Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Lukeš

Výuka matematické analýzy na Matematicko-fyzikální fakultě KU

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 1, 33--36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139635

VÝUKA MATEMATICKÉ ANALÝZY NA MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTĚ KU

JAROSLAV LUKEŠ, Praha

V tomto krátkém článku bych chtěl zájemce seznámit se stylem práce výuky matematické analýzy pro obor matematika v prvních dvou letech studia na MFF KU po zkušenostech získaných dokončením těchto dvou dvouletí a navázat tak na článek [1].

Ve školním roce 1968—69 byla na MFF KU započata výuka podle nových, podstatně upravených studijních plánů, podle nichž byli posluchači již od 1. ročníku rozděleni do tří oborů — matematika, fyzika a učitelské studium. Potřeby současného bouřlivého rozvoje matematiky spolu s jejími aplikacemi na nejrůznější vědní obory si v učebních plánech vynutily nejen podstatné rozšíření probírané látky zejména z matematické analýzy, nýbrž i vytyčení kvalitativně nového způsobu zvládnutní látky. V komisi pro vypracování sylabu přednášky z matematické analýzy spolu s jejím předsedou prof. V. JARNÍKEM pracovali RNDr. I. ČERNÝ, CSc., RNDr. J. KOPÁČEK, CSc., RNDr. J. LUKEŠ, CSc., RNDr. B. NOVÁK, CSc. Komise kladla důraz nejen na získání zběhlosti v technické části, nýbrž hlavně na osvojení teoretických částí aktivním způsobem, směřující k samostatnému řešení lehčích problémů, samostatné schopnosti studovat z časopisecké literatury a k cvičení schopnosti srozumitelně a logicky správně své poznatky v písemné i ústní formě reprodukovat. Tomuto cíli byl podřízen celý cyklus přednášek i cvičení, přičemž týdenní počty hodin byly upraveny takto:

	1. semestr	2. semestr	3. semestr	4. semestr
matematická analýza — přednáška	6	4	4	4
matematická analýza — cvičení	4	4	2	4
metrické prostory — přednáška	0	2	2	0
metrické prostory — cvičení	0	0	2	0
matematické praktikum	0	0	0	3
celkem	10	10	10	11

Podrobný sylabus přednášky je obsažen ve skriptech [2] a [3]. Uveďme pouze, že kromě „klasických" partií matematické analýzy přednáška např. zahrnovala také hlubší studium teorie reálných funkcí (existence i konstrukce spojité funkce bez derivace, derivovaná čísla, asymptotické chování funkcí aj.), problematiku sčítacích metod, moderněji pojatou teorii funkcí více proměnných (věta o implicitních funkcích dokazovaná pomocí Banachovy věty, elementární teorie variet), teorii integrálu (Riemannův, Newtonův, Stieltjesův, Daniellův, Lebesgueův), abstraktní teorii míry, teorii absolutně spojitých funkcí, studium Fourierových řad i úvod do teorie plošného integrálu. V přednášce z metrických prostorů se posluchači dozvěděli také o výstavbě reálných čísel (zúplněním), o aplikacích Baireovy věty o kategoriích, o prostoru spojitých funkcí na kompaktu aj.

V přednáškách jsme se snažili studentům ukázat, že matematická analýza není ještě ani dnes nějakou uzavřenou a kompaktní teorií, že vznikla formulováním a řešením jistých problémů, učili jsme naše posluchače tyto problémy hledat, formulovat a řešit, snažili jsme se vysvětlovat a objasňovat, proč jisté pojmy definujeme právě tak, upozorňovali jsme na jednotlivé souvislosti a metody výstavby různých teorií. Chtěl bych to nyní ilustrovat na některých příkladech vybraných namátkou.

(a) Hned v úvodu přednášky se definuje pojem spojitosti funkce v bodě: „Funkce f je spojitá v bodě x_0, jestliže (zapsáno pomocí kvantifikátorů)

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\text{“.}$$

Otázka, která je nasnadě a kterou jsme položili, zněla: „Co když v definici spojitosti funkce přehodíme první dva kvantifikátory a definujeme „spojitost“ funkce f v bodě x_0 výrokem

$$\exists\delta > 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \forall x(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\text{“.}$$

Má tato definice smysl? A jak vypadají funkce, které jsou „spojité“ v bodě podle této druhé definice? Posluchači měli za úkol si tento problém doma promyslet a na cvičeních pak o něm diskutovali. (Odpověď je, doufám, zřejmá. Funkce f je „spojitá“ v bodě x_0 podle druhé definice, právě když je v jistém okolí tohoto bodu konstantní; definice má tedy smysl, ale není příliš „užitečná“.)

(b) V prvním semestru se posluchači seznámili s větou, že „spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá na něm svého maxima“. Na cvičeních se pak probírala otázka, zda i nespojité funkce musí (anebo mohou) nabývat maxima, zda uzavřenost intervalu je v uvedené větě podstatná; charakterizovala se množina bodů, v nichž spojitá funkce může nabývat ostrého maxima (může být tato množina nekonečná? musí být uzavřená?) atd.

(c) Dále se v přednášce probírala věta, podle které „množina hromadných hodnot posloupnosti reálných čísel je vždy uzavřená“. A opět na cvičeních se diskutovala otázka, zda tato charakteristika je úplná. Jinými slovy, zda každá uzavřená množina na reálné ose je množinou hromadných hodnot jisté posloupnosti.

Na cvičeních bylo dost času všechny otázky vždy podrobně a důkladně prozkoumat, přičemž důraz jsme kladli na to, aby studenti si je doma mohli pečlivě rozmyslet. Postupem času, kdy si posluchači zvykali na tento nový styl práce a kdy již často sami přicházeli s různými „problémy“, pro jejichž řešení často museli sáhnout i do časopisecké literatury (jak se ukázala prospěšnost znalosti cizích světových jazyků!), jsme kladli a řešili čím dál tím těžší problémy. Uveďme ještě některé.

(d) Je známo, že reálná konvexní funkce na intervalu I má v tomto intervalu s výjimkou snad pouze spočetné množiny všude vlastní derivaci. Když jsme později probírali teorii funkcí více proměnných a definovali pojem konvexity, zkoumali jsme analogickou otázku – charakterizovat množinu bodů, kde konvexní funkce nemá totální diferenciál. Částečnou odpověď na tento problém lze nalézt v [2], str. 128–129. Řešení tam obsažené pochází přitom od samotných studentů.

(e) V matematickém praktiku jsme během 4. semestru zobecňovali též pojem spojitosti funkce a definovali jsme tzv. symetrickou spojitost (funkce f je symetricky spojitá v bodě x_0, jestliže $\lim_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = 0$; funkce f je symetricky spojitá v otevřeném intervalu, jestliže je symetricky spojitá v každém jeho bodě) i tzv. symetrickou derivaci. A v této souvislosti se vynořila celá řada otázek. Od problémů jednoduchých (jak je to se symetrickou spojitostí složené funkce, platí Rolleova věta pro symetrickou spojitost? je každá symetricky spojitá funkce darbouxovská?) jsme dospěli až k problémům, na něž jsme těžko sami hledali odpověď (je např. každá symetricky spojitá funkce měřitelná? je borelovská? lze charakterisovat jednoduše množinu bodů spojitosti symetricky spojité funkce?).

Již od prvního ročníku byly na cvičeních zařazovány jednotlivé *referáty* podle uvážení přednášejícího a vedoucích cvičení, v nichž šlo především o zvládnutí menšího úseku doplňujícího látku, který byl zadán v bodech s náznaky důkazů. Úkolem posluchače pak bylo během cvičení (asi tak v 15—30 minutách) svým kolegům onen krátký celek vyložit. Ve čtvrtém semestru pak bylo zařazeno tříhodinové *praktikum*, v němž se v referátech probíraly obsáhlejší a obtížnější celky zadané obdobným způsobem (vždy skupině posluchačů) a navíc se vyžadovalo samostatné řešení lehčích i těžších problémů. Jako témata na praktika jsme zařadili aplikace metod matematické analýzy na jiné příbuzné obory (např. teorii čísel či harmonické funkce), zobecňování pojmů známých z přednášek (např. konvexní funkce více proměnných), témata rozšiřující znalosti přednášek (baireovská klasifikace funkcí), témata ukazující na různé zajímavosti matematické analýzy (existence a konstrukce některých funkcí „patologických" vlastností) či témata, kde se definují nové pojmy a zkoumají jejich vlastnosti (např. symetrická spojitost a derivace). O řadě těchto témat se lze dočíst v [2], [3].

Na začátku čtvrtého semestru bylo též jednotlivým posluchačům zadáno téma *ročníkové práce* s podrobnější osnovou a některými problémy. Je samozřejmé, že stupeň obtížnosti a podrobnost návodu se volily podle úrovně jednotlivých studentů. Úkolem pak bylo podrobné písemné zpracování a hlavní důraz byl položen na přesný i správný písemný projev. Ukázalo se, že právě samostatnost zpracování, hledání vlastních originálních příkladů i metod, jakož i nových problémů, byly hnací silou v práci posluchačů a ti většinou nebrali ročníkové práce jako „domácí úkoly", ale jako vlastní tvořivou práci. A výsledky byly velice pěkné. Na jedné straně slabší posluchači získávali potřebnou sebedůvěru, na druhé straně řada prací měla takovou úroveň, že byly přijaty do tisku v matematických časopisech našich i zahraničních. Uveďme některé z těchto prací. Posluchači P. Kaláškovi se podařilo značně obecným způsobem zkonstruovat funkci spojitou na reálné ose, která má v každém bodě horní symetrickou derivaci $+\infty$, dolní $-\infty$. Jeho postup je přitom jednodušší než mezitím publikovaná konstrukce polského matematika Filipczaka. Posluchač J. PACHL dokázal velmi elementárním a konstruktivním způsobem zobecnění známé Radon-Nikodymovy věty pro jisté aditivní množinové funkce. V této souvislosti se zmiňme také o práci posluchače M. ZAHRADNÍKA, který zobecnil Ralph de Marrovy výsledky o pevném bodu lipschitzovských zobrazení, a o práci posluchače (dokonce 1. ročníku) R. ŠVARCE, který se zabýval otázkou, zda součet spojité a darbouxovské funkce musí být darbouxovská funkce (je totiž známo, že součet dvou spojitých funkcí je spojitá, a tedy darbouxovská funkce, zatímco součet dvou darbouxovských funkcí nemusí již být darbouxovská funkce). Z výsledků poslední doby se ještě zmiňme o práci posluchače T. MAŠKA, který studoval větu o vázaných extrémech v lineárních topologických prostorech, dále o práci posluchače P. HOLICKÉHO, který vylepšil Cederovy výsledky o diferencovatelných cestách, o práci posluchače P. HEJDY, který studoval darbouxovské funkce ve vícerozměrných prostorech, o práci posluchače J. JANDY o existenci řešení diferenciálních rovnic a o práci posluchače J. MACEŠKY, který studoval systémy riemannovských funkcí v obecných Rieszových prostorech.

Pro lepší studenty byly kromě toho organizovány výběrové semináře a přednášky, zabývající se různou problematikou a poskytující posluchačům další příležitost hlubšího studia matematické analýzy. O nich se lze dočíst již ve zmíněném článku [1].

Řekli jsme na začátku, že matematická analýza není uzavřeným celkem. Liší se však od ostatních oborů a disciplín zejména tím, že neřešené problémy jsou mnohem těžší a složitější a jejich řešení vyžaduje nový, originální přístup. Zkušenosti z posledních let na naší fakultě ukazují, že zejména mladí zájemci, kteří se nezaleknou systematické práce, mohou významnou měrou přispět k dalšímu rozvoji matematické analýzy řešením důležitých otázek, které odolávaly úsilí i významných světových matematiků.

Závěrem lze říci, že naší snahou bylo, aby posluchači MFF KU se uměli brzo přizpůsobit rychlému rozvoji matematických disciplín, aby si zvykli seriózně a poctivě pracovat, aby se neučili látce zcela bezmyšlenkovitě, ale naopak s hlubším porozuměním, aby se sami naučili hledat a formulovat (a později též řešit) různé problémy, aby dovedli pracovat s literaturou, aby uměli nastudované znalosti reprodukovat a předávat dalším (ať již v ústní či písemné formě), zkrátka, aby se naučili *dělat matematiku.* A to byl náročný a namáhavý úkol jak pro studenty, tak i pro kolektiv pracovníků (P. AKSAMIT, S. FUČÍK, J. LUKEŠ, J. MILOTA, I. NETUKA, B. NOVÁK, D. PREISS, V. ŠŤASTNOVÁ, J. VESELÝ), který výuku matematické analýzy vedl. Nelze říci, jaký bude výsledek tohoto úsilí, to ukáže teprve čas a posoudí jiní. V každém případě to však byly roky tvrdé a poctivé práce všech.

Literatura

[1] S. FUČÍK, J. MILOTA, B. NOVÁK, O práci katedry matematické analýzy matematicko-fyzikální fakulty KU s nadanými posluchači, Pokroky mat. fyz. astr. *16* (1971), 181—186.

[2] J. LUKEŠ A KOLEKTIV, Referáty a praktika z matematické analýzy, skripta, UK Praha, 1970.

[3] J. LUKEŠ A KOLEKTIV, Problémy z matematické analýzy, skripta, SPN Praha, 1971.