Po krátké úvaze dostáváme $\hat{f}(\xi, \eta) = 0$ pro *všechna* (ξ, η). Opravdu, hořejší výpočet ukazuje, že $\hat{f}$ se anuluje na libovolné přímce jdoucí počátkem (libovolného směru), pokud se anuluje integrál z f přes každou přímku k ní kolmou (tj. po všech přímkách kolmých vzhledem ke zvolené). Funkce $\hat{f}$ se tedy anuluje na každé přímce procházející počátkem, a je tedy identicky rovna nule.

S trochou většího úsilí můžeme dostat mnohem více. Například vzhledem k tomu, že $\hat{f}$ je spojitá, stačí vědět, že (1) platí pro skoro všechny přímky z (eventuálně spočetné) *husté* množiny směrů. To samo o sobě tolik nepřekvapuje, ale ukazuje to cestu k větším věcem. Nechť např. má f kompaktní nosič. Potom můžeme rozvinout exponenciálu v (2) v řadu a integrovat ji člen po členu. Tak dostaneme pro $\hat{f}(\xi, \eta)$ mocninnou řadu konvergentní pro všechny (reálné a komplexní) hodnoty (ξ, η). Funkce $\hat{f}$ je tedy celá funkce v proměnné (ξ, η). Viděli jsme již, že platí-li (1) pro systém všech přímek určitého směru, musí se $\hat{f}$ anulovat na přímce k nim kolmé procházející počátkem. Odtud plyne, že když (1) platí pro skoro všechny přímky v každém ze spočetně mnoha směrů, musí se $\hat{f}$ anulovat na spočetně mnoha přímkách jdoucích počátkem. Snadno lze nahlédnout, že to stačí k tomu, aby se všechny členy Taylorova rozvoje $\hat{f}$ rovnaly nule. Je tedy $\hat{f} = 0$, a tedy i $f = 0$. Zdá se to zcela překvapující, neboť množina směrů, pro něž se předpokládá platnost (1), může být zcela malá. Je skutečně obtížné si představit, jak by se měl takový výsledek dokazovat ryze geometrickými prostředky.

Vyšetřování funkcí pomocí jejich integrálů po přímkách, rovinách či vícerozměrných lineárních podprostorech vedlo ke vzniku rozsáhlé teorie Radonovy transformace. Nebudeme se zde touto teorií zabývat, protože jsme se pochlubili záměrem věnovat se čemusi „netradičnímu". Místo toho upozorňujeme čtenáře, který by měl zájem, na [17] a na literaturu, která je tam citována.

3. Kreis und Kugel. Přímky a roviny nejsou jediné geometricky přirozené množiny, přes které integrujeme funkce; kružnice a sféry jsou v každém směru stejně dobré. Bohužel věta pro kruhy obdobná větě Craméra a Wolda je *příliš lehká*. Vskutku, budeme-li předpokládat $f \in C(\mathbb{R}^2)$ a

$$\int_C f\, ds = 0 \tag{3}$$

pro všechny kružnice C, pak

$$f(z) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{i\Theta})\, d\Theta = 0$$

a f se tedy anuluje všude. Tvrzení bude platit (pokud „všude" nahradíme „skoro všude"), budeme-li předpokládat, že f je měřitelná a lokálně integrovatelná, což zapisujeme pomocí $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Abychom tedy dostali zajímavou teorii, musíme se šlechetně vzdát předpokladu, že

(3) platí pro malé kružnice. Co lze dostat, jestliže víme, že (3) platí pro kružnice s poloměry „odraženými“ od nuly, řekněme pro $r > r_0$?

Jestliže jsme nyní postaveni před netriviální otázku, můžeme začít vychutnávat některá další úskalí problému pro kružnice. Za prvé kružnice nejdou dohromady tak pěkně jako přímky. Dále podmínka (3) nezahrnuje žádná omezení na růst f u nekonečna; navíc, pokud není k dispozici takové omezení, není vůbec jasné, jak použít mechanismu Fourierovy transformace a podobných prostředků. Nyní se už problém pro kružnice jeví jako *těžší* než odpovídající problém pro přímky.

Je opravdu těžší, ale jeho řešení je známo více než čtyřicet let. Lze se o něm dočíst v krásné malé monografii Fritze Johna [15]. Stručně, platí-li (3) pro všechny kružnice s poloměry v nějakém intervalu $r_1 < r < r_2$, pak se f musí anulovat. Většina důvěřivých lidí by byla s takovou odpovědí spokojena. Vzhledem k tomu, že zde máme zájem nalézt *minimální* předpoklady, ptejme se (neskromně? naivně?), zda lze dostat stejný výsledek za předpokladu, že (3) platí pro všechny kružnice s týmž *jedním* (*pevně zvoleným*) *poloměrem r*. Abychom odpověděli na tuto otázku, bude užitečné vědět něco o Besselových funkcích.

4. Velmi krátký kurs Besselových funkcí. Opravdu vše, co potřebujeme znát o Besselových funkcích, lze vyčíst ze Schlömilchovy generující formule

$$\exp\left(\frac{w}{2}\left[t - \frac{1}{t}\right]\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w)\, t^n\,,$$

kde řada vpravo konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině množiny $\mathbb{C}_w \times (\mathbb{C}_t \setminus \{0\})$. Trocha algebry vede k tomuto vzorci:

$$J_\alpha(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k w^{\alpha+2k}}{2^{\alpha+2k} k!\, \Gamma(\alpha + k + 1)}\,;$$

přestože tento vzorec plyne z generující formule pouze pro celá α, lze ho užít k definování Besselových funkcí s libovolným (reálným) indexem α. Kromě (eventuálně) víceznačného faktoru w^α jsou to vesměs celé funkce mající nekonečně mnoho nulových bodů. V případě $\alpha > -1$, který nás bude zajímat, jsou tyto nulové body všechny reálné a jsou asymptoticky pravidelně rozloženy na reálné ose. (Platí to i pro α celá záporná, neboť podle Schlömilchovy formule je $J_{-n}(w) = J_n(-w)$.) Pro α rovná lichému násobku 1/2 lze $J_\alpha(z)$ vyjádřit pomocí trigonometrických funkcí. Speciálně platí

$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z,\; J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z\,.$$

Více lze o Besselových funkcích najít v [30].

5. Příklad. Nechť $g(\zeta) = g(\xi + i\eta) = e^{i\eta}$ a nechť $z = x + iy$. Potom

$$\int_{|\zeta - z| = r} g(\zeta)\, ds = \int_0^{2\pi} g(z + re^{i\Theta})\, r\, d\Theta = \int_0^{2\pi} e^{i(y + r\sin\Theta)}\, r\, d\Theta = r\, e^{iy} \int_0^{2\pi} e^{ir\sin\Theta}\, d\Theta =$$

$$= re^{iy}\int_0^{2\pi}\exp\left[\frac{r}{2}\left(e^{i\Theta}-\frac{1}{e^{i\Theta}}\right)\right]d\Theta = r\,e^{iy}\int_0^{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(r)\,e^{in\Theta}\,d\Theta = 2\pi\,re^{iy}\,J_0(r)\,.$$

Integrál z g přes kružnici o poloměru r (o libovolném středu) se anuluje, právě když $J_0(r) = 0$. Odtud plyne, že (3) platí pro všechny kružnice s poloměrem z jisté nekonečné množiny (nezáporných nulových bodů J_0). Odpověď na otázku položenou na konci části 3 je tedy přesvědčivě negativní. Příklad nemůže být zavržen ani jako nějaká patologie: funkce $g(\zeta)$ je omezená a reálně analytická.

6. Pozitivní výsledek. To není samozřejmě celá historie, jinak bych nepsal tento článek. Jestliže, jak napsal Morris Kline v [16], „přednost logického důkazu nespočívá v tom, že nás nutí věřit, ale že vnucuje pochybnosti – důkaz říká, kam máme své pochybnosti soustředit“, není o nic méně pravda, že hodnota protipříkladu nespočívá v tom, že nutí pochybovat, ale že nabízí víru; přitom protipříklad říká, v jakém směru víru zaměřit. V protipříkladu z předchozí části podíl r_1/r_2 libovolných dvou poloměrů, pro něž (3) platí, je podílem nulových bodů $J_0(z)$. A tak v souladu s principem právě proklamovaným, platí toto tvrzení ([10], [12], [26], [32]):

Věta. *Nechť $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $r_1, r_2 > 0$. Předpokládejme, že integrál z f (vzhledem k $(n-1)$-rozměrové povrchové míře) přes každou sféru o poloměru r_1 a r_2 je 0. Potom je $f \equiv 0$, pokud r_1/r_2 není podílem nulových bodů funkce $J_{(n-2)/2}(z)$.*

Nemůžeme se zde pouštět do detailů důkazu, později však alespoň obecně popíšeme hlavní myšlenky a použitou techniku; teď se místo toho zmíníme o některých zesíleních a ilustracích.

Předpoklad o regularitě f lze značně oslabit; ve skutečnosti stačí předpokládat, že f je z $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. I když to není úplně zřejmé, plyne odtud, že f je integrovatelná přes skoro všechny sféry téhož zvoleného poloměru, přičemž „skoro všechny“ se zde vztahuje přirozeně na míru pro středy. Podobně stačí požadovat, že integrál z f se anuluje přes *skoro všechny* sféry o poloměrech r_1 a r_2. Tato vylepšení charakteru obvyklého pro reálnou proměnnou jsou jen technicky zajímavá, nicméně vytvářejí bezprostřední vztah k integrální geometrii. Nechť S je měřitelná množina v rovině. Potom je S jednoznačně určena (až na množinu míry 0) délkami průniků se (skoro) všemi kružnicemi o poloměrech r_1 a r_2, pokud r_1/r_2 není podílem nulových bodů $J_0(z)$.

Mnohem více zarážející je přesnost nebo – lépe řečeno – nestabilita našich výsledků. I když podíly nulových bodů Besselových funkcí tvoří spočetnou (a tedy „malou“) množinu, jsou se zřetelem na asymptoticky rovnoměrné rozložení současně husté v množině nezáporných reálných čísel. Proto může sebemenší změna jednoho z poloměrů narušit platnost tvrzení. To, jak se zdá, vylučuje jakoukoli možnost čistě geometrického důkazu.

Konečně je třeba zdůraznit, že „výjimečná množina“ opravdu existuje. Příklad z části 5 to ukazuje pro $n = 2$ a podobné příklady lze sestrojit pro libovolné n.

Ve dvou případech lze množinu podílů nulových bodů $J_{(n-2)/2}(z)$ popsat přesněji. Pro $n = 3$ je $J_{1/2}(z) = (2/\pi z)^{1/2}\sin z$, a proto výjimečná množina obsahuje právě podíly $\pi m/\pi n$, tj. všechna racionální čísla. Je-li $n = 1$, tvoří výjimečnou množinu podíly nulových bodů $J_{-1/2}(z) = (2/\pi z)^{1/2}\cos z$; je to tedy množina všech racionálních čísel

m/n, kde obě čísla m, n jsou lichá. Taková funkce, pro kterou platí $f(x + r_j) + f(x - r_j) \equiv 0$, $j = 1, 2$, se tedy anuluje všude, pokud $r_1/r_2 \neq m/n$, kde m, n jsou lichá čísla. Je zábavným cvičením zkusit dokázat tento výsledek přímo (souvisí s problémem A3 z „Putnam Competition" z roku 1977).

7. Rozpaky vyvolávající problém. Lidé se ptají: „Odkud se berou Besselovy funkce"? Myslel jsem si, že znám odpověď na tuto otázku, nyní si však nejsem už tak jistý. Dnes existuje více různých přístupů ke zmíněné větě a v každém se objevují Besselovy funkce trošku odlišným způsobem: jako obrazy při Fourierově transformaci, jako vlastní funkce Laplaceova operátoru, jako sférické funkce nebo jako řešení jistých diferenciálních rovnic. Z určitého hlediska to samozřejmě vychází nastejno. Je však lehce znepokojující, že větu lze v mnoha směrech zobecnit (některá zobecnění prozkoumáme dále), avšak jindy ta a jindy jiná technika poskytuje klíč k náležitému zobecnění. Bezpochyby existuje konečná syntéza; vzhledem k tomu, že jsme jí dosud nedosáhli, zdá se nejlepší pokorně říci, že – stejně jako podle Kroneckera přirozená čísla – Besselovy funkce nám seslala Prozřetelnost: jsou zde prostě od přírody.

8. Inverzní problém a problém inverze. Nechť $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a nechť $U(x, r)$ je průměr funkce u přes sféru o poloměru $r(\geqq 0)$ a středu $x \in \mathbb{R}^n$. Potom U vyhovuje rovnici (Euler-Poisson-Darboux)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = \Delta_x U,$$

$$U(x, 0) = u(x), \quad \frac{\partial U}{\partial r}(x, 0) = 0 .$$

Věta z části 6 může být formulována jako jakási inverzní věta pro tuto rovnici: předpokládejme, že $U(x, r)$ se anuluje na „rovinách" $r = r_1$ a $r = r_2$. Potom $u = 0$, pokud ovšem r_1/r_2 není podílem nulových bodů $J_{(n-2)/2}(z)$. To se silně podobá větě o jednoznačnosti pro okrajové úlohy pro hyperbolické rovnice (srovnej s [28] a dalšími tam uvedenými odkazy).

Pomineme-li (technickou) podmínkou $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a budeme-li předpokládat pouze $u \in C(\mathbb{R}^n)$, můžeme shrnout výsledky z předcházejících částí do tvrzení: zobrazení $u \to (u_1, u_2)$ je prosté, kde $u_j(x) = U(x, r_j)$ a r_1, r_2 jsou zvoleny tak, aby věta platila. Tato formulace vede okamžitě k přirozenému problému najít explicitní vyjádření pro inverzní zobrazení. Jinak řečeno, jak k (u_1, u_2) nalézt u? Pro určité velmi speciální případy je to lehce proveditelné, nicméně jádro problému spočívá v sestrojení předpisu platného pro všechna u a všechny přípustné dvojice (r_1, r_2). V takto obecné formulaci je to otevřený problém, dokonce i v případě funkce jedné reálné proměnné. Samozřejmě, že takový vzorec by vedl k novému (a skoro jistě k „nejlepšímu") důkazu naší věty. Je přirozené předpokládat, že výjimečná množina špatných podílů odpovídá tomu, že se jistá Besselova funkce ve jmenovateli hypotetické inverzní formule anuluje.

9. Plošné a objemové variace. I když předpoklady Cramérovy-Woldovy věty byly vysloveny pomocí podmínek pro integrály po přímkách, mohly by být stejně (a ve skutečnosti původně i byly) zapsány ve formě integrálů přes poloroviny:

(4) $$\int_H f\,dA = 0$$

pro každou polorovinu H. Přechod mezi (1) a (4) je rutinní a spočívá v obyčejném derivování a integrování.

Bohužel, jak již bylo řečeno, kružnice (a sféry) téhož poloměru nejdou dohromady tak pěkně a tak neexistuje zřejmý způsob, jak integrovat větu o dvou kružnicích (sférách) a obdržet tak větu o dvou kruzích (koulích). Plošný, resp. objemový analog věty nicméně platí (viz [6], [26], [32]).

Věta. *Nechť* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $r_1, r_2 > 0$. *Předpokládejme, že (objemový) integrál funkce* f *přes každou kouli o poloměru* r_1 a r_2 *je roven* 0. *Potom* $f = 0$ *skoro všude, pokud není* r_1/r_2 *podílem nulových bodů* $J_{n/2}(z)$.

Výsledek je, stejně jako předcházející výsledky, mimořádně nestabilní. Speciálně je zajímavý poznatek, že se výjimečná množina v této větě liší od té, která se vyskytovala ve větě o dvou sférách; to je definitivní důkaz pro nemožnost přímého přechodu od jedné věty ke druhé. Na druhé straně pozornosti pečlivého čtenáře neujde, že výjimečná množina pro objemový případ v $\mathbb{R}^n$ splývá s výjimečnou množinou pro případ plošné integrace v $\mathbb{R}^{n+2}$. To není náhoda: opravdu lze obdržet objemovou větu v $\mathbb{R}^n$ z plošné věty pro $\mathbb{R}^{n+2}$ (ne však naopak). Nebudeme se tím dále zabývat, protože to nic zvlášť užitečného nedává; čtenář by však mohl chtít nalézt sám (čistě geometrický) vztah mezi oběma výsledky.

10. Pompeiův problém. Dosud jsme se soustředili na to, co se lze o funkcích dozvědět ze znalosti hodnot jejich integrálů přes jisté množiny. Je možné se však na vše dívat z duálního pohledu a hledat, pro které množiny určuje znalost hodnot odpovídajících integrálů výchozí funkci. To vede přímo k Pompeiouvu problému.

Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina, která má kladnou n-rozměrnou míru. Říkáme, že K má Pompeiuovu vlastnost, jestliže pro každou $f \in C(\mathbb{R}^n)$ z podmínky

(5) $$\int_{\alpha(K)} f\,dV = 0$$

pro všechna izometrická zobrazení α: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vyplývá $f = 0$ identicky.

Nejznámější rovinné obrazce (elipsy, mnohoúhelníky atp.) mají Pompeiuovu vlastnost ([6]). Kruhy nikoli; věta z předcházející části poskytuje jistou náhražku pro případ tohoto selhání. Z intuitivního hlediska spočívá vysvětlení tohoto rozdílu v tom, že pro nerotační obrazce použitím rotací α v (5) dostaneme další důležitou informaci kromě té, kterou dostaneme použitím pouhých posunutí. Bohužel není jednoduché z tohoto vytvořit působivý matematický důkaz; je mimořádně zajímavou otázkou, zda je kruh *jedinou* uzavřenou Jordanovou oblastí v rovině, která nemá Pompeiovu vlastnost — tato otázka zůstává dosud nezodpověděna. Pro oblasti s hladkou hranicí se ukazuje, že jde o problém ekvivalentní s následující úlohou s „volnou hranicí" ([2]).

Nechť G je Jordanova oblast. Předpokládejme, že okrajová úloha

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ na } G\,, \tag{6}$$

$$u = c,\quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ na } \partial G$$

má kladnou vlastní hodnotu λ. Musí potom být G kruh? (Jestliže existuje *nekonečně* mnoho vlastních hodnot, zní odpověď ano (viz [2]).) V případě, že G je kruh $\{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq R^2\}$, funkce $J_0(\sqrt{\lambda(x^2 + y^2)})$ s $\lambda = (\mu/R)^2$ vyhovuje (6) pro některý nulový bod μ funkce $J_1(z)$. Obecně však ani G, ani u, ani λ není předem známo.

Tato otázka se zdá překvapivě podobná následující charakteristice kruhů pomocí Poissonovy rovnice s okrajovou podmínkou komplementární k (6). Předpokládejme, že existuje na Jordanově oblasti G s hladkou hranicí funkce u tak, že platí

$$\Delta u = -1 \text{ na } G\,, \tag{6'}$$

$$u = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial n} = c \text{ na } \partial G\,.$$

Potom je G kruh ([23], [31]). Je-li $G = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq R^2\}$, pak funkce $u(x, y) = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)$ vyhovuje (6') pro $c = -R/2$. Poněvadž jsou Besselovy funkce mnohem komplikovanějšími objekty než polynomy druhého stupně, lze předpokládat, že problém (6) přináší ještě další obtíže, než jsou ty, s nimiž se střetneme při práci se (6').

Všechno, o čem jsme se nyní zmínili, tj. neřešený problém, jeho ekvivalence s problémem s volnou hranicí (6) a výsledek pro Poissonovu rovnici (6'), lze jednoduše formulovat v $\mathbb{R}^n$; stačí prostě místo Jordanovy oblasti uvažovat homeomorfní (nebo hladký) obraz G jednotkové koule B^n.

11. Zobecnění. V předcházejících částech jsme se zabývali podmínkami, ze kterých vyplývalo, že se jistá funkce identicky anuluje. Není však o nic těžší dokázat věty obsahující zajímavější tvrzení. Tak např. dostáváme tuto dvoupoloměrovou variaci na klasickou větu Morerovu ([26], [32]).

Věta. *Nechť $f \in C(\mathbb{R}^2)$,*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0 \tag{7}$$

pro všechny kružnice Γ o poloměrech r_1 a r_2. Potom je f holomorfní v celé rovině, pokud r_1/r_2 není podílem nulových bodů $J_1(z)$.

Je to vlastně důsledek dvoukruhové věty z části 9, protože pro hladké funkce platí

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\mathrm{i} \iint_\Delta \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dx\, dy\,,$$

kde Δ je kruh s hranicí Γ a $\partial/\partial\bar{z} = \frac{1}{2}(\partial/\partial x + \mathrm{i}(\partial/\partial y))$; přechod k obecnému případu je rutinní záležitostí. Tento vztah je nicméně v jistém smyslu náhodný a zcela jistě není typický. V každém případě však tento výsledek ilustruje naprosto jasně, jak je důležité nepředpokládat globální integrovatelnost: ačkoliv každá celá funkce vyhovuje (7), jediná celá funkce, pro kterou platí $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, je $f(z) \equiv 0$.

Příbuzná věta charakterizuje harmonické funkce pomocí dvoupoloměrové průměrové podmínky. Nechť Ω_n je rovnoměrně rozložená míra na jednotkové sféře $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ normalizovaná tak, že celková míra sféry je rovna 1. Připomeňme, že funkce u spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ je harmonická v G tehdy (Koebe) a jen tehdy (Gauss), platí-li

$$u(x) = \int_{S^{n-1}} u(x + rt)\, d\Omega_n(t) \tag{8}$$

pro každé $x \in G$ a každé r, $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial G)$. Speciálně je u harmonická na $\mathbb{R}^n$, platí-li (8) pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a všechna $r > 0$.

Věta. *Nechť $u \in C(\mathbb{R}^n)$, $r_1, r_2 > 0$. Nechť dále (8) platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a pro $r = r_1, r_2$. Potom $\Delta u = 0$, pokud není r_1/r_2 podílem nulových bodů rovnice*

$$\frac{2^{(n-2)/2}\, \Gamma(n/2)\, J_{(n-2)/2}(z)}{z^{(n-2)/2}} = 1\,. \tag{9}$$

Tento výsledek z [8], [9], [10], [12], [32] je první ze všech dvoupoloměrových vět; byl objeven Jeanem Delsartem již v r. 1957. Od ostatních výsledků z předcházejících odstavců se liší tím, že výjimečná množina je velice malá, nebo dokonce neexistuje. Opravdu, jestliže se kladné číslo r_1/r_2 rovná podílu nulových bodů (9), musí tyto nulové hodnoty ležet na polopřímce vycházející z počátku. Použitím asymptotiky pro Besselovy funkce se dá ukázat, že existuje pro každé $n > 1$ nejvýše konečně mnoho vyloučených podílů. (Případ $n = 1$ je speciální: pak se (9) redukuje na $\cos z = 1$ a výjimečná množina je množina všech racionálních čísel.) Je-li $n = 3$, *žádný* podíl není vyloučen ([9]). Zda je výjimečná množina neprázdná pro *nějaké* $n > 1$, je opět otevřený problém.

Více než deset let zůstávala Delsartova věta raritou, jakousi „zrůdnou větou“ v terminologii i těch nejstarších průkopníků v tomto oboru (viz [29]). Částečným důvodem snad bylo, že se obecně soudilo, že jde o specifický výsledek z teorie harmonických funkcí a že se k ní nedá již nic dodat. My, kdož jsme se seznámili s větami v předcházejících odstavcích, jsme na tom lépe. Jak však Delsartova věta, naše verze Morerovy věty a sférické nebo kulové věty netradiční integrální geometrie zapadnou do rámce jediné obecné teorie?

Odpověď je překvapující a zároveň překvapivě jednoduchá. Nechť $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ je homogenní polynom, tj. nějaký (konečný) součet jednočlenů, které mají vesměs týž celkový stupeň. Označme D symbolický vektor $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n)$. Pak můžeme definovat diferenciální operátor $P(D)$ tak, že nahradíme každé ξ_k výrazem $\partial/\partial x_k$ ve vyjádření polynomu P. Funkci $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ budeme nazývat slabým nebo distributivním řešením rovnice $P(D)u = 0$, jestliže

$$\int_{\mathbb{R}^n} (P(D)\varphi)\, u\, dV = 0$$

pro všechny funkce φ třídy C^∞ s kompaktním nosičem. (Slabé řešení splývá s obvyklým řešením, pokud je u dostatečně hladké, aby měl výraz $P(D)u$ klasický smysl.)

Ukazuje se, že *ke každému homogennímu polynomu P existuje se zřetelem na možnost různé volby míry, podle které integrujeme (dokonce nekonečně) mnoho různých dvoupoloměrových vět, které charakterizují (slabé) řešení rovnice* $P(D)u = 0$. Každé takové větě odpovídá nějaká (eventuálně prázdná) výjimečná množina reálných podílů nulových bodů jisté celé funkce. Různé věty přitom budou mít obecně různé výjimečné množiny, i když dokonce charakterizují řešení téže rovnice (srovnej výsledky v částech 6 a 9).

Co se zdá nejpodstatnější na tomto výsledku je to, že neobsahuje žádný předpoklad elipticity; vskutku, *typ* rovnice vůbec nehraje žádnou roli! Existuje dvouprůměrová věta — ve skutečnosti je jich dokonce nekonečně mnoho — pro *libovolnou* diferenciální rovnici $P(D)u = 0$ (ať je jakkoli komplikovaná), ovšem za předpokladu, že P vzniká z homogenního polynomu. Pomineme recept na vytváření těchto vět a spokojíme se s jediným příkladem.

Věta. *Nechť* $u \in C(\mathbb{R}^2)$, $r_1, r_2 > 0$. *Předpokládejme, že*

$$\int u(x + r\cos\Theta, y + r\sin\Theta)\cos 2\Theta \, d\Theta = 0, \quad r = r_1, r_2 \tag{10}$$

pro všechny $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Potom u vyhovuje d'Alembertově rovnici* $\Box u \equiv u_{xx} - u_{yy} = 0$, *pokud* r_1/r_2 *není podílem nulových bodů* $J_2(z)$. *Obráceně, každé globální řešení rovnice* $\Box u = 0$ *vyhovuje (10) pro všechna* $r > 0$.

Uvážíme-li výsledky z předcházejících odstavců, lze je začlenit do tohoto rámce takto:

P	$P(D)\,u = 0$
1	$u = 0$
$(x + \mathrm{i}y)/2$	$\dfrac{\partial u}{\partial \bar z} = 0$
$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$	$\Delta u = 0$

Speciálně poznamenáváme, že věty integrální geometrie z částí 6 a 9 dostáváme z (triviální!) volby $P(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$, které odpovídá $P(D) = I$, tj. identickému operátoru. Kdo si tedy myslí, že triviální věci nemohou být zajímavé?

12. Méně je více, více je méně. I když formulace z předchozí části dosahuje uspokojivé obecnosti, v žádném případě nevyčerpává všechny možnosti toho, co může být v tomto směru dokázáno. Pro ilustraci uveďme jednopoloměrovou větu, která má zřetelný vztah ke klasické Fourierově analýze.

Nechť f je spojitá funkce v rovině. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ má restrikce f na kružnici o poloměru 1 a středu z Fourierův rozvoj

$$f(z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Theta},$$

kde

$$(11)\qquad a_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + e^{i\Theta})\, e^{-in\Theta}\, d\Theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = 1} f(\zeta)\,(\zeta - z)^{-n-1}\, d\zeta\,.$$

Je-li nyní f celá funkce, je $a_n(z) \equiv 0$, $n = -1, -2, \ldots$. Opravdu, je-li f analytická na uzavřeném kruhu $\{|\zeta - z| \leqq 1\}$, plyne z (11) (a z Cauchyovy věty), že $a_n(z) = 0$ pro $n = -1, -2, -3, \ldots$. Obráceně, nechť pro nějaké z je $a_n(z) = 0$ pro všechna $n < 0$. Potom lze lehce nahlédnout, že f můžeme spojitě rozšířit z kružnice $\{|\zeta - z| = 1\}$ na kruh $\{|\zeta - z| \leqq 1\}$ tak, že je analytická v $\{|\zeta - z| < 1\}$.

Otázka. Předpokládejme $a_n(z) \equiv 0$, $n = -1, -2, -3, \ldots$. Musí být f celá funkce? Odpověď zní: ano ([1]). Nezdá se to zřejmé (přinejmenším autorovi tohoto článku): i když předpoklad $a_n(z) \equiv 0$ $(n < 0)$ zaručuje, že f má analytické rozšíření z každé kružnice $\{|\zeta - z| = 1\}$ na $\{|\zeta - z| < 1\}$, *nevíme*, zda tato rozšíření pro překrývající se kruhy na průniku splývají. V každém případě výsledek lze dostat při (doslova) nekonečně slabších předpokladech.

Věta ([33]). *Nechť $f \in C(\mathbb{R}^2)$ a nechť $r > 0$, $n > 1$ jsou pevně zvolena. Předpokládejme, že*

$$(12)\qquad \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\Theta})\, e^{i\Theta}\, d\Theta = \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\Theta})\, e^{in\Theta}\, d\Theta = 0$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Potom je f celá funkce.

Předpokládáme-li tedy, že právě dva z Fourierových koeficientů se záporným indexem, tj. $a_{-1}(z)$ a $a_{-n}(z)$ s jistým n, se identicky anulují, dostáváme, že f je analytická všude. Jako obvykle můžeme oslabit předpoklad regularity f a žádat pouze $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a dále předpokládat platnost (12) pouze pro *skoro všechna z*. Na tomto výsledku je nejvíce překvapující to, že v něm nevystupuje žádná výjimečná množina. Z povrchního hlediska to lze vysvětlit zřejmým faktem, že platí-li věta pro jednu hodnotu r, pak platí už pro *všechna* $r > 0$. Při mnohem hlubším pohledu plyne nepřítomnost výjimečné množiny ve větě z toho, že Besselovy funkce $J_1(z)$ a $J_n(z)$ nemají společné nulové body (jiné než $z = 0$). To však vyplývá (alespoň pro $n > 4$) z hlubokého výsledku Carl Ludwiga Siegela z teorie transcendentních čísel: jestliže $J_\alpha(z) = 0$, $z \neq 0$ a α je racionální číslo, pak je nutně z transcendentní (viz [30], str. 484–485).

Číslování v poslední části je proti originálu změněno. Po dohodě s autorem byly při překladu dvě technicky náročnější části, které jí předcházely, vypuštěny. V nich se autor zabývá zobecňováním dříve uvedených dvouprůměrových vět na širší třídu prostorů. Na Riemannových prostorech s kladnou křivostí (de facto na sférách v $\mathbb{R}^{n+1}$) vznikají díky jejich kompaktnosti nové specifické jevy. Popišme alespoň zhruba jednoprůměrovou větu (srovnej [21], [20]):

Nechť funkce u třídy L^1 na sféře $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ má přes každý „vrchlík" o fixovaném poloměru r integrál roven nule. Potom se u anuluje (skoro všude) pokud r neleží ve „výjimečné množině" (jde opět o množinu všech nulových bodů spočetného systému funkcí odvozených z Legendreových funkcí prvního druhu).

Pro případ sféry $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ bylo předcházející tvrzení známo již v r. 1952 ([29]). Jeho autor Peter Ungar je shledal překvapující (kdo ostatně ne?) a nazval je „zrůdnou větou". Ať už tedy zrůdné nebo avantgardní, zůstává toto tvrzení pravděpodobně nejstarším výsledkem netradiční integrální geometrie.

13. Pár slov k důkazům. Trpělivý čtenář, který se úspěšně probojoval předcházejícími částmi, může být značně podrážděn, ne-li nabit zvědavostí. Jak se konečně všechny tyto výsledky dají dokázat? Hlavní myšlenky lze naštěstí dostatečně stručně načrtnout a pokud u čtenáře vznikl hlubší zájem, může se podívat do [32], kde lze nalézt potřebné detaily.

Upřesníme kontext a pro určitost předpokládejme $f \in C(\mathbb{R}^n)$ a

$$\int_S f \, d\Omega = 0 \tag{13}$$

pro každou $(n-1)$-rozměrnou sféru S o poloměru r_1 a r_2. Rovnici (13) můžeme přepsat jako dvě konvoluční rovnice

$$f * \mu_1 = 0, \quad f * \mu_2 = 0\,, \tag{14}$$

kde μ_j jsou normalizované povrchové míry na sférách $S_j = \{x;\ |x| = r_j\}$. Je přirozené zkusit aplikovat aparát Fourierovy analýzy. Vzhledem k tomu, že f může libovolným způsobem růst, nemusí být bohužel Fourierův obraz f v obvyklém smyslu definován. Je proto mnohem výhodnější přejít k harmonické analýze měr μ_j.

Pro moderní analýzu je charakteristické, že velká část zbytečně investovaného úsilí může být ušetřena, podaří-li se vhodně zvolit funkční prostor, ve kterém budeme pracovat. Ukazuje se, že „správný" prostor pro naše úvahy je $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, což je známý prostor (Schwartzových) distribucí s kompaktním nosičem. Fourierovu transformaci lze přirozeným způsobem rozšířit na $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, přičemž rozšíření odpovídá n-rozměrné obdobě (2) pro funkce s kompaktním nosičem; odpovídající prostor Fourierových obrazů $E'(\mathbb{R}^n)$ je tvořen celými funkcemi n komplexních proměnných vyhovujících ještě dalším růstovým podmínkám.

Nalezení Fourierových obrazů v našem případě není problémem; dostaneme

$$\hat{\mu}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{2^{(n-2)/2}\, \Gamma(n/2)\, J_{(n-2)/2}\,[r_j\sqrt{(z_1^2 + \ldots + z_n^2)}]}{[r_j\sqrt{(z_1^2 + \ldots + z_n^2)}]^{(n-2/2}}\,.$$

(Protože $J_\alpha(z)/z^\alpha$ je celá funkce, je to též celá funkce.)

Podmínka, že r_1/r_2 není podílem nulových bodů $J_{(n-2)/2}(z)$ vychází nyní automaticky z předpokladu, že $\hat{\mu}_1$ a $\hat{\mu}_2$ nemají společné nulové body. Existují tedy celé funkce H_1, H_2 takové, že

$$\hat{\mu}_1 H_1 + \hat{\mu}_2 H_2 = 1\,. \tag{15}$$

(V obecném případě plyne existence takových funkcí z důležitého výsledku teorie funkcí více komplexních proměnných, který je znám jako Cartanova věta B. V našem případě máme k dispozici mnohem jednodušší důkaz přes funkce jedné proměnné; viz dále.) Lze-li volit H_1, H_2 tak, aby vyhovovaly vhodným růstovým podmínkám, můžeme dostat funkce $H_j = \hat{T}_j \in E'(\mathbb{R}^n)$, pro které platí

$$\hat{\mu}_1 \hat{T}_1 + \hat{\mu}_2 \hat{T}_2 = 1\,. \tag{16}$$

To vede zpět k

$$\mu_1 * T_1 + \mu_2 * T_2 = \delta_0 , \tag{17}$$

což by spolu se (14) dávalo

$$f = f * \delta_0 = f * (\mu_1 * T_1 + \mu_2 * T_2) = (f * \mu_1) * T_1 + (f * \mu_2) * T_2 = 0 .$$

(Připomeňme, že poslední vztah již neplatí v $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, ale spíše v prostoru všech distribucí $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.).

Bohužel vztah (16) nemusí platit, dokonce ani při $n = 1$. Nicméně však, alespoň pro $n = 1$ získáváme jako cenu útěchy toto: existují posloupnosti $\{T_{1,k}\}$, $\{T_{2,k}\}$ v $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$ tak, že v topologii $E'(\mathbb{R})$ platí

$$\hat{\mu}_1 \hat{T}_{1,k} + \hat{\mu}_2 \hat{T}_{2,k} \to 1 .$$

Odtud dostáváme

$$\mu_1 * T_{1,k} + \mu_2 * T_{2,k} \to \delta_0$$

v topologii $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$, a tedy, stejně jako dříve, $f = f * \delta_0 = 0$. Existence takových posloupností plyne z hlubokého funkcionálně teoretického výsledku Laurenta Schwartze ([22], [9]), který bývá nazýván základní věta o funkcích jedné proměnné periodických v průměru.

Schwarzova věta je zcela nesporně typická věta z teorie funkcí jedné proměnné. Až donedávna byl otevřený problém, zda ji lze rozšířit i na funkce více proměnných; nyní víme ([13]), že to nejde, takže se zdá, že jsme na naší cestě narazili na horský masív.

V tomto speciálním případě je ale možné dostat se dále tunelem ([26]). Snazší však nicméně je (a je to při výsledné analýze i výhodnější) si místo toho všimnout, že $\hat{\mu}_1$ a $\hat{\mu}_2$ *lze považovat za funkce jedné komplexní proměnné* $z = \sqrt{(z_1^2 + \ldots + z_n^2)}$. To ukazuje na možnost aplikace Schwartzovy věty pro jednu proměnnou a nakonec i na získání výsledku tímto způsobem — ono to opravdu jde. Převedení problému do jednorozměrného kontextu a zvládnutí potřebných detailů vyžaduje pouze dostatečné úsilí dát věcem potřebnou matematickou formu.

Stejně lze postupovat i v obecném případě. Dvouprůměrová podmínka se opět interpretuje jako dvojice konvolučních rovnic. Jediný další háček je v tom, že Fourierovy obrazy mohou mít společné nulové body v počátku. Právě tato možnost má v tvrzeních za následek, že výsledek není právě jen $f \equiv 0$. Vlastnosti, které f musí mít, lze dokonce vyčíst lehce z prvních členů v Taylorově rozvoji odpovídajících obrazů. Jedna z hlavních výhod přístupu přes Fourierovu transformaci spočívá v tom, že dává nejen metodu důkazu, ale i *smysl výsledku*.

Vzájemná souhra teorie funkcí komplexní proměnné a harmonické analýzy hraje ústřední roli ve všech případech. Tyto dvě oblasti, které daly matematice již tak mnoho, jsou stále nevyčerpatelným zdrojem hlubokých a pronikavých pohledů. (Můj přítel Ian Richards vyjádřil jednou své přesvědčení, že třemi nejefektivnějšími nástroji pro řešení matematických problémů jsou kalkulus, teorie funkcí komplexní proměnné a Fourierova transformace a já s ním souhlasím.) „Úzký vztah mezi analytickými funkcemi a harmonickou analýzou na euklidovských grupách", o němž psal profesor

Beurling v [5], je stále užší a užší; začíná zahrnovat prostory, které nejsou ani euklidovské, ani nemají charakter grup. Snad se některý z čtenářů, který byl okouzlen nebo dokonce fascinován tou či onou exotickou květinou ze zahrady netradiční integrální geometrie, inspiruje a pokusí se vypěstovat pár květů sám.

Přeložili Ivan Netuka a Jiří Veselý

Poznámka překladatelů. Původní text článku (*Offbeat integral geometry.* Amer. Math. Monthly *87* (1980), 161—175) vznikl jako rozšířená verze přednášky prof. L. Zalcmana na Chauvenetově sympoziu, které se konalo v lednu 1978. Na tomto sympoziu přednášeli vybraní nositelé Chauvenetovy ceny za nejlepší anglicky psané přehledné články; prof. Zalcman získal tuto cenu r. 1976 za článek *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, uveřejněný v Monthly *81* (1974), 115—137. V současné době je profesorem na univerzitě v Marylandu, USA. Další informace o něm přináší článek otištěný rovněž v Monthly *83* (1976), 84—85.

Literatura

[1] M. L. Agranovskij, R. E. Valskij: *Maksimaľnyje invarianty funkcionaľnych algeber.* Sibir. Mat. Ž. *12* (1971), 1—7.

[2] C. A. Berenstein: *On the converse to Pompeiu's problem.* Notas e Comunicações de Matemática (Univ. Fed. de Pernambuco) *73* (1976).

[3] C. A. Berenstein, L. Zalcman: *Pompeiu's problem on spaces of constant curvature.* J. Analyse Math. *30* (1976), 113—130.

[4] C. A. Berenstein, L. Zalcman: *Pompeiu's problem on symmetric spaces.* (to appear).

[5] A. Beurling: *Analytic continution across a linear boundary.* Acta Math. *128* (1972), 153—182.

[6] L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor: *Spectral synthesis and the Pompeiu problem.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) *23* (1973), 125—154.

[7] H. Cramér, H. Wold: *Some theorems on distribution functions.* J. London Math. Soc. (2) *11* (1936), 290—294.

[8] J. Delsarte: *Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques.* C. R. Acad. Sci. Paris *246* (1958), 1358—1360.

[9] J. Delsarte: *Lectures on Topics in Mean Periodic Functions and the Two-Radius Theorem.* Notes by K. B. Vedak, Tata Institute of Fundamental Research, 1961.

[10] J. Delsarte, J. L. Lions: *Moyennes généralisées.* Comment. Math. Helv. *33* (1959), 59—69.

[11] A. Erdélyi, ed.: *Higher Transcendental Functions.* McGraw-Hill, 1953.

[12] L. Flatto: *The converse of Gauss's theorem for harmonic functions.* J. Differential Equations *1* (1965), 483—490.

[13] D. I. Gurjevič: *Counterexamples to a problem of L. Schwartz.* Functional Anal. Appl. *9* (1975), 116—120.

[14] E. W. Hobson: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* Cambridge University Press, 1931.

[15] F. John: *Plane Waves and Spherical Means.* Interscience, 1955.

[16] M. Kline: *Logic versus pedagogy.* Amer. Math. Monthly *77* (1970), 264—282.

[17] D. Ludwig: *The Radon transform on euclidean space.* Comm. Pure Appl. Math. *69* (1966), 49—81.

[18] J. Radon: *Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Intergralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.* Ber. Math.-Phys. Kl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig *59* (1917), 262—277.

[19] V. G. Romanov: *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations.* Springer--Verlag, 1974.

[20] R. Schneider: *Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres.* J. Math. Anal. Appl. *26* (1969), 381—384.

[21] R. SCHNEIDER: *Über eine Integralgleichung in der Theorie der konvexen Körper.* Math. Nachr. *44* (1970), 55—75.

[22] L. SCHWARTZ: *Théorie générale des fonctions moyennes-pérodiques.* Ann. of Math. (2) *48* (1947), 857—929.

[23] J. SERRIN: *A symmetry problem in potential theory.* Arch. Rational Mech. Anal. *43* (1971), 304—318.

[24] L. A. SHEPP, J. B. KRUSKAL: *Computerized tomography: The new medical X-ray technology.* Amer. Math. Monthly *85* (1978), 420—439.

[25] W. SIERPIŃSKI: *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement.* Fund. Math. *1* (1920), 112—115.

[26] J. D. SMITH: *Harmonic analysis of scalar and vector fields in* $\mathbb{R}^n$. Proc. Cambridge Philos. Soc. *72* (1972), 403—416.

[27] K. T. SMITH, D. C. SOLOMON, S. L. WAGNER: *Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs.* Bull. Amer. Math. Soc. *83* (1977), 1227—1270.

[28] C. C. TRAVIS: *On the uniqueness of solutions to hyperbolic boundary value problems.* Trans. Amer. Math. Soc. *216* (1976), 327—336.

[29] P. UNGAR: *Freak theorem about functions on a sphere.* J. London Math. Soc. (2) *29* (1954), 100—103.

[30] G. N. WATSON: *A treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, 1962.

[31] H. F. WEINBERGER: *Remark on the preceding paper of Serrin.* Arch. Rational Mech. Anal. *43* (1971), 319—320.

[32] L. ZALCMAN: *Analyticity and the Pompeiu problem.* Arch. Rational Mech. Anal. *47* (1972), 237—254.

[33] L. ZALCMAN: *Mean values and differential equations.* Israel J. Math. *14* (1973), 339—352.

Jak se má tedy reformovat střední škola? Zřiďte si nejlepší osnovy a učebnice; bude-li se podle nich učit ležérně nebo suše, nebude z toho mnoho zisku. Nechte přednášet filozofii nebo co chcete; bude to někdy stejná nezáživná nuda jako časování „deiknými", zatímco v některých ústech bude geometrie okřídlenou a vzrušující básní. Je to příliš stará pravda, že ve vyučování osobnost je vše; ale té se nelze učit v pedagogických kursech.

Mnoho viny jest (nebo bylo) na hodně pošetilých učebních metodách; ale více viny je na lhostejném vyučovacím řemesle mnohých učitelů, kteří nemajíce osobního poměru k své látce, vtloukají žákům do hlavy právě to nejmechaničtější na věci, co jim dá nejméně práce a vysvětlování: tedy letopočty, definice, slovíčka a vzorce.

Člověk s maturitou bývá méně než polovzdělanec, měl-li neštěstí v učitelích; po osm let ho učili letopočtům místo dějinám, slovíčkům místo kulturám a vzorcům místo přírodě, a to vše s nejdůkladnějším opomenutím vědecké metody.

Mnoho by v tomto směru mohla učinit univerzita; ale to je zas takové vysoké gymnázium, kde se občas vyskytnou zas ti školometi a přednáškoví živnostníci — proboha, nezlobte se, že to říkám, ale bývají tam tuze divní patroni. Tedy chci říci, že univerzita, jež si konečně může vybírat, by mohla být opravdu sborem osobností, tvůrčích a plodných odborníků a filozofů, z nichž by linulo světlo pořádného vědění a poznávací radost až do poslední venkovské primy. Ta pravá pedagogika se začíná docela nahoře, na katedrách univerzitních profesorů. Jen ji nezbyrokratizovat! Aktivovat ji tvořivě, vědeckou úrovní našich univerzit. Chcete-li lepší střední školu, musíte začít s lepší a nejlepší univerzitou.

Na nedávném mezinárodním sjezdu se hodně rokovalo o tom, má-li být středoškolský profesor hlavně pedagog či hlavně odborník. Chápu-li se v této věci slova, činím tak pro své zvláštní zkušenosti; provandroval jsem totiž za mlada tři gymnázia, a tedy poznal jsem na vlastní kůži kantorů jako málokdo. A tedy tvrdím, že nejlepšími pedagogy byli skoro bez výjimky ti, kteří byli nejlepšími odborníky.

Karel Čapek