František Kuřina

I špatné příklady táhnou

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37 (1992), No. 6, 342--347

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139630

vyučování

I ŠPATNÉ PŘÍKLADY TÁHNOU

Několik poznámek ke vzdělávání učitelů matematiky základní školy

František Kuřina, Hradec Králové

„Většina studentů je s matematikou na fakultě zklamaná, protože se dokazuje i nemožné. Mě velice zajímá, proč řeším nějaký příklad tak a ne onak, že všechno má svou podloženou podstatu.“

Studentka 2. ročníku oboru M–F

1. Jak učíme budoucí učitele?

Bez ohledu na výsledek transformace našeho školství jsou dnes opět aktuální otázky koncepce matematického vzdělávání na základní škole. Jde zde totiž o položení základů vzdělání pro všechny děti, o jejich přípravu pro další vzdělávání, ale hlavně o jejich všestranný rozvoj. Již od mládí je nutno podporovat a rozvíjet tvořivé schopnosti dítěte. Učitel k tomu musí mít dost příležitostí, musí mít i dostatek vhodného didaktického materiálu, ale hlavně to musí umět.

Zdá se, že převažující současná koncepce vyučování matematice pro učitele základní školy příliš rozvíjení tvořivosti nepřeje. Ve většině případů má totiž výuka charakter předávání části hotové, logicky uspořádané matematické disciplíny, zřídkakdy se zformulují pro posluchače přitažlivé problémy a otázky, kolem nichž by vznikaly diskuse jak zavést pojem, jak formulovat definici, zda platí věta a jak ji dokázat. Ve většině případů učíme budoucí učitele definice, věty a důkazy, ale neučíme je definovat pojmy, dokazovat věty a řešit problémy. Předáváme hotovou matematiku a spokojujeme se s tím, že část studentů tuto matematiku aspoň reprodukčně u zkoušek zvládne. Podle mého názoru tak dáváme špatný příklad budoucím učitelům: i oni budou předvádět kus hotové matematiky svým žákům, nebudou s žáky matematiku tvořit. Přitom by snad měl učitel ukázat žákům, jak matematika vyrůstá z řešení problémů reálného světa, při řešení otázek důležitých pro člověka. Učitel by měl od počátku školní docházky vést žáky k pochopení čísla jako vyjádření kvantity, k tomu, jak zavést a poznat vlastnosti operací s čísly, k poznání geometrických vlastností prostoru, v němž žije, k poznání množin a jejich vlastností, k pochopení relací a funkcí jako prostředku studia vztahů mezi jevy atp.

Všimněme si nejdříve učebnic a učebních textů matematiky pro učitele 1. stupně základní školy. Zdá se, že materiály vznikaly „v množinovém opojení“ s jistou dávkou „axiomatických zábran“. Tyto přístupy lze pochopit. Většina autorů didaktických materiálů byla vychovávána v názoru, že „základním pojmem pro všechna odvětví matematiky je pojem množina“, že základní matematickou metodou je metoda axiomatická. V aritmetice se neukáže, že množinový pohled je nástrojem studia reality, neukáže se, že množiny „se nevyskytují v přírodě“, ale vznikají z potřeb studia věcí a jevů. Totéž město lze např. považovat za množinu domů, množinu obyvatel, množinu lékařů nebo množinu letišť, … Lze sice zavést intuitivně množinu jako libovolné seskupení objektů do skupin, zdá se však, že to nemá z matematického hlediska valný smysl. Otázka smyslu je otázkou každé práce, ve vyučování však hraje zásadní roli. Při vyučování je nutné využívat zkušeností toho, kdo se učí.

Uveďme v této souvislosti jeden příklad.

Ačkoli v naší civilizaci i malé dítě dobře pochopí pojem uspořádané dvojice, neboť již v první třídě poznává řadu slov, která se od sebe liší pouze pořadím písmen, např.: $OD \neq DO$, $JED \neq DEJ$, ..., ví, že $12 \neq 21$, uvádí jeden text pro budoucí učitele prvního stupně bez komentáře tuto definici:

„Uspořádanou dvojicí prvků nazýváme množinu (a, b) definovanou vztahem

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\},$$

prvek a se nazývá první složka a prvek b druhá složka uspořádané dvojice."

Takováto definice, která pochází od Kuratowského a Wienera, má ovšem v matematice hluboký smysl, není však vhodná pro vzdělání učitelů. Osobně mi připomněla definici

„Hrnec je výjem obhmotnělé prostornosti",

která je uvedena v jakémsi patentním spisu.

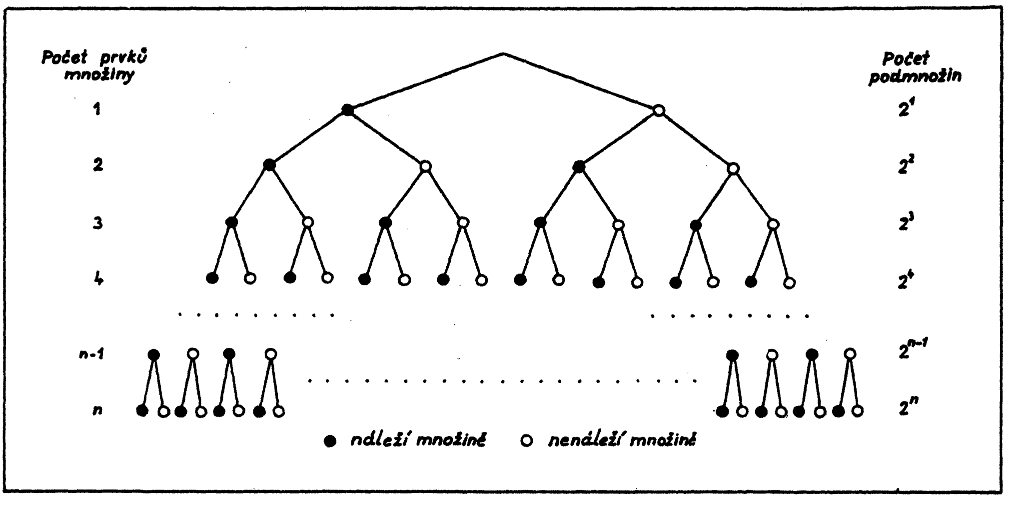
Profesor Kořínek se nerozpakuje zavést pojem uspořádané dvojice ve své *Algebře* zcela intuitivně:

„Vybereme-li z množiny M všemi možnými způsoby dva prvky a, b a utvoříme z nich dvojice (a, b), dbajíce přitom na pořadí prvků ve dvojici, dostaneme množinu všech uspořádaných dvojic, kterou budeme značit $M \times M$."

Učitelka 1. stupně má být seznámena s pojmem „vědecky".

Učební texty z aritmetiky pro 1. stupeň základní školy jsou přesyceny symbolikou, formalismy a logikou a přitom přirozené otázky se řeší formálně nebo se neřeší vůbec.

Tak např. na otázku „Kolik podmnožin má množina o n prvcích?" odpovídá celostátní učebnice výsledkem 2^n, který „lze dokázat kombinatorickými úvahami". S tak názorným vyjadřovacím prostředkem finitní matematiky, jakým je např. strom logických možností, se bu-



Obr. 1

doucí učitelé prvního stupně zpravidla neseznámí. Tím se dostáváme k dalšímu negativnímu rysu vzdělávání našich učitelů: jejich teoretická výuka je odtržena od školské praxe. Vždyť úlohy typu: „Kolik obědů lze sestavit ze 2 polévek, 4 hlavních jídel a 3 zákusků?“, „Kolik trojciferných čísel lze zapsat číslicemi 1, 2, 3?“ atp. lze znázornit a řešit analogickým způsobem jako odpověď na otázku po počtu prvků potenční množiny (obr. 1). Přirozeně zde může vzniknout plodná diskuse o tom, zda uvedené „konečné“ schéma lze považovat za důkaz pro libovolné přirozené číslo a dojít tak ke smysluplné otázce důkazu věty matematickou indukcí.

Dokladem formálního přístupu k množinovým pojmům je např. zavedení racionálních čísel jako „množin sobě rovných zlomků“ nebo definice relace ekvivalence a izomorfismu bez promyšleného systému motivačních a aplikačních úloh vhodného typu. Podle mého názoru musí v učitelském vzdělání vyrůstat matematika z problémů praxe, třeba i didaktické, a není to abstraktní konstrukce, v níž se např. existence množin formálně postuluje.

Rysy formálního přístupu lze nalézt i v některých učebních textech geometrie pro učitele prvního stupně.

Budování téměř celé geometrie „bez čísla“ lze vysvětlit požadavky axiomatického systému, stěží však lze takovéto omezení akceptovat při výuce geometrie pro učitele. Idea geometrického znázornění přirozených čísel na číselné ose a pohyb po této přímce by měly tvořit základní představu při vytváření pojmu číslo. Proto považuji za nevhodné definovat např. kruh takto:

„V rovině E_2 mějme dán bod S a úsečku r. Potom sjednocení všech úseček SX, pro které platí $X \in E_2$ a $SX \cong r$, nazveme kruh o středu S a poloměru r.“

Podobně nevysvětlíme-li význam osové souměrnosti, lze stěží souhlasit např. se zavedením posunutí jako zobrazení složeného ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami. Idea posunutí, tedy idea vektoru, je zde opět velmi silná a otázka jak zavést tento pojem patří podle mého názoru do matematiky (a není to otázka jen didaktická). Učitelky 1. stupně neberou naštěstí výklady z matematiky příliš vážně — jinak by hrozilo nebezpečí, že budou chtít např. ledničku posunout tak, že ji dvakrát překlopí.

I ve vzdělání učitelů vyšších tříd základní školy bychom měli vycházet při výkladu pojmů z řešení problémů, např. z řešení soustav lineárních rovnic a postupně dojít např. k pojmu vektorový prostor. Postup od konkrétního k abstraktnímu je možný a účelný i na této úrovni. Důležité přitom je, aby i matematický jazyk byl „účelný“, tj. pokud možno přirozený a srozumitelný. To ovšem souvisí s mírou tolerance a úrovní přesnosti.

Porovnejme dvě definice vektorového prostoru. První je z Bicanovy *Lineární algebry*, vydané v edici Matematický seminář v roce 1979 (podle autora je obsah a způsob výkladu „někde mezi základní učebnicí a vědeckou publikací“), druhá ukázka je ze skript pro vzdělání učitelů, vydaných v roce 1980.

„Vektorovým prostorem nad tělesem T rozumíme neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici prvků $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\vec{u} + \vec{v} \in V$) a násobení prvků V prvky z tělesa T (tj. každému $\vec{u} \in V$ a každému $r \in T$ je jednoznačně přiřazen prvek $r\vec{u} \in V$). Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $\vec{u}, \vec{v} \in V$,
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$,

3. existuje prvek $\vec{o} \in V$ takový, že $0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$ pro každé $\vec{u} \in V$,
4. $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$, $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $r \in T$,
5. $(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$, $\vec{u} \in V$, $r, s \in T$,
6. $r(s\vec{u}) = (rs)\vec{u}$, $\vec{u} \in V$, $r, s \in T$,
7. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $\vec{u} \in V$."

Definice pro učitele (!):

Nechť je dána neprázdná množina V, jejím prvkům budeme říkat VEKTORY a značit je $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ..., $\mathcal{X}$, ... právě když platí:

A_1: Existuje zobrazení $\oplus$ kartézské mocniny V^2 do množiny V. Obraz uspořádané dvojice vektorů $\langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle \in V^2$ označíme $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ a budeme ho nazývat SOUČET VEKTORU $\mathcal{U}$ a VEKTORU $\mathcal{V}$.

A_2: $\forall\, \mathcal{U} \in V\ \forall\, \mathcal{V} \in V; \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

A_3: $\forall\, \mathcal{U} \in V\ \forall\, \mathcal{V} \in V\ \forall\, \mathcal{W} \in V; \mathcal{U} \oplus \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{W}$.

A_4: $\exists\, \mathcal{N} \in V\ \forall\, \mathcal{U} \in V; \mathcal{U} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{U}$; vektor $\mathcal{N}$ se nazývá nulový.

A_5: $\forall\, \mathcal{U} \in V\ \exists\, \overline{\mathcal{U}} \in V; \mathcal{U} \oplus \overline{\mathcal{U}} = \mathcal{N}$; vektor $\overline{\mathcal{U}}$ se nazývá vektor opačný k vektoru $\mathcal{U}$.

A_6: Nechť $[R, +, \cdot]$ je těleso všech reálných čísel. Existuje zobrazení $\odot$ kartézského součinu $R \times V$ do množiny V. Obraz uspořádané dvojice $\langle r, \mathcal{U} \rangle \in R \times V$ označíme $r \odot \mathcal{U}$ a budeme ho nazývat SOUČIN REÁLNÉHO ČÍSLA r A VEKTORU $\mathcal{U}$.

A_7: $\forall\, k \in R\ \forall\, \mathcal{U} \in V\ \forall\, \mathcal{V} \in V; k \odot \odot (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) = k \odot \mathcal{U} \oplus k \odot \mathcal{V}$.

A_8: $\forall\, r \in R\ \forall\, s \in R\ \forall\, \mathcal{U} \in V; (r + s) \odot \odot \mathcal{U} = r \odot \mathcal{U} \oplus s \odot \mathcal{U}$.

A_9: $\forall\, r \in R\ \forall\, s \in R\ \forall\, \mathcal{U} \in V; (r \cdot s) \odot \odot \mathcal{U} = r \odot (s \odot \mathcal{U})$.

A_{10}: $\forall\, \mathcal{U} \in V; 1 \odot \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Strukturu $[V; \oplus; R^{+,\cdot}; \odot]$ budeme nazývat LINEÁRNÍM VEKTOROVÝM PROSTOREM nad tělesem všech reálných čísel, množinu V budeme nazývat jejím NOSIČEM.

Myslím, že čtenář si udělá komentář sám.

2. Freudenthalova idea matematizace

Na základě pedagogické praxe na různých úrovních jsem přesvědčen, že současný trend, který je široce rozšířen např. i ve vysokoškolské výuce matematiky pro učitele, že totiž na začátku jsou uvedeny bez hlubší motivace definice studovaných pojmů, není nejvhodnější. Odporuje to přirozenému přístupu člověka k poznání, jde o prezentaci části hotové disciplíny v podstatě od konce, většinou i ahistoricky. Je to ovšem zdánlivě efektivní, protože na malém prostoru dosáhneme rychle hluboké výsledky. Při výuce se obvykle zdůrazňuje potřeba přesnosti a „při přesném budování jakékoli matematické teorie používáme axiomatickou metodu". Při výkladu se tedy zpravidla vychází z axiómů, např. z axiómů vektorového prostoru, z axiómů grupy, ... Podle mého názoru tímto přístupem nedáváme dobrý příklad budoucím učitelům základní školy. Pojmy bychom měli zavádět především rozvíjením zkušeností s řešením problémů, zkušeností s prací s pojmem. Tato otázka souvisí s charakterem procesu poznání, který můžeme rozdělit — patrně na každém stupni — do tří etap, charakterizovaných spontánním, operativním a teoretickým přístupem. Podnětem k tomuto členění byly některé práce M. Hejného, analogický přístup formulovali před lety nizozemští pedagogové Pierre a Dina van Hiele.

Spontánní, operativní a teoretický přístup tvoří jakési stupně, které se uplatňují nejen ve vyučování, ale i při studiu mnohých problémů v teorii i praxi. Ačkoli hranice mezi uvedenými stupni nejsou ostré, můžeme každý z nich volně charakterizovat. Spontánní stupeň je založen na pozorování jevů přírodní, technické, společenské, ale i matematické reality, žák se při něm poprvé setkává s jevy, které jsou zpočátku zcela neanalyzovány, a vytváří si první představy o nich. Operativní stupeň poznání znamená především zvýšení aktivity žáka. Pro tento stupeň je charakteristické provádění operací v nejširším slova smyslu (experimenty s modely, konstrukce, výpočty, pokusy o hledání souvislosti, formulace a ověřování hypotéz). V teoretickém stupni jde o dovršení procesu tvorby pojmů, o formulaci definic a důkazů tvrzení, někdy i o základy budování systému.

Podle mého názoru probíhá obvykle poznání na všech třech úrovních, přičemž aplikační zřetele kladou důraz na stránku operativní, studium systému na stránku teoretickou. Ani při výkladu teoretických otázek se ovšem obvykle nevyhneme zpočátku spontánním a operativním přístupům. Uvedené stupně spolu navzájem souvisejí, jeden přechází v druhý, myšlení se často opírá o představy, někdy např. geometrické, vlastnosti pojmů prověřujeme operativními přístupy, k důkazům potřebujeme mít vyjasněny pojmy a souvislosti mezi nimi, intervence intuice při hledání důkazů může mít ráz spontánního přístupu.

Častý didaktický nedostatek v práci naší školy spočívá v tom, že vykládáme učivo převážně teoreticky, nevyužíváme dostatečně reprezentace pojmů různými interpretacemi, učíme nenázorně a zanedbáváme tak rozvíjení představ. Tím se komplikuje na každé úrovni poznání nejen porozumění teorii, ale ztěžují se i možnosti teorii aplikovat.

Vyučování je velmi složitý společenský jev, který má mnoho aspektů a zdá se, že každý pokus o jeho stručnou charakteristiku je nutně zkreslující. Přesto je výhodné určité názory na charakter vyučování formulovat. Pro vyučování matematice to provedl např. H. Freudenthal v knize *Revisiting Mathematics Education.*

Nejdříve vysvětleme v jeho duchu termín matematizace. Rozumíme jím jakoukoli činnost, která vede k tvorbě matematiky. Učit matematiku znamená dělat matematiku, matematika sama je činnost.

Freudenthal rozeznává čtyři přístupy k vyučování matematice.

1. Mechanický přístup odpovídá Skinnerovu chápání učení jako systému reakcí. Člověka můžeme podobně jako počítač naprogramovat pomocí drilu k provádění aritmetických, algebraických a geometrických operací a k řešení problémů, které lze podle určitých znaků klasifikovat a dále řešit podle určitých vzorů. Tato stará myšlenka ožívá dnes v idejích počítači řízené výuky. Je ovšem otázka, proč mají být lidé vychováváni k řešení úkolů, které mohou rychleji, laciněji a spolehlivěji řešit stroje. Zdá se, že u části populace se spokojíme s mechanickým přístupem k učení, tento styl by však neměl být charakteristický pro učitelské vzdělání.

2. Strukturalistický přístup k učení můžeme doložit v historii dvěma příklady: tradiční geometrií uspořádanou na základě axiomatické konstrukce a tzv. moderní matematikou založenou na teorii množin a logice. Dobrá myšlenka rozvíjet deduktivní myšlení na systematicky uspořádaném učivu pomocí ohledu a porozumění se v praxi zvrhla na reprodukování dedukcí, které byly předtím žákovi předvedeny. Příkladem takovéhoto přístupu k vyučování na úrovni základní školy byla deduktivně koncipovaná geometrie sovětské školy např. podle učebnic A. V. Pogorelova. V modernizované matematice byl pro žáky vytvářen strukturovaný svět množin a relací, který měli žáci poznávat pomocí diagramů, schémat, her atp. I v tomto

případě byla matematika odtržena od reality.

3. Empirický přístup k matematice vychází z potřeb praxe a potřebám praxe má sloužit. Jde o utilitární vzdělání anglického typu. Při vyučování jsou využívány zkušenosti žáků, žáci však nejsou vedeni k systematickému a racionálnímu jejich zpracování. Jde o přístup k matematice orientovaný k jednotlivým profesím.

4. Realistický přístup k vyučování vychází z reálných podnětů a problémů žákova světa. Individuální nebo skupinový postup ve vyučování je přitom určován spektrem výsledků a postojů jednotlivých žáků. Žák se tak stává znovuobjevitelem, tvůrcem matematiky, což podněcuje a rozvíjí jeho schopnosti. Je ovšem otázka, zda lze všechny žáky dovést k takovémuto tvořivému přístupu k matematice, zda u části populace nezískáme více přístupem mechanickým: naučíme žáky aspoň správně reagovat na typické podněty.

Někteří autoři rozlišují tzv. horizontální a vertikální matematizaci. Při horizontální matematizaci jde o budování cesty z reality do světa matematiky, ze života do oblasti symbolů. Jde tedy o přechod ze světa každodenní žákovy zkušenosti do světa, v němž pracuje se symboly. Rekonstrukce světa symbolů — to je ovšem již tzv. vertikální matematizace. Je zřejmé, že hranice horizontální a vertikální matematizace jsou neostré, jeden svět se mísí s druhým. Přesto však lze právě pomocí těchto dvou typů poněkud ozřejmit klasifikaci přístupů k učení. Horizontální matematizace, konstrukce matematiky z podnětů praxe, se uplatňuje při empirickém a realistickém vyučování, vertikální matematizace, rekonstrukce matematiky, je vlastní strukturálnímu a realistickému pohledu. Mechanický přístup k vyučování neobsahuje prvky matematizace.

Realistické vyučování matematice (Realistic Mathematics Education) se v posledních letech úspěšně rozvíjí v nizozemských školách jako výsledek dlouhodobého působení Freudenthalova institutu v Utrechtu.

Základní změna, kterou přináší realisticky koncipované vyučování do vzdělání, je jeho poměr k aplikacím. Podle obvyklého pohledu je matematika hotový aplikovatelný systém a úkolem vyučování je tento formální systém zvládnout a naučit žáky ho aplikovat. Pro realistický přístup je charakteristický důraz na matematizaci, a to jak v horizontálním, tak i vertikálním smyslu, tento přístup chápe matematiku jako pracovní aktivitu, jako metodu. Učit se matematiku znamená dělat matematiku. Podstatnou částí matematiky je řešení problémů spjatých s realitou. Mnohé reálné problémy se tak stávají nedílnou složkou kurikula od samého začátku.

Vraťme se k naší původní otázce: Může být vysokoškolské vyučování matematice dobrým vzorem pro pedagogickou činnost učitele matematiky na základní škole? Podle mého názoru by měl být přístup k matematice na vysoké škole téhož typu jako přístup k matematice na škole základní. Bude-li vysokoškolská matematika vycházet z problémů a nebude-li orientována mechanicky, bude účelně orientovat k analogickým přístupům i budoucí učitele.

Některé rysy shodné s realistickým přístupem k vyučování matematice uplatňuje u nás ve svých experimentech kolektiv pracovníků soustředěný kolem Kabinetu pro didaktiku matematiky MÚ ČSAV v Praze. Jde především o využívání podnětů z praxe a postupné vytváření matematických poznatků ve spolupráci žáků s učitelem. Otázkami realistického přístupu k matematice ve vzdělání učitelů zá-