Jan Reiterman; Vojtěch Rödl

Atomy ve svazu uniformit

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 4, 208--217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139760

Atomy ve svazu uniformit

Jan Reiterman, Vojtěch Rödl,
katedra matematiky FJFI ČVUT

Teorie uniformních prostorů je jednou z důležitých částí obecné topologie. Její motivací je formalizace pojmu stejnoměrné spojitosti. Zatímco teorie topologických prostorů, formalizující pojem spojitosti, byla již rozvinuta do značné šířky i hloubky, teorie uniformit pravděpodobně teprve čeká na svůj „zlatý věk", i když již bylo dosaženo řady hlubokých výsledků a aplikací v jiných oborech. Proto je žádoucí vyjasnit všechny základní otázky týkající se struktury uniformních prostorů. Příspěvkem k této snaze je vyšetřování svazu uniformit, jehož cílem je hlouběji proniknout do otázky vzájemného vztahu uniformit na dané množině. Odpovídající problematika v případě topologických prostorů byla již podrobně zkoumána; upozorňujeme na velmi pěkný přehledný článek [5], shrnující poznatky o svazu topologií. Také se objevilo několik prací týkajících se svazů jiných topologických struktur (svaz konvergenčních struktur [1], svaz proximit [10]).

V tomto článku se pokusíme podat přehled o dosavadních výsledcích o svazu uniformit na dané množině. Protože pro pochopení struktury svazu je užitečné vědět co nejvíce o jeho atomech, zaměříme se na tuto otázku. Pro pohodlí čtenáře nejdříve shrneme základní definice týkající se uniformit (§ 1) a svazu uniformit (§ 2).

§ 1. Základní pojmy a značení

a) Je-li X libovolná množina, pak *pokrytím* množiny X rozumíme libovolný soubor $\mathscr{P} = \{P_i;\, i \in I\}$ jejích podmnožin takový, že $\bigcup\{P_i;\, i \in I\} = X$.

b) Je-li $\mathscr{P} = \{P_i;\, i \in I\}$ pokrytí množiny X, pak soubor $\{V_x;\, x \in X\}$, kde $V_x = \bigcup\{P_i;\, i \in I,\, x \in P_i\}$ pro každé $x \in X$, je opět pokrytím množiny X. Toto pokrytí nazýváme ***hvězdou*** pokrytí $\mathscr{P}$ a značíme $\mathscr{P}^*$.

c) Jsou-li $\mathscr{P} = \{P_i;\, i \in I\}$ a $\mathscr{Q} = \{Q_j;\, j \in J\}$ dvě pokrytí množiny X, pak říkáme, že $\mathscr{P}$ je *jemnější* než $\mathscr{Q}$, a píšeme $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$, jestliže pro každé $i \in I$ existuje $j \in J$ tak, že $P_i \subset Q_j$.

d) Jsou-li $\mathscr{P} = \{P_i;\, i \in I\}$ a $\mathscr{Q} = \{Q_j;\, j \in J\}$ dvě pokrytí množiny X, pak soubor $\{P_i \cap Q_j;\, (i, j) \in I \times J\}$ je opět pokrytí množiny X; toto pokrytí se nazývá průsek pokrytí $\mathscr{P}$ a $\mathscr{Q}$ a značí se $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$.

e) *Uniformita* na množině X je takový soubor $\mathscr{U}$ pokrytí množiny X, že platí:

i) Je-li $\mathscr{P} \in \mathscr{U}$ a $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$, pak $\mathscr{Q} \in \mathscr{U}$.

ii) Je-li $\mathscr{P} \in \mathscr{U}$ a $\mathscr{Q} \in \mathscr{U}$, pak $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q} \in \mathscr{U}$.

iii) Ke každému $\mathscr{P} \in \mathscr{U}$ existuje $\mathscr{Q} \in \mathscr{U}$ tak, že $\mathscr{Q}^* \prec \mathscr{P}$.

f) Soubor $\mathscr{B}$ pokrytí množiny X je *bází* uniformity $\mathscr{U}$, jestliže pro každé pokrytí $\mathscr{P}$ množiny X platí $\mathscr{P} \in \mathscr{U}$, právě když existuje $\mathscr{Q} \in \mathscr{B}$ tak, že $\mathscr{Q} \prec \mathscr{P}$.

g) Základním příkladem uniformity je uniformita *vytvořená metrikou*: je-li ϱ metrika na X, pak odpovídající uniformita má za bázi soubor všech pokrytí tvaru $\{K_\varrho(x, \varepsilon);\ x \in X\}$, kde $K_\varrho(x, \varepsilon)$ je otevřená koule o středu x a poloměru ε, tj. $K_\varrho(x, \varepsilon) = \{y \in X;\ \varrho(x, y) < \varepsilon\}$.

h) Každá uniformita $\mathscr{U}$ na X indukuje na X topologii. Bázi okolí libovolného bodu $x \in X$ v této topologii tvoří množiny tvaru $\bigcup\{P;\ x \in P \in \mathscr{P}\}$, kde $\mathscr{P} \in \mathscr{U}$.

§ 2. Svaz uniformit

Označme $\mathrm{Uni}(X)$ množinu všech uniformit na množině X. Budeme říkat, že uniformita $\mathscr{U} \in \mathrm{Uni}(X)$ je *jemnější* než uniformita $\mathscr{V} \in \mathrm{Uni}(X)$, jestliže $\mathscr{U} \supset \mathscr{V}$. Relace „*být jemnější než*" je částečné uspořádání na $\mathrm{Uni}(X)$. V dalším budeme chápat $\mathrm{Uni}(X)$ jako částečně uspořádanou množinu vzhledem k tomuto uspořádání. Přitom platí:

2.1. Tvrzení. *a)* $\mathrm{Uni}(X)$ *má nejmenší prvek, tj. na X existuje nejjemnější uniformita; je to uniformita tvořená všemi pokrytími množiny X; tato uniformita se nazývá uniformně diskrétní; budeme ji značit $\mathscr{D}$. Poznamenejme, že $\mathscr{D}$ je jediná uniformita na X, která obsahuje pokrytí $\mathscr{P}_0 = \{\{x\};\ x \in X\}$.*

b) $\mathrm{Uni}(X)$ *má největší prvek, totiž uniformitu s bází sestávající z jediného pokrytí* $\{X\}$.

c) $\mathrm{Uni}(X)$ *je úplný svaz.*

Tvrzení *a*), *b*) jsou zřejmá; důkaz tvrzení *c*), i když není komplikovaný, vynecháme. V dalším však budeme potřebovat explicitní popis infima dvou prvků v $\mathrm{Uni}(X)$: Jsou-li $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$ uniformity na X, pak jejich infimum $\mathscr{U}_1 \wedge \mathscr{U}_2$ v $\mathrm{Uni}(X)$ je uniformita, jejíž bází je množina všech pokrytí tvaru $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$, kde $\mathscr{P}_1 \in \mathscr{U}_1$ a $\mathscr{P}_2 \in \mathscr{U}_2$.

2.2. Jako v každém svazu, i ve svazu $\mathrm{Uni}(X)$ můžeme mluvit o atomech. Připomeňme, že ve svazu S s nejmenším prvkem 0 se prvek $x \in S$ nazývá *atomem*, jestliže mezi ním a prvkem 0 není již žádný další prvek. Speciálně atom ve svazu $\mathrm{Uni}(X)$ je taková uniformita $\mathscr{A}$, že jedinou ostře jemnější (tj. jemnější a různou od $\mathscr{A}$) uniformitou je $\mathscr{D}$.

Tvrzení. *Pro každé* $\mathscr{U} \in \mathrm{Uni}(X)$, $\mathscr{U} \neq \mathscr{D}$, *existuje atom* $\mathscr{A}$ *v* $\mathrm{Uni}(X)$ *tak, že* $\mathscr{A}$ *je jemnější než* $\mathscr{U}$.

Důkaz tvrzení je prostý. Snadno zjistíme, že množina $\{\mathscr{V} \in \mathrm{Uni}(X);\ \mathscr{D} \neq \mathscr{V}$ a $\mathscr{V}$ je jemnější než $\mathscr{U}\}$ splňuje předpoklady Zornova lemmatu, a proto v ní existují minimální prvky.

2.3. Ukazuje se, že pravděpodobně neexistuje žádná jednoduchá charakterizace atomů v $\mathrm{Uni}(X)$ v případě, že X je nekonečná množina. Případ, že množina X je konečná, je triviální a nebudeme jej proto vůbec uvažovat. Pro srovnání a také proto, abychom naznačili, co máme na mysli, mluvíme-li o jednoduché charakterizaci, uvedeme nejdříve popis atomů ve svazu topologií na libovolné množině X.

Připomeňme, že filtr na množině X je takový neprázdný systém $\mathscr{F}$ jejích podmnožin, že platí:

i) $\emptyset \notin \mathscr{F}$, ii) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$,

iii) $A \in \mathscr{F}$, $A \subset B \Rightarrow B \in \mathscr{F}$.

Filtr $\mathscr{F}$ na množině X se nazývá ultrafiltr, jestliže

iv) neexistuje filtr $\mathscr{F}'$ na X tak, že $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$, $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}'$.

Poznamenejme, že podmínka iv) je ekvivalentní podmínce

iv') jestliže $A \subset X$, pak buď $A \in \mathscr{F}$ nebo $X - A \in \mathscr{F}$.

Buď X množina a buď $z \in X$. Buď $\mathscr{F}$ ultrafiltr na $X - \{z\}$. Označme $\mathscr{T}_{z,\mathscr{F}}$ topologii na X definovanou takto: množina $G \subset X$ je otevřená, právě když $G \subset X - \{z\}$ nebo $z \in G$ a $G - \{z\} \in \mathscr{F}$.

Tvrzení. *Atomy ve svazu topologií na množině X jsou právě topologie tvaru $\mathscr{T}_{z,\mathscr{F}}$. Navíc každá topologie $\mathscr{T}$ na X je suprémem nějaké množiny atomů (například množiny všech atomů, které jsou jemnější než $\mathscr{T}$).*

2.4. Předchozí tvrzení tedy dává v jistém smyslu efektivní popis atomů ve svazu topologií. Co se týče svazu uniformit, popis tohoto typu je znám pouze pro jistou třídu atomů, totiž třídu proximálně nediskrétních atomů (těm budeme věnovat § 4). Pro ostatní atomy, tedy pro atomy proximálně diskrétní, takový popis pravděpodobně neexistuje, viz § 5.

§ 3. Proximálně nediskrétní atomy

Připomeňme, že uniformita $\mathscr{U}$ na množině X se nazývá proximálně diskrétní, jestliže indukuje proximálně diskrétní proximitu. Pro čtenáře, který není obeznámen s proximitami, uvedeme ekvivalentní definici: $\mathscr{U}$ je proximálně diskrétní, jestliže pro každou množinu $A \subset X$ pokrytí $\{A, X - A\}$ leží v $\mathscr{U}$.

Proximálně nediskrétní atomy můžeme rozdělit do dvou tříd: na atomy topologicky diskrétní (tj. ty, které indukují diskrétní topologii) a topologicky nediskrétní.

3.1. *Topologicky nediskrétní atomy* představují jediné triviální příklady atomů. Buďte $x, y \in X$ dva různé body a buď $\mathscr{P}$ pokrytí sestávající ze všech jednoprvkových množin $\{z\}$, kde $z \in X - \{x, y\}$ a z množiny $\{x, y\}$. Potom všechna pokrytí $\mathscr{Q}$ množiny X taková, že $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$, tvoří uniformitu, kterou označíme $\mathscr{A}_{xy}$. Tato uniformita je atomem v $\mathrm{Uni}(X)$.

Topologie indukovaná atomem $\mathscr{A}_{xy}$ zřejmě není topologicky diskrétní; dokonce nesplňuje oddělovací axióm T_2. Naopak platí: Každý atom v $\mathrm{Uni}(X)$ s výjimkou atomů tvaru $\mathscr{A}_{xy}$ je topologicky diskrétní. To je důsledek Poznámky v následujícím odstavci a toho, že proximálně diskrétní atomy jsou automaticky topologicky diskrétní.

3.2. *Topologicky diskrétní atomy*. První takový proximálně nediskrétní atom byl popsán P. Simonem. Buď $\mathscr{F}$ libovolný ultrafiltr na množině X. Pro každé $F \in \mathscr{F}$ označme $\mathscr{P}_F$ pokrytí množiny $X \times \{0, 1\}$ tvořené všemi dvouprvkovými množinami $\{(x, 0), (x, 1)\}$, kde $x \in F$, a všemi jednoprvkovými množinami $\{(x, i)\}$, kde $x \in X - F$, $i \in \{0, 1\}$. Buď $\mathscr{S}_{\mathscr{F}}$ uniformita na $X \times \{0, 1\}$, jejíž bází je soubor všech pokrytí $\mathscr{P}_F$, kde $F \in \mathscr{F}$.

Poznámka. Je-li $\mathscr{F}$ triviální ultrafiltr (tj. takový, že $\mathscr{F} = \{F \subset X; z \in F\}$ pro nějaké $z \in X$), pak $\mathscr{S}_{\mathscr{F}} = \mathscr{A}_{xy}$, kde $x = (z, 0)$, $y = (z, 1)$, Je-li $\mathscr{F}$ netriviální, pak $\mathscr{S}_{\mathscr{F}}$ je zřejmě topologicky diskrétní.

Tvrzení [9]. *$\mathscr{S}_{\mathscr{F}}$ je atom v* Uni$(X \times \{0, 1\})$.

(Poznamenejme, že pro každou nekonečnou množinu X je X ekvivalentní s $X \times \{0, 1\}$; tedy atomy v Uni$(X \times \{0, 1\})$ se bijekcí dají převést na atomy v Uni(X).)

Důkaz předchozího tvrzení je jednoduchý; proto jej zde uvedeme. Předpokládejme, že existuje uniformita $\mathscr{V} \neq \mathscr{D}$, která je jemnější než $\mathscr{S}_{\mathscr{F}}$. Pak tedy existuje pokrytí $\mathscr{P} \in \mathscr{V}$ tak, že $\mathscr{P} \notin \mathscr{S}_{\mathscr{F}}$. Buď $\mathscr{P} = \{P_i; i \in I\}$ a buď $G = \{x \in X;$ existuje $i \in I$ tak, že. $\{(x, 0), (x, 1)\} \subset P_i\}$. Kdyby bylo $G \in \mathscr{F}$, pak by platilo $\mathscr{P}_G \prec \mathscr{P}$, tedy $\mathscr{P} \in \mathscr{S}_{\mathscr{F}}$ – spor Je tedy $X - G \in \mathscr{F}$ (viz vlastnost iv′ z definice ultrafiltru). Snadno nahlédneme, že potom pokrytí $\mathscr{P} \wedge \mathscr{P}_{X-G}$ sestává z nejvýše jednoprvkových množin. Avšak jediná uniformita, která takové porytí obsahuje, je $\mathscr{D}$. Protože $\mathscr{P} \in \mathscr{V}$ a $\mathscr{P}_{X-G} \in \mathscr{V}$, je i $\mathscr{P} \wedge \mathscr{P}_{X-G} \in \mathscr{V}$, takže $\mathscr{V} = \mathscr{D}$ – spor.

Věta [9]. Pro každý atom $\mathscr{A}$ v Uni(X), který není proximálně diskrétní, existuje ultrafiltr $\mathscr{F}$ tak, že $\mathscr{A}$ a $\mathscr{S}_{\mathscr{F}}$ jsou izomorfní.

§ 4. Proximálně diskrétní atomy

4.1. V souvislosti s atomy ve svazu topologií byla uvažována tato uniformita $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ na X, kde $\mathscr{F}$ je opět ultrafiltr na X: $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ sestává z těch pokrytí $\mathscr{P} = \{P_i; i \in I\}$ množiny X, pro která existuje $i \in I$ tak, že $P_i \in \mathscr{F}$. Jinými slovy, pokrytí $\mathscr{P}$ patří do $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ tehdy a jen tehdy, když existuje $F \in \mathscr{F}$ tak, že $\mathscr{Q}_F \prec \mathscr{P}$, kde $\mathscr{Q}_F$ je pokrytí sestávající z množiny F a ze všech jednoprvkových množin $\{x\}$, kde $x \in X - F$.

Ukázalo se, že sama uniformita $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ je zřídkakdy atomem:

4.2. Věta [9]. *Je-li $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ atom v* Uni(X), *pak ultrafiltr $\mathscr{F}$ je selektivní. Opačná implikace platí, je-li množina X spočetná (obecněji, má-li X neměřitelnou mohutnost).*

Přitom selektivita ultrafiltru je velmi silná vlastnost. Existence selektivních ultrafiltrů plyne z hypotézy kontinua (obecněji z Martinova axiómu), existují však modely teorie množin s axiómem výběru, v nichž selektivní ultrafiltry neexistují [4]. Definice zní takto: ultrafiltr $\mathscr{F}$ na X je *selektivní*, jestliže pro každý rozklad $\mathscr{R} = \{R_i; i \in I\}$ množiny X existuje $F \in \mathscr{F}$ tak, že buď $F \subset R_i$ pro nějaké $i \in I$, nebo naopak F protíná každou množinu R_i nejvýše v jednom bodě. Jinými slovy: buď $\mathscr{R} \in \mathscr{A}_{\mathscr{F}}$, nebo $\mathscr{R} \wedge \mathscr{Q}_F \prec \mathscr{P}_0$ (kde $\mathscr{P}_0 = \{\{x\}; x \in X\}$).

Jedna z implikací v předchozí větě plyne snadno z definice selektivního ultrafiltru: není-li $\mathscr{F}$ selektivní, pak $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ nemůže být atomem; skutečně, existuje rozklad $\mathscr{R}$, pro který neplatí příslušná podmínka; pak pokrytí tvaru $\mathscr{R} \wedge \mathscr{Q}_F$ $(F \in \mathscr{F})$ tvoří bázi uniformity, která je ostře jemnější než $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ a přitom není uniformně diskrétní.

4.3. Ostatní proximálně diskrétní atomy mají úzký vztah k uniformitám tvaru $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$. Platí totiž tato věta:

Věta [9]. *Je-li $\mathscr{A}$ proximálně diskrétní atom v* Uni(X), *pak existuje ultrafiltr $\mathscr{F}$ na X tak, že $\mathscr{A} \prec \mathscr{A}_{\mathscr{F}}$.*

4.4. Jak jsme již poznamenali v 3.1., každý atom indukuje topologii, která je buď diskrétní, nebo nesplňuje oddělovací axióm T_2. Totéž pak platí pro každou uniformitu, která je suprémem atomů v $\mathrm{Uni}(X)$. Ne každá uniformita je tedy suprémem atomů neboli platí tento důsledek:

Důsledek. *Svaz* $\mathrm{Uni}(X)$ *není atomární.*
To ostře kontrastuje se situací ve svazu topologií a ve svazu proximit, které atomární jsou, viz [10].

4.5. Další konstrukce proximálně diskrétních atomů byly provedeny P. Simonem [13], [14], který si položil otázku: Je-li dán ultrafiltr $\mathscr{F}$ na X, kolik je takových atomů $\mathscr{A}$, že $\mathscr{A}$ je jemnější než $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$? Užitím komplikované techniky kromě dalších pěkných výsledků dokázal tuto větu:

Věta [13]. *V teorii množin s hypotézou kontinua platí: pro každé přirozené číslo n a dále pro $n = \exp\exp \varkappa_0$ existuje ultrafiltr $\mathscr{F}$ na spočetné množině X tak, že množina všech atomů $\mathscr{A}$ jemnějších než $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ má mohutnost právě n.*

4.6. Ultrasuma atomů. Popíšeme nyní způsob (uvedený v [9]), pomocí kterého lze z daných atomů sestrojit další atomy. Předpokládejme, že $\mathscr{F}$ je ultrafiltr na množině Y. Pro každé $y \in Y$ buď dána množina X_y a atom $\mathscr{A}_y$ v $\mathrm{Uni}(X_y)$. Předpokládejme, že množiny X_y jsou po dvou disjunktní. Označme $X = \bigcup\{X_y;\ y \in Y\}$. Zvolme množinu $F \in \mathscr{F}$ a pro každé $y \in F$ zvolme pokrytí $\mathscr{P}_y \in \mathscr{A}_y$. Potom systém

$$\bigcup\{\mathscr{P}_y;\ y \in Y\} \cup \{\{x\};\ x \in X_y;\ y \in Y - F\}$$

je pokrytím množiny X. Všechna pokrytí uvedeného tvaru tvoří bázi uniformity, kterou označíme $\mathscr{A}$.

Tvrzení [9]. *$\mathscr{A}$ je atom v* $\mathrm{Uni}(X)$.

Pro zajímavost uvedeme důkaz, který je snadný. Buď $\mathscr{U}$ jemnější než $\mathscr{A}$. Označme $\mathscr{U}_y$ uniformitu na X_y indukovanou uniformitou $\mathscr{U}$ (tj. uniformitu sestávající ze všech pokrytí tvaru $\{P_i \cap X_y;\ i \in I\}$, kde $\{P_i;\ i \in I\} \in \mathscr{U}$. Položme $F_1 = \{y \in Y;\ \mathscr{A}_y$ je jemnější než $\mathscr{U}_y\}$, $F_2 = \{y \in Y;\ \mathscr{A}_y \wedge \mathscr{U}_y = \mathscr{D}\}$. Z definice atomu plyne ihned, že $F_1 \cup F_2 = Y$. Jedna z množin F_1, F_2 tedy musí ležet v ultrafiltru $\mathscr{F}$. Snadno se odvodí, že $F_1 \in \mathscr{F}$ implikuje $\mathscr{A} = \mathscr{U}$ a $F_2 \in \mathscr{F}$ implikuje $\mathscr{A} = \mathscr{D}$.

§ 5. Nenuldimenzionální atomy

Atomy, které byly sestrojeny výše uvedenými konstrukcemi, měly společnou vlastnost: každý z nich měl bázi tvořenou rozklady. Uniformity s touto vlastností se nazývají *nuldimenzionální*. Proto vznikl problém (formulovaný v [9] a [13]), zda vůbec existuje atom, který nuldimenzionální není.

5.1. Prvním výsledkem o nenuldimenzionálních atomech je následující tvrzení, které bylo dokázáno J. Pelantem dříve, než se vědělo, zda takové atomy existují: důkaz je uveden v [13].

Tvrzení. *Buď X spočetná množina. Jestliže atom $\mathscr{A}$ v* Uni(X) *není nuldimenzionální, pak existuje rozklad $\mathscr{P} \in \mathscr{A}$, $\mathscr{P} = \{A_i;\, i \in I\}$ takový, že všechny množiny $A_i (i \in I)$ jsou konečné.*

Toto tvrzení ukázalo, v jakém tvaru se nenuldimenzionální atomy mají hledat. Zároveň naznačilo, že problém existence nenuldimenzionálního atomu se bude týkat pokrytí konečných množin a povede tak k použití metod konečné kombinatoriky, tedy metod, které nebyly v teorii uniformních prostorů obvyklé.

5.2. Abychom naznačili, v čem spočívá obtížnost konstrukce nenuldimenzionálního atomu, upozorníme na následující fakt, který téměř bezprostředně vyplývá z definice atomu a z definice nuldimenzionální uniformity. Je-li $\mathscr{A}$ nenuldimenzionální atom, pak existuje pokrytí $\mathscr{P} \in \mathscr{A}$, které má tuto vlastnost: pro každý rozklad $\mathscr{R} \prec \mathscr{P}$ existuje $\mathscr{V} \in \mathscr{A}$ tak, že $\mathscr{V} \wedge \mathscr{R} \prec \mathscr{P}_0$ (kde $\mathscr{P}_0$ je pokrytí množiny X jednoprvkovými množinami); na druhé straně $\mathscr{V} \wedge \mathscr{P}$ není jemnější než $\mathscr{P}_0$, neboť $\mathscr{V} \wedge \mathscr{P} \in \mathscr{A}$.

5.3. První konstrukce nenuldimenzionálního atomu byla uvedena v [11]. Základem konstrukce bylo níže uvedené tvrzení z konečné kombinatoriky. *Krychlí* dimenze n budeme rozumět konečnou množinu $K_n \subset R^n$, jejíž prvky jsou právě ty body $(a_1, \ldots, a_n) \in R^n$, že $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Je-li $n < N$, pak K_n lze vnořit do K_N několika přirozenými způsoby: zvolíme pevně $(s_1, \ldots, s_N) \in K_N$, $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $l_1, l_2, \ldots, l_n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, kde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jsou po dvou různá a $l_1, l_2, \ldots, l_n$ jsou po dvou různá, a definujeme $\varphi : K_n \to K_N$ předpisem

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_N),$$

kde

$$b_{k_i} = l_{a_i} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$b_j = s_j \quad \text{pro} \quad j \in \{1, 2, \ldots, N\} - \{k_1, \ldots, k_n\}.$$

Zobrazení $\varphi : K_n \to K_N$ výše uvedeného tvaru budeme nazývat *přirozená vnoření.*

Množinu K_n můžeme chápat jako konečný metrický prostor, kde vzdálenost dvou bodů bude definována jako počet souřadnic, ve kterých se tyto dva body liší. Potom každé přirozené vnoření $\varphi : K_n \to K_N$ je izometrické zobrazení.

Věta [11]. *Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $N > n$ tak, že platí: je-li $\mathscr{R}$ libovolný rozklad krychle K_N, pak existuje přirozené vnoření $\varphi : K_n \to K_N$ a rozklad $\{1, 2, \ldots, n\} = A \cup B$ tak, že body $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$, $\varphi(a'_1, \ldots, a'_n)$ leží ve stejné třídě rozkladu $\mathscr{R}$, právě když $a_i = a'_i$ pro všechna $i \in A$.*

5.4. Nyní nastíníme myšlenku vlastní konstrukce nenuldimenzionálního atomu v Uni(X), kde X je spočetná množina. Není obtížné pak tento atom „rozšířit" na nenuldimenzionální atom v Uni(Y), kde Y je libovolná nespočetná množina obsahující X. Budeme pracovat v teorii množin s *hypotézou kontinua.* Sestrojíme uniformitu $\mathscr{M}$ na spočetné množině X, vytvořenou metrikou ϱ nabývající hodnot v $\langle 0, +\infty \rangle$ a ultrafiltr $\mathscr{F}$ na X tak, že

a) pro každý rozklad $\mathscr{R}$, který je jemnější než pokrytí otevřenými jednotkovými koulemi (vzhledem k metrice ϱ) existuje $F \in \mathscr{F}$ tak, že každé dva různé body z F leží v různých třídách rozkladu $\mathscr{R}$.

b) pro každé přirozené číslo n a pro každé $F \in \mathscr{F}$ existují dva různé body $a, b \in F$ tak, že $\varrho(a, b) < 1/n$.

Potom podmínka b) zaručí, že $\mathscr{M} \wedge \mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ není nuldimenzionální (viz 5.2, kde za $\mathscr{P}$ volíme pokrytí otevřenými jednotkovými koulemi vzhledem k ϱ, a za $\mathscr{V}$ volíme $\mathscr{P} \wedge \wedge \mathscr{Q}_F$, viz 4.1).

5.5. Konstrukce 1 [11]. Položme $Y = \bigcup\{K_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$. Množinu Y budeme chápat jako metrický prostor: vzdálenost dvou bodů ležících v různých krychlích definujeme jako $+\infty$. Pomocí předchozí věty lze pro každý rozklad $\mathscr{R} = \{R_i;\ i \in I\}$ množiny Y sestrojit zobrazení $\varphi_{\mathscr{R}} : Y \to Y$, zobrazující každé K_n izometricky (jako přirozené vnoření) do nějakého K_N, přičemž je buď

i) $\varphi_{\mathscr{R}}(K_n) \subset R_{i_n}$ pro nějaké $i_n \in I$, $n = 1, 2, \ldots$

nebo

ii) $\varphi_{\mathscr{R}}(K_n) \cap R_i$ má nejvýše jeden prvek pro každé $i \in I$ a každé $n = 1, 2, \ldots$

Užitím hypotézy kontinua a transfinitní indukce lze zajistit, aby všechny podmnožiny množiny Y, které obsahují množinu tvaru $\varphi_{\mathscr{R}}(Y)$, kde $\mathscr{R}$ probíhá všechny rozklady množiny Y, tvořily nějaký ultrafiltr $\mathscr{G}$ na Y.

Konečně definujeme metrický prostor (X, ϱ), kde $X = \bigcup\{Y_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$, kde Y_n je metrický prostor, který vznikne z Y tak, že jeho metriku zmenšíme n krát a vzdálenost mezi každými dvěma body $a \in Y_m$, $b \in Y_n$, $m \neq n$, definujeme jako $+\infty$. Na X definujeme ultrafiltr $\mathscr{F}$ tak, že $F \in \mathscr{F}$, právě když $\{n;\ F \cap Y_n \in \mathscr{G}\} \in \mathscr{H}$, kde $\mathscr{H}$ je libovolný, ale pevně zvolený ultrafiltr na množině všech přirozených čísel.

Chceme nyní dokázat, že metrika na X a ultrafiltr $\mathscr{F}$ mají vlastnosti a), b), uvedené v 5.4. Buď tedy $\mathscr{R}$ rozklad množiny X, $\mathscr{R} \prec \mathscr{P}$, kde $\mathscr{P}$ je pokrytí X otevřenými jednotkovými koulemi. Pro každé n označme $\mathscr{R}_n$ rozklad množiny Y_n, který vznikl „zúžením" $\mathscr{R}$ na Y_n. Označme A množinu těch přirozených čísel k, že pro zobrazení $\varphi_{\mathscr{R}_k}$, které bylo výše sestrojeno pro rozklad $\mathscr{R}_k$ nastane případ ii). Z toho, že $\mathscr{R} \prec \mathscr{P}$ se snadno odvodí, že $A \in \mathscr{H}$ (neboť A obsahuje všechna přirozená čísla až na konečně mnoho). Potom množina $F = \bigcup\{\varphi_{\mathscr{R}_k}(Y_k);\ k \in A\}$ leží v $\mathscr{F}$ a splňuje podmínku a) z 5.4. Protože $\mathscr{F}$ zřejmě splňuje i podmínku b) z 5.4, jsme hotovi.

5.6. Jakmile byla dokázána existence nenuldimenzionálních atomů, vznikla celá řada dalších otázek. Základní otázkou je:

1. *Pro které ultrafiltry $\mathscr{F}$ na spočetné množině existuje nenuldimenzionální atom $\mathscr{A}$ tak, že $\mathscr{A}$ je jemnější než $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$?* Všechny konstrukce z [13] vedou k ultrafiltrům $\mathscr{F}$, pro něž takový atom neexistuje. Totéž platí pro každý selektivní ultrafiltr, jak plyne z toho, že sama (nuldimenzionální) uniformita $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ je atomem (viz 4.2).

Jako speciální případ otázky 1. je možné se zeptat:

2. *Existuje p-bod $\mathscr{F}$, pro který existuje nenuldimenzionální atom $\mathscr{A}$ tak, že $\mathscr{A}$ je jemnější než $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$?*

p-body jsou totiž ultrafiltry v jistém smyslu velmi blízké selektivním ultrafiltrům; definici p-bodu obdržíme, zaměníme-li v definici selektivního ultrafiltru výrok „F protíná každou množinu R_i nejvýše v jednom bodě" výrokem „všechny množiny tvaru $R_i \cap F$ jsou konečné". Výše uvedená konstrukce na tuto otázku odpověď nedává, naopak, je principiálně nemožné, aby ultrafiltr $\mathscr{F}$ získaný v ní byl p-bod.

Další otázkou je:

3. *Existuje ultrafiltr $\mathscr{F}$ tak, aby existovaly alespoň dva různé nenuldimenzionální atomy jemnější než $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$?*

Vraťme se nyní k první otázce; ta se zdá velmi obtížná, a proto vyslovíme jedno její podstatné zjednodušení. Buď $\mathscr{A}$ nenuldimenzionální atom v $\mathrm{Uni}(X)$, kde X je spočetná množina. Podle výše uvedené Pelantovy věty (viz 5.1) existuje rozklad $\mathscr{R} = \{R_i; i \in I\} \in \mathscr{A}$ takový, že všechny množiny R_i jsou konečné. Označme $q : X \to I$ kanonické zobrazení (tj. $q(x) = i$, právě když $x \in R_i$ a položme $q(\mathscr{F}) = \{q(F); F \in \mathscr{F}\}$; potom $\mathscr{G} = q(\mathscr{F})$ je ultrafiltr na množině I. Otázka nyní zní:

4. *Které ultrafiltry $\mathscr{G}$ na spočetné množině vzniknou tímto způsobem?*

Řešení otázek 2., 3. a 4. bylo dáno novou konstrukcí, jejíž výsledky autoři oznámili v [12].

5.7. Základem konstrukce je opět kombinatorická věta ramseyovského typu. Připomeňme, že k-graf (kde k je přirozené číslo) je uspořádaná dvojice $(K, \mathscr{H})$, kde K je konečná množina a $\mathscr{H}$ je systém jejích podmnožin mohutnosti k. Cyklem délky d v $(K, \mathscr{H})$ se rozumí taková posloupnost $k_1, \ldots, k_d \in K$, že existují $H_1, H_2, \ldots, H_d \in \mathscr{H}$ tak, že $k_1, k_2 \in H_1, \ldots, k_{d-1}, k_d \in H_{d-1}, k_d, k_1 \in H_d$, přičemž alespoň dvě z množin $H_1, \ldots, H_d$ jsou navzájem různé.

Věta [7]. *Jsou-li k, d přirozená čísla, pak existuje k-graf $(K, \mathscr{H})$, který neobsahuje cykly délky menší než d, přičemž pro každý rozklad $\mathscr{R}$ množiny K existuje $H \in \mathscr{H}$ tak, že nastane jedna z následujících možností:*

1. *Množina H je obsažena v jedné třídě rozkladu $\mathscr{R}$.*
2. *Každý bod množiny H je obsažen v jiné třídě rozkladu $\mathscr{R}$.*

Tato věta byla dokázána v [7] použitím nekonstruktivní pravděpodobnostní metody a je zobecněním známé Erdösovy-Hajnalovy-Lovászovy věty dokázané v [3] a [6].

5.8. Konstrukce 2. Prvním krokem vlastní konstrukce je opět sestrojení vhodného metrického prostoru X tvaru $X = \bigcup\{K_n; n = 1, 2, \ldots\}$, kde K_n jsou konečné metrické prostory definované indukcí: K_1 je libovolný konečný metrický prostor splňující podmínku

$$\max\{\varrho(x, y); x, y \in K_1\} = \min\{\varrho(x, y); x, y \in K_1, x \neq y\} = 1$$

(ϱ značí metriku). Předpokládejme, že byl sestrojen konečný metrický prostor K_n tak, že

$$\max\{\varrho(x, y); x, y \in K_n\} = 1\,, \quad \min\{\varrho(x, y); x, y \in K_n, x \neq y\} = 1/n\,.$$

Zvolíme libovolný konečný metrický prostor K_n' obsahující K_n tak, aby

$$\max\{\varrho(x, y); x, y \in K_n'\} = 1\,, \quad \min\{\varrho(x, y); x, y \in K_n', x \neq y\} = 1/n + 1\,.$$

Buď k_n počet bodů K_n' a buď $d_n = 2n$. Buď $(K_{n+1}, \mathscr{H}_{n+1})$ k_n-graf, bez cyklů délky menší než d_n, jehož existence je zaručena předchozí větou. Na K_{n+1} zavedeme metriku takto: každou množinu $H \in \mathscr{H}_{n+1}$ ztotožníme nějakým libovolným, ale pevným způsobem s K_n'; tím je metrika definována na každém $H \subset K_{n+1}$, $H \in \mathscr{H}_{n+1}$. Neexistence krátkých cyklů v $(K_{n+1}, \mathscr{H}_{n+1})$ pak zajišťuje, že se dá definovat metrika na celém K_{n+1}, která je rozšířením již definované metriky na jednotlivých množinách $H \in \mathscr{H}_{n+1}$, přičemž K_{n+1} splňuje indukční předpoklad o maximu a minimu metriky.

Metriku na jednotlivých množinách K_n nyní rozšíříme na metriku na množině $X = \bigcup\{K_n; n = 1, 2, \ldots\}$ tak, že definujeme $\varrho(x, y) = 1$ pro $x \in K_m$, $y \in K_n$, $m \neq n$. Tím je výchozí metrický prostor K sestrojen.

Dalším krokem konstrukce je sestrojení vhodného ultrafiltru $\mathscr{F}$ na X. Tento ultrafiltr sestává z jistých množin $F_{\mathscr{R}}$ a všech jejich nadmnožin, kde $\mathscr{R}$ probíhá všechny rozklady množiny X. Množiny $F_{\mathscr{R}}$ jsou definovány transfinitní indukcí, přičemž se využívá rozkladové vlastnosti k_n-grafů $(K_{n+1}, \mathscr{K}_{n+1})$ tak, aby ultrafiltr $\mathscr{F}$ a metrika na X byly ve vztahu uvedeném v 5.4. Tím se opět zaručí, že libovolný atom $\mathscr{A}$, jemnější než $\mathscr{M} \wedge \mathscr{A}_{\mathscr{F}}$, kde $\mathscr{M}$ je uniformita indukovaná metrikou na X, je nenuldimenzionální.

Označme $q : X \to I$, kde I je množina všech přirozených čísel, zobrazení definované předpisem $q(x) = n$, právě když $x \in K_n$. Při konstrukci $\mathscr{F}$ se dá zaručit, aby ultrafiltr $\{q(F); F \in \mathscr{F}\}$ se rovnal libovolnému předem danému ultrafiltru $\mathscr{G}$ na I. To řeší problém 4.

Dá se ukázat, že pro $\mathscr{G}$ selektivní je $\mathscr{F}$ automaticky p-bod, což řeší problém 2.

Konečně se dá dokázat, že při dostatečně velkých rozdílech mezi počtem bodů K_n a K'_n se dá metrika na K'_n pozměnit, aniž by se tím pozměnil ultrafiltr $\mathscr{F}$ a navíc tak, aby tyto různé metriky vedly nutně k různým (nenuldimenzionálním) atomům jemnějším než $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$. Tím je řešen problém 3.

§ 6. Závěr

Na závěr uvedeme několik problémů týkajících se svazu uniformit a jeho atomů, které zůstaly otevřeny.

První z nich je otázka existence takového ultrafiltru $\mathscr{F}$ na spočetné množině X, že množina všech atomů v Uni(X), které jsou jemnější než $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$, má právě mohutnost n, kde $\aleph_0 \leqq n < \exp \exp \aleph_0$ (za hypotézy kontinua), viz věta 4.5.

Další problém je spojen se skutečností, že jak konstrukce z [13], tak konstrukce nenuldimenzionálních atomů užívají podstatným způsobem hypotézy kontinua. Dá se ukázat, že hypotézu kontinua lze nahradit slabším předpokladem, totiž Martinovým axiómem. Není však známo, zda zmíněné výsledky platí absolutně (tj. bez dodatečných množinových axiómů). Zatím se tedy například nedá vyloučit, že existují modely teorie množin, v nichž jsou všechny atomy v Uni(X) nuldimenzionální.

Konečně uvažme ještě jednu otázku. Konstrukce z [13] a výše uvedené konstrukce nenuldimensionálních atomů v Uni(X) se týkají spočetné množiny X. Tyto konstrukce je možno následujícím způsobem rozšířit na libovolnou nespočetnou množinu Y. Je-li $\mathscr{A}$ atom v Uni(X) a $j : X \to Y$ libovolné prosté zobrazení, pak uniformita $\tilde{\mathscr{A}}$ na Y, sestávající ze všech pokrytí $\mathscr{P} = \{P_i; i \in I\}$ množiny Y takových, že $\{j^{-1}(P_i); i \in I\} \in \mathscr{A}$ je opět atomem v Uni(Y); je-li $\mathscr{A}$ nenuldimenzionální, pak $\tilde{\mathscr{A}}$ také. Podobně pro konstrukce z [13], viz věta 4.5. Dále platí, že nenuldimenzionální atomy v Uni(Y) lze získat z nenuldimenzionálních atomů v Uni(X) pomocí ultrasumy- viz 4.6. Problémem nyní je: existují nenuldimenzionální atomy v Uni(Y), resp. ultrafiltry na Y s vlastnostmi z věty 4.5, které jsou podstatně jiného typu? Tato otázka úzce souvisí s problémem, zda Pelantova věta (viz 5.1) platí i pro nespočetné množiny.

Literatura

[1] Boyd, C. A.: *A note on complementation in lattices of convergence functions.* Proc. Royal Irish Acad. Sci A (1974), 2, 7—10.

[2] Čech, E.: *Topological spaces* (revidováno M. Katětovem a Z. Frolíkem). Academia Prague 1966.

[3] Erdös, P., Hajnal, A.: *On chromatic number of graphs and set systems.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. *17* (1966) 1—2, 61—99.

[4] Kunen, K.: *Some points in βN.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. *80* (1976), 385—398.

[5] Larson, R. E., Andima, S. J.: *The lattice of topologies: a survey.* Rocky Mountains J. Math. *5* (1975), 177—198.

[6] Lovász, L.: *On chromatic number of finite set systems.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. *19* (1968), 1—2, 59—67.

[7] Nešetřil, J., Rödl, V.: *Selective graphs and hypergraphs.* Annals of Discrete Math. *3* (1978), 181—189.

[8] Pelant, J., Reiterman, J.: *Atoms and proximal fineness.* Seminar Uniform Spaces 1975—76, Praha 1976, 37—41.

[9] Pelant, J., Reiterman, J.: *Atoms in uniformities.* Seminar Uniform Spaces 1973—74, Praha 1975, 73—81.

[10] Pelant, J., Reiterman, J.: *Atoms in uniformities and proximities.* General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Part B, Praha 1977, 353—356.

[11] Reiterman, J., Rödl, V.: *A non-zero dimensional atom.* Seminar Uniform Spaces 1976—77, Praha 1977, 65—73.

[12] Reiterman, J., Rödl, V.: *On non-zero dimensional atoms.* Seventh Winter School on Abstract Analysis, MÚ ČSAV, Praha 1979, 67—68.

[13] Simon, P.: *Uniform atoms on ω.* Seminar Uniform Spaces 1975—76, Praha 1976, 7—35.

[14] Simon, P.: *Uniform atoms on ω.* General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Part B, Praha 1977, 430—433.

diskuse

Diskuse o užitečnosti matematiky*)

Mária Benešová, Bratislava

Táto poznámka se týka jediného, no dôležitého miesta v článku A. Sivošovej. Jedná se o moment pochopenia nového pojmu. Pochopenie pojmu pozostáva z dvoch častí. Prvá je vlastné pochopenie pojmu, ktoré sa vačšinou udeje v krátkej dobe, a druhá, náročnejšia, aj keď sa na ňu niekedy zabúda, je začlenenie nového pojmu do pojmovej zásoby žiaka. Týmto začlenením rozumieme postupné vytváranie vzťahov k iným pojmom a aj prehodnocovanie obsahu pojmov vybudovaných skôr. Tento proces je náročný a je mu potrebné pri vyučovaní venovať veľkú pozornosť. Ako je uvedené v článku, pri sprostredkovávaní pojmov žiakom je nutnou podmienkou dialóg medzi učiteľom

*)Diskusní příspěvky k článku A. Sivošové *Niekoľko úvah o užitočnosti matematiky,* který jsme otiskli v minulém čísle. (Pozn. red.)