Ernest Jucovič

Z kombinatorickej geometrie mnohostenov

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 1, 24--29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139644

Z KOMBINATORICKEJ GEOMETRIE MNOHOSTENOV*)

ERNEST JUCOVIČ, Košice

Kombinatorická štruktúra mnohostenov sa v súčasnosti intenzívne študuje vo viacerých zameraniach. Stručne pojednáme o partiách, s ktorými sa v Košiciach zaoberáme. Výber bol robený tak, aby sa niečo nové povedalo jednak kolegom, ktorým robí ťažkosti rozmýšľať o viac ako 3-rozmerných objektoch, a jednak kolegom, ktorým je proti srsti rozmýšľať o menej ako 4-rozmerných objektoch. Výber nie je reprezentatívny, výklad na niektorých miestach nie je celkom presný (kvôli stručnosti), žiadne tvrdenie nedokazujeme. Necitujeme ani jednotlivé práce; na konci uvedieme prehľadné články.

I. TROJROZMERNÉ MNOHOSTENY

1. Označme $p_i(M)$, resp. $v_i(M)$ počet i-uholníkových stien, resp. i-hranných vrcholov konvexného mnohostena M; zrejme je $i \geqq 3$. Dajme si otázku: Dané sú postupnosti $p = (p_3, \ldots, p_m)$, $v = (v_3, \ldots, v_n)$ nezáporných celých čísel. Existuje konvexný mnohosten M, pre ktorý $p_i(M) = p_i$, $v_j(M) = v_j$ pre každé $i = 3, \ldots, m$, $j = 3, \ldots, n$, $p_i = 0$ pre $i > m$, $v_j = 0$ pre $j > n$. (Ak áno, nazveme postupnosti p, v *realizovateľné*.) Takúto otázku môže položiť brusič diamantov či snáď mineralóg alebo matematik, ale odpovedať na ňu by mal matematik. Z Eulerovej vety

$$\sum_{i \geqq 3} p_i(M) + \sum_{j \geqq 3} v_j(M) = h + 2\,,$$

kde h je počet hrán mnohostena M, vyplývajú rovnosti

$$\sum_{k \geqq 3} (4 - k)\, p_k + \sum_{k \geqq 3} (4 - k)\, v_k = 8 \tag{1}$$

$$\sum_{k \geqq 3} (6 - k)\, p_k + 2 \sum_{k \geqq 3} (3 - k)\, v_k = 12 \tag{2}$$

ako podmienky nutné pre realizovateľnosť postupností p, v. Ďalšia nutná podmienka je, aby $\sum_{k \geqq 3} k\, p_k$, $\sum_{k \geqq 3} k\, v_k$ boli čísla párne. Ale rovnosť (1) nijako neobmedzuje čísla p_4, v_4, rovnosť (2) neobmedzuje čísla p_6, v_3. Dá sa ukázať, že ani súhrn všetkých štyroch uvedených podmienok nie je pre realizovateľnosť dvojice postupností p, v postačujúci. Napríklad postupnosti $p = (4, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, $v = (6, 0, 0, 0, \ldots)$ nie sú

*) Obsah tohoto článku sa zhruba kryje s obsahom autorovej prednášky na II. konferencii slovenských matematikov v Jasnej pod Chopkom 5. decembra 1970.

realizovateľné; niet konvexného 5-stena, ktorý má štyri trojuholníkové a jednu šesťuholníkovú stenu a ktorého všetky vrcholy sú tretieho stupňa. A tak si matematik, keďže nevie odpovedať na vyššie uvedenú otázku o plnej charakterizácii dvojíc postupností p, v realizovateľných konvexnými 3-rozmernými mnohostenmi, dá najprv otázku omnoho slabšiu: Ak sú dané postupnosti celých nezáporných čísel $p = (p_3, \ldots, p_m)$, $v = (v_3, \ldots, v_n)$ vyhovujúce rovnosti

(3) $$\sum_{k \geqq 3} (4 - k)(p_k + v_k) = 8 ,$$

pričom čísla

(4) $$\sum_{k \geqq 3} k\, p_k , \quad \sum_{k \geqq 3} k\, v_k$$

sú párne, existuje mnohosten M, pre ktorý platí $p_i(M) = p_i$, $v_i(M) = v_i$ pre každé $i \neq 4$?

Odpoveď je: Áno.

Odpoveď na analogickú otázku, uvažujúc rovnosť (2) namiesto (1), je už trochu komplikovanejšia a znie:

Ak postupnosti $p = (p_3, \ldots, p_m)$, $v = (v_3, \ldots, v_n)$ *vyhovujú rovnosti* $\sum_{k \geqq 3} (6 - k)\, p_k + 2 \sum_{k \geqq 3} (3 - k)\, v_k = 12$, *existuje konvexný mnohosten M, pre ktorý* $p_i(M) = p_i$, $i \neq 6$, $v_j(M) = v_j$, $j \neq 3$ *vtedy a len vtedy, keď pre postupnosti p, v neplatí súčasne:* $\sum p_i = 0$ *pre i nepárne,* $\sum v_j = 1$ *pre* $j \not\equiv 0 \bmod 3$ (nepublikované).

Dôkazy týchto viet nie sú také jednoduché, ako by sa hádam zdalo. Pozitívna časť (že nejaké mnohosteny existujú) sa dokazuje netriviálnymi konštrukciami mnohostenov, ktoré sú realizáciami postupností p, v. V dôkaze negatívnej časti druhého tvrdenia (že tedy neexistuje konvexný mnohosten so samými párnouholníkovými stenami a jediným vrcholom stupňa $\not\equiv 0 \bmod 3$) sa viacnásobne použije indukcia a isté redukcie rovinných grafov. Taký je postup dôkazov i viacerých viet, ktoré nasledujú.

Omnoho viac sa vie o vektoroch $(p_3(M), p_4(M), \ldots)$ 3-valentného mnohostena M, tj. takého, ktorého každý vrchol inciduje s práve tromi hranami (stenami). Uveďme ako príklady niekoľko tvrdení o týchto mnohostenoch:

Postupnosť $(4, 0, 0, p_6, 0, 0, \ldots)$ *je realizovateľná ako 3-valentný mnohosten vtedy a len vtedy, keď* p_6 *je párne číslo rôzne od 2.*

Postupnosť $(3, 1, 1, p_6, 0, \ldots, 0)$ *je realizovateľná ako 3-valentný mnohosten vtedy a len vtedy, keď* p_6 *je nepárne číslo väčšie ako 1.*

Postupnosť $(1, 0, 9, p_6, 0, \ldots)$ *je realizovateľná ako 3-valentný mnohosten vtedy a len vtedy, keď* $p_6 \geqq 3$.

Postupnosť $(p_3, p_4, \ldots, p_n)$ *vyhovujúca* (2), *pričom platí* $p_3 = p_4 = 0$, *je realizovateľná ako 3-valentný mnohosten s každým* $p_6 \geqq 8$.

Ak M je trojvalentný mnohosten, platí

$$p_6(M) \geqq 4 - \tfrac{1}{3}(2p_4(M) + 3p_5(M)) + \tfrac{1}{3}\sum_{k \geqq 7}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right] - 6\right) p_k(M)\,. \tag{5}$$

(Existuje mnohosten M, pre ktorý je v (5) splnená rovnosť).

Ak $p_4(M) \neq 0$, $p_{8s}(M) \neq 0$ *a* $p_i(M) = 0$ *pre* $i \neq 4, 8s$, *tak je* $p_{8s}(M)$ *párne číslo.*
Ak $p_5(M) \neq 0$, $p_{10s}(M) \neq 0$ a $p_i(M) = 0$ *pre* $i \neq 5, 10s$, *tak je* $p_{10s}(M)$ *párne číslo.*
(V oboch posledných vetách je s pevné prirodzené číslo.)

Uvedené vety snáď dostatočne ilustrujú skutočnosť, že problematika charakterizácie vektorov p, v realizovateľných konvexnými mnohostenmi je síce silne rozpracovaná, ale neriešeného je v nej ešte veľmi veľa.

V každej vede je prirodzenou tendenciou poznatky o istej triede objektov zovšeobecňovať, prípadne prenášať na triedy príbuzných objektov. Konvexné mnohosteny patria medzi mnohosteny rodu 0 (ich hranica je homeomorfná guľovej ploche). Prvé možné zovšeobecnenie je:

Charakterizovať postupnosti p, v realizovateľné ako mnohosteny ľubovoľného rodu g! (Hranica takého mnohostena je teda orientovateľná plocha rodu g, steny sú rovinné konvexné mnohouholníky.) Sme ešte veľmi ďaleko od riešenia tejto otázky. Ba dokonca ani pre mnohosteny rodu 1 neboli publikované analógie vyššie uvedených viet. Že analogické tvrdenia platiť nemusia, čitateľ ihneď spozná, keď si uvedomí (a ľahko dokáže), že niet mnohostena rodu 1, t. j. „prstencovitého", ktorého všetky vrcholy sú trojvalentné. (Z konvexnosti stien trojvalentného mnohostena M vyplýva konvexnosť jeho vrcholových mnohohranov a aj samotného M.) V čom je tu ťažkosť?

Pri úvahách o trojrozmernych konvexných mnohostenoch hrá významnú pomocnú úlohu nasledujúca Steinitzova veta: Graf je 3-polyédrický (tj. interpretovateľný ako vrcholy a hrany 3-rozmerného konvexného mnohostena) vtedy a len vtedy, keď je rovinný a má (vrcholový) stupeň súvislosti aspoň 3.

Táto veta umožňuje previesť skúmanie kombinatorickej štruktúry 3-rozmerných mnohostenov na skúmanie istých grafov. (O rovinných grafoch sa pomerne veľa vie.) Je to pohodlnejšie.

Pre mnohosteny žiadneho rodu $g \neq 0$ nemáme k dispozícii vetu, akou je Steinitzova veta pre mnohosteny rodu 0; teda vetu charakterizujúcu graf mnohostena rodu $g \neq 0$. Byť vnoriteľný do plochy rodu g a mať stupeň súvislosti aspoň 3 nestačí.

Nie každý rozklad orientovateľnej plochy, každá mapa, vytvorená vnorením grafu so stupňom súvislosti aspoň 3 do nej, je realizovateľná ako mnohosten (aby tedy oblasti rozkladu boli *rovinné* konvexné mnohouholníky). Ale tými rozkladmi orientovateľných plôch sa zaoberať môžeme; sú samy o sebe zaujímavé. Tak bolo dokázané:

Ak postupnosti $p = (p_3, p_5, \ldots)$, $v = (v_3, v_5, \ldots)$ *vyhovujú rovnosti*

$$\sum_{k \geqq 3} (4 - k)(p_k + v_k) = 0$$

a $\sum_{k \geq 3} k\, p_k$, $\sum_{k \geq 3} k\, v_k$ *sú párne čísla, potom existuje rozklad M anuloidu s* $p_i(M) = p_i$, $v_i(M) = v_i$ *pre každé* $i \neq 4$ *vtedy a len vtedy, ak dvojica* p, v *je rôzna od dvojice* $p = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $v = (0, 0, \ldots)$ *a od dvojice* $p = (0, 0, \ldots)$, $v = (1, 1, \ , 0, \ldots)$.

Postupnosť $p = (p_3, p_4, \ldots)$ *je realizovateľná ako trojvalentný rozklad M* (taký, *ktorého každý vrchol inciduje s tromi oblasťami*) *anuloidu s nejakým* p_6 *vtedy a len vtedy, keď*

$$\sum_{k \geq 3} (6 - k)\, p_k = 0$$

a keď pre p neplatí $p_5 = p_7 = 1$, $p_i = 0$ *pre* $i \neq 5, 6, 7$ (nepublikované).

Iné možné zovšeobecnenie problémov a tvrdení o konvexných 3-rozmerných mnohostenoch je uvažovať o konvexných mnohostenoch s ľubovoľným (konečným) počtom dimenzií. O týchto mnohostenoch pohovoríme v časti II.

2. Pod *cestou* grafu rozumieme takú postupnosť $v_1 h_1\, v_2 h_2 \ldots v_m$ jeho navzájom rôznych vrcholov v_i a hrán h_i, že vrcholy v_i a v_{i+1} incidujú s hranou h_i. Cesta grafu G je *hamiltonovská*, ak obsahuje všetky vrcholy grafu G. Postupnosť $v_1 h_1 \ldots v_m h_m v_1$ navzájom rôznych vrcholov v_i a hrán h_i grafu G je jeho *hamiltonovská kružnica*, ak vrcholy v_i, v_{i+1} incidujú s hranou h_i a navyše v_1 inciduje aj s h_m.

Platí: *Minimálny počet vrcholov (hrán, stien) konvexného 3-rozmerného mnohostena, ktorého graf nemá hamiltonovskú kružnicu, je* 11 (18, 9).

Minimálny počet vrcholov (hrán, stien) 3-rozmerného simpliciálneho mnohostena (tj. takého, ktorého každá stena je trojuholník), ktorého graf nemá hamiltonovskú kružnicu, je 11 (27, 18).

Analogické otázky, týkajúce sa hamiltonovských ciest, neboli doteraz zodpovedané. Minimálny počet vrcholov (hrán, stien) mnohostena bez hamiltonovskej cesty je pravdepodobne 14 (24, 12). U simpliciálneho mnohostena sú tieto čísla pravdepodobne 14 (36), 24).

Ešte nejasnejšia je situácia s hamiltonovskými kružnicami a cestami v grafoch 3-valentných konvexných mnohostenov. A práve u tých bola otázka existencie hamiltonovských kružníc najprv študovaná (v súvislosti so slávnym problémom štyroch farieb). P. G. Tait sa r. 1880 domnieval, že každý 3-valentný konvexný mnohosten má hamiltonovskú kružnicu. Až r. 1946 W. T. Tutte (popredný súčasný odborník v teórii grafov) našiel protipríklad, 3-valentný mnohosten s 46 vrcholmi bez hamiltonovskej kružnice. A náš J. Bosák (súčasne spolu s D. Barnettom a chemikom J. Lederbergom) r. 1966 zostrojil 3-valentný mnohosten s 38 vrcholmi bez hamiltonovskej kružnice. Z druhej strany bolo dokázané, že všetky 3-valentné mnohosteny s najviac 18 vrcholmi majú hamiltonovskú kružnicu. Ale pre získanie definitívnej odpovede je interval (18, 36) ešte nepríjemne široký.

3. Teda z predošlých úvah možno odvodiť, že existujú pre $n \geq 14$ mnohosteny s n vrcholmi, ktorých vrcholy nie je možné pokryť jedinou cestou. (Hovoríme, že

vrcholy grafu G sú pokryté k cestami $C_1, \ldots, C_k$, ak každý vrchol grafu G náleží práve jednej z ciest C_i). Ku každému mnohostenu M je možné priradiť číslo $m(M)$ – minimálny počet ciest potrebných k pokrytiu jeho vrcholov (jeho grafu). Ak Γ_n je trieda všetkých n-vrcholových 3-rozmerných mnohostenov, čomu sa rovná $m(n) = \max m(M), \ M \in \Gamma_n$?

Ani na túto otázku doteraz nik nedal odpoveď. Známe je, že

$$m(n) \geqq \frac{n - 8}{3}.$$

II. d-ROZMERNÉ MNOHOSTENY

V tejto časti sa zaoberáme najmä viac ako trojrozmernými mnohostenmi. Čitateľ si sám sformuluje pre tieto mnohosteny otázky analogické k tým z I. časti článku. Musíme poznamenať, že definitívnych riešení je tu ešte menej ako v 3-rozmernom prípade.

Úvahy o d-rozmerných mnohostenoch, $d > 3$, majú silnejší geometrický ráz, lebo doteraz nie je k dispozícii charakterizácia k-rozmerného skeletu, $k \leqq d - 1$, takýchto mnohostenov pre žiadne $k \geqq 1$ a $d \geqq 4$. (Taká ako je v trojrozmernom prípade Steinitzova veta o 3-polyédrických grafoch.)

4. Chceme stručne poinformovať čitateľa o najvýznamnejšom výsledku z posledného roka. Priraďme ku každému d-rozmernému mnohostenu M vektor $(s_0(M), s_1(M), \ldots, s_{d-1}(M))$, kde $s_i(M)$ značí počet i-rozmerných stien mnohostena M. T. S. Motzkin r. 1957 vyslovil tvrdenie o maximálnom počte i-rozmerných stien, $1 \leqq i \leqq d - 1$, d-rozmerného mnohostena v závislosti od d a od počtu jeho vrcholov. Že totiž toto maximum je vždy dosiahnuté u tzv. cyklických mnohostenov. Dôkaz svojho tvrdenia ale po roky nepublikoval, a preto bolo ešte za jeho života (nedávno umrel!) pertraktované ako domnienka, tzv. *upper bound conjecture*. Postupne bola dokázaná pre stále širšie triedy mnohostenov, až r. 1970 P. McMullen ju dokázal pre všetky mnohosteny (doteraz nepublikované).

5. Hranica $(d + 1)$-rozmerného mnohostena je zložená z d-rozmerných mnohostenov. d-rozmerný mnohosten M nazvime *d-stenovým*, ak existuje $(d + 1)$-rozmerný mnohosten, ktorého všetky d-rozmerné steny sú kombinatoricky izomorfné s M.

Prirodzené otázky sú: Ktoré d-rozmerné mnohosteny sú a ktoré nie sú d-stenové? Pre $d = 2$ je vec jednoduchá: 2-stenovým mnohostenom môže byť iba 3-, 4- a 5-uholník (to vyplýva z Eulerovej vety) a tieto 2-rozmerné mnohosteny *sú* 2-stenové mnohosteny. Vo vyšších dimenziách situácia zďaleka nie je taká prehľadná. Z toho, čo sa vie, uveďme:

Každý d-rozmerný mnohosten s menej než $d + 3$ vrcholmi je d-stenový.

d-rozmerný simplex aj mnohosten typu d-rozmernej kocky sú d-stenové mnoho-

steny. Naproti tomu mnohosten typu d-rozmerného krížového mnohostena (zovšeobecnený pravidelný osemsten) nie je d-stenový pre žiadne $d \geqq 6$, ale je d-stenový pre $d = 3$; či je d-stenový pre $d = 4, 5$, to sa nevie.

Ak žiadna (grafová) kružnica 3-mnohostena P neobsahuje viac ako tretinu všetkých hrán mnohostena P, potom P nie je 3-stenový. (Také mnohosteny sa ľahko zostroja!)

6. Rozklad d-rozmernej guľovej plochy na „dosť veľa" d-rozmerných simpliciálnych sférických oblastí nazvime *kombinatorickou d-sférou*. (Presnejšie: Kombinatorická d-sféra je simpliciálny d-komplex vzniklý z hranice $(d + 1)$-simplexu konečnou postupnosťou transformácií, ktorými sú zjemnené delenie alebo k nemu inverzné zobrazenie.)

Je každá kombinatorická d-sféra izomorfná (kombinatoricky) s hraničným komplexom $(d + 1)$-rozmerného konvexného mnohostena? Pre $d = 2$ nám vyššie uvedená Steinitzova veta zabezpečuje, že áno. Ale pre $d \geqq 3$ tomu tak nemusí byť. Už pre $d = 3$ existuje 3-sféra s 8 vrcholmi, ktorá nie je izomorfná s hranicou 4-rozmerného mnohostena. Zatiaľ nie je známych veľa vlastností kombinatorických sfér, ktoré by neplatili pre konvexné mnohotseny. Snáď vôbec jediný silnejší všeobecný výsledok tu je veta P. MANIHO:

Každá kombinatorická $(d - 1)$-sféra s najviac $d + 3$ vrcholmi je izomorfná s hraničným komplexom d-rozmerného mnohostena (doteraz nepublikované).

Skutočnosť, že nie každá kombinatorická d-sféra je realizovateľná ako hranica $(d + 1)$-rozmerného konvexného mnohostena, núti preniesť širokú problematiku kombinatorickej štruktúry mnohostenov na kombinatorické sféry, prípadne i na iné kombinatoriché variety.

Literatúra

B. GRÜNBAUM: *Convex Polytopes*, Interscience, New York 1967. (Pripravuje sa ruské vydanie.)

V. KLEE: Convex polytopes and linear programming, Proc. IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems 1966, 123—158.

B. GRÜNBAUM - G. C. SHEPHARD: Convex Polytopes, Bull. London Math. Soc. *1* (1966), 257—300.

B. GRÜNBAUM: Polytopes, graphes, and complexes, Bull. Amer. Math. Soc. *76* (1970), 1131—1201.