Jarolím Bureš

O šestnáctém Hilbertově problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 1, 27--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139845

Hilbertovy problémy

O šestnáctém Hilbertově problému

Jarolím Bureš, Praha

Tento problém, přesněji jeho první část, se týká počtu a vzájemné polohy souvislých komponent reálné algebraické křivky v reálné projektivní rovině a počtu souvislých komponent reálné algebraické plochy v reálném projektivním prostoru. Na jeho základě se vytvořila nová teorie – topologie reálných algebraických variet.

Dříve než přistoupím k formulaci problému, pokusím se velmi stručně objasnit některé pojmy, kterých budu dále používat. Podrobnosti a přesné definice nalezne zájemce např. v knihách [15], [11] aj.

Označme RP_n n-rozměrný reálný projektivní prostor a zvolme v něm pevný homogenní souřadnicový systém $(x_0, \ldots, x_n)$. $(x_0, x_1, \ldots x_n$ jsou reálná čísla ne všechna rovna nule, $(x_0, \ldots x_n)$ a $(tx_0, \ldots, tx_n)$ pro t reálné nenulové jsou souřadnice téhož bodu z RP_n). Body s $x_0 \neq 0$ nazveme vlastními body RP_n, body s $x_0 = 0$ nevlastními body. Reálná algebraická nadplocha řádu m v RP_n je určena rovnicí

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\,, \tag{1}$$

kde $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ je homogenní polynom stupně m s reálnými koeficienty. Množina bodů Γ reálné algebraické nadplochy určené rovnicí (1) je množina všech bodů z RP_n, jejichž homogenní souřadnice vyhovují rovnici (1). Pro $n = 2$ je rovnicí $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ určena reálná algebraická křivka v reálné projektivní rovině RP_2.

Singulárním bodem algebraické nadplochy nazveme její bod, jehož homogenní souřadnice splňují systém rovnic:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0, \ldots, x_n) = 0\,. \tag{2}$$

Algebraické nadplochy nemající žádný singulární bod se nazývají nesingulárními algebraickými nadplochami. Množina bodů Γ reálné algebraické nadplochy se rozpadne v RP_n na konečný počet disjunktních částí – komponent souvislosti. Je-li Γ nesingulární nadplocha, jsou všechny tyto komponenty uzavřené hladké podvariety RP_n.

V případě reálné algebraické křivky v RP_2 dostaneme rozdělení těchto komponent na dva typy a ovály (neboli sudé komponenty) a liché komponenty. Pro názornou definici těchto typů si vezmeme následující model projektivní roviny: Označme S^2 dvourozměrnou sféru v R^3 t.j.

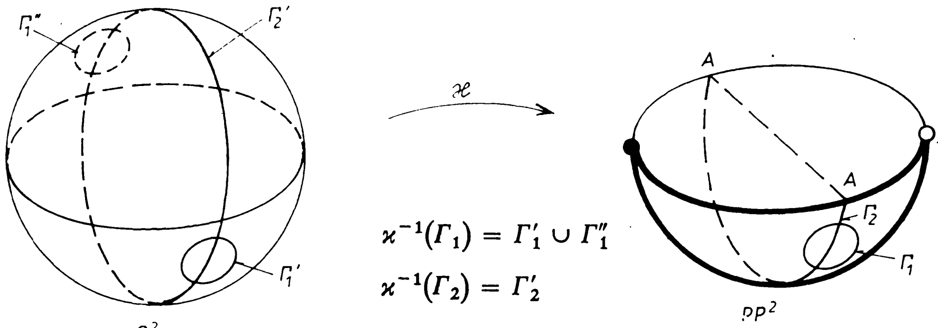
$$S^2 = \{(x_0, x_1, x_2), x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

Nechť $\sim$ je relace na S^2 „ztotožnění bodů souměrně sdružených podle počátku“ tj.

$$(x_0, x_1, x_2) \sim (-x_0, -x_1, -x_2) .$$

Příslušný faktorprostor $S^2/\sim$ je ekvivalentní projektivní rovině a určuje zobrazení $\varkappa$: $S^2 \to S^2/\sim\ = RP_2$ přiřazující každému bodu sféry jeho třídu ekvivalence v relaci $\sim$.

Komponenta K křivky Γ se nazývá oválem, jestliže její vzor $\varkappa^{-1}(K)$ sestává na sféře ze dvou uzavřených křivek, lichou komponentou, jestliže její vzor sestává z jediné křivky (viz obr. 1).



Obr. 1.

Každý ovál dělí RP_2 na dvě části, jednu difeomorfní kruhu (vnitřek oválu) a druhou difeomorfní Möbiovu listu (vnějšek oválu). Jsou-li O_1 a O_2 dva různé ovály křivky Γ (viz [4]) a vnitřek O_1 je částí vnitřku O_2, řekneme, že ovál O_1 leží uvnitř oválu O_2. Je známo, že křivka sudého řádu sestává pouze z oválů, kdežto křivka lichého řádu sestává z jedné liché komponenty a oválů.

A. Harnack v roce 1876 [1] dokázal, že počet souvislých komponent reálné algebraické křivky řádu m v reálné projektivní rovině nepřevyšuje číslo $1/2\,(m - 1)\,.\,(m - 2) + 1$ a sestrojil příklady algebraických křivek s tímto maximálním počtem komponent. Tyto křivky se nazývají M-křivkami. Zároveň dokázal, že M-křivky jsou nesingulární. K. Rohn ve své práci [8] se zabýval studiem komponent reálných algebraických ploch čtvrtého řádu v reálném projektivním prostoru RP_3 a našel některé zajímavé příklady.

D. Hilbert konkrétně položil tyto otázky:

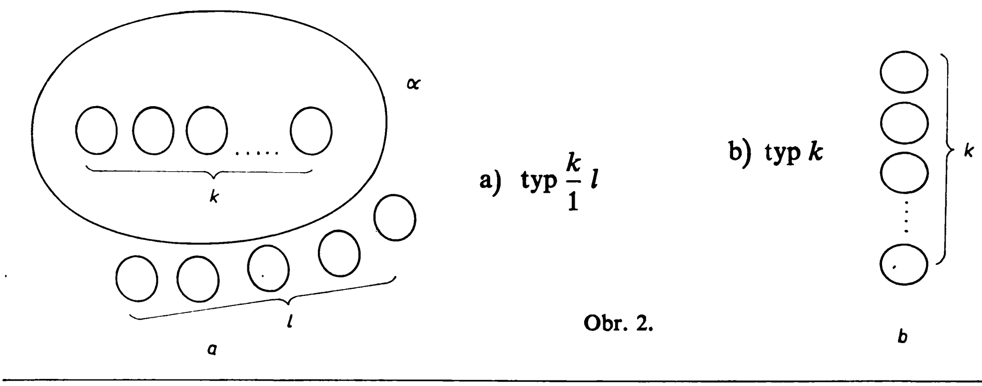
A. Z Harnackových výsledků plyne, že M-křivka šestého řádu má jedenáct komponent. Existují M-křivky, které mají všechny komponenty rozloženy tak, že žádná komponenta neleží uvnitř jiné komponenty? (Příklady sestrojené Harnackem obsahovaly vždy dvojici komponent, z nichž jedna byla uvnitř druhé.)

B. Určení maximálního počtu komponent reálné algebraické plochy čtvrtého řádu v trojrozměrném reálném projektivním prostoru.

Prací zabývajících se přímo těmito tématy není mnoho. Od počátečních analytických a algebraických metod se přešlo v poslední době k používání aparátu algebraické topologie. Definitivně byla vyřešena otázka existence M-křivky řádu šest v otázce A, a to negativně (křivka neexistuje) nedávno zesnulým rektorem moskevské státní university I. G. PETROVSKÝM v roce 1938 v práci [4]. Také druhá část problému byla nedávno vyřešena V. M. CHARLAMOVEM, který dokázal, že maximální počet komponent nesingulární plochy čtvrtého stupně v RP_3 je deset. Vzniklo však mnoho dalších otázek, z nichž většina nebyla dosud úplně vyřešena. Zabývejme se nyní problémem vzájemné polohy komponent algebraické křivky. Pro křivky řádu $m \leqq 5$ je problém snadno řešitelný. M-křivky řádu 4 sestávají ze čtyř oválů, z nichž žádný není uvnitř jiného. M-křivka řádu 5 sestává z jedné liché komponenty a z šesti oválů, z nichž žádný není uvnitř jiného.

V roce 1891 vyslovil D. Hilbert v práci [2] hypotézu, že křivka řádu 6 nemůže mít jedenáct oválů, z nichž žádný není uvnitř jiného. O důkaz této hypotézy se pokoušeli někteří jeho žáci. První důkaz podal K. Rohn v práci [9], avšak tento důkaz byl neúplný. Beze zbytku dokázal tuto hypotézu až I. G. Petrovskij, který našel, že algebraická křivka sudého řádu m nemůže mít více než $k = 1/8 \,.\, (3m^2 - 6m) + 1$ oválů, které jsou rozloženy tak, že žádný z nich není uvnitř jiného. Pro $m = 6$ je $k = 10$.

První způsob sestrojení M-křivek je dán v Harnackově práci [1]. D. Hilbert v práci [2] uvedl jiný způsob konstrukce M-křivek. I. BRISOTTI na základě těchto metod sestrojil řadu nových způsobů konstrukce M-křivek. Některá upřesnění těchto metod uvedli též G. BIGGIOGERO a A. WINAN.



Obr. 2.

A. GUDKOV se ve svých pracích [10], [19] zabýval další klasifikací křivek řádu šest. Pro tyto křivky zavedl tyto typy: Křivka C_6 má typ $\frac{k}{1}\, l$, jestliže sestává ze základního oválu α, uvnitř kterého leží k oválů, z nichž žádný neleží uvnitř jiného, a dále je l oválů, které společně s oválem α mají tu vlastnost, že žádný z nich neleží uvnitř jiného (viz obr. 2a). Křivka má typ k, jestliže sestává z k oválů, z nichž žádný neleží uvnitř jiného (obr. 2b).

Křivka řádu 6 může mít tyto možné typy s 11, 10 a 9 ovály:

11 oválů	$\frac{10}{1}$,	$\frac{9}{1}1$,	$\frac{8}{1}2$,	$\frac{7}{1}3$,	$\frac{6}{1}4$,	$\frac{5}{1}5$,	$\frac{4}{1}6$,	$\frac{3}{1}7$,	$\frac{2}{1}8$,	$\frac{1}{1}9$,	11
10 oválů	$\frac{9}{1}$,	$\frac{8}{1}1$,	$\frac{7}{1}2$,	$\frac{6}{1}3$,	$\frac{5}{1}4$,	$\frac{4}{1}5$,	$\frac{3}{1}6$,	$\frac{2}{1}7$,	$\frac{1}{1}8$,	10	
9 oválů	$\frac{8}{1}$,	$\frac{7}{1}1$,	$\frac{6}{1}2$,	$\frac{5}{1}3$,	$\frac{4}{1}4$,	$\frac{3}{1}5$,	$\frac{2}{1}6$,	$\frac{1}{1}7$,	9		

Harnack sestrojil křivku typu $\frac{1}{1}9$, Hilbert typu $\frac{9}{1}1$. Petrovskij dokázal neexistenci křivky typu 11. Gudkov v práci [18] původně dokázal neexistenci křivek typů nad lomenou čarou a ještě dále typů $\frac{5}{1}3$, $\frac{5}{1}4$, $\frac{5}{1}5$, ale v důkazech byly pro typy $\frac{5}{1}3$, $\frac{5}{1}4$, $\frac{5}{1}5$, $\frac{6}{1}3$, $\frac{6}{1}4$ chyby, které odstranil v další práci [17] pro případ křivek typů $\frac{6}{1}3$, $\frac{6}{1}4$. Ukázalo se však, že křivky typu $\frac{5}{1}3$ lze sestrojit Hilbertovou metodou a křivky typů $\frac{5}{1}4$ a $\frac{5}{1}5$ existují, ale je nutno je konstruovat jinými metodami. Závěrem lze říci, že křivky typů pod lomenou čarou existují a nad ní neexistují.

Další klasifikace se dostane rozdělením oválů na sudé a liché: Je-li C nesingulární algebraická křivka řádu m, nazveme ovál křivky C sudým (lichým), jestliže leží uvnitř sudého (lichého) počtu oválů. Ovály neležící uvnitř žádného jiného oválu řadíme mezi sudé ovály. Označme P počet sudých oválů a Q počet lichých oválů křivky C. Petrovskij dokázal pro m sudé odhad

$$|P - Q| \leqq \tfrac{1}{8}(3m^2 - 6m) + 1 \tag{3}$$

a dokonce dokázal, že existují křivky, pro které zde platí rovnost. Tyto křivky sestrojil pomocí metody použité Harnackem pro konstrukci M-křivek. Analogická věta se získá také pro křivky lichého řádu. Gudkov v práci [19] vyslovil hypotézu, že pro M-křivky řádu $2k$ platí kongruence:

$$P - Q \equiv k^2 \,(\mathrm{mod}\ 8)\,. \tag{4}$$

Z jeho výsledků vyplývala tato kongruence pro $k = 3$ (Pro $k = 1, 2$ je zřejmá). V. I. ARNOLD dokázal v práci [18] slabší tvrzení, a to

$$P - Q \equiv k^2 \,(\mathrm{mod}\ 4)\,.$$

Tento důkaz se opíral o zkoumání operace involuce určité čtyřrozměrné variety na jejích dvourozměrných homologiích. Platnost Gudkovovy hypotézy dokázal pak V. A. ROCHLIN ve své práci [20], kde tento výsledek obdržel jako speciální důsledek obecné věty.

Pro m sudá se snadno dokáže, že rozdíl $P - Q$ je roven Eulerově charakteristice*)

*) Eulerova charakteristika polyedru K je součet

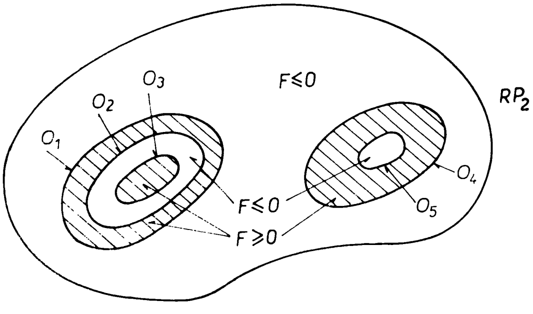
$$E(K) = \sum (-1)^r \, p^r \,,$$

kde $p^r = \dim H_r(K, Z_2)$ je r-té Bettiho číslo K. ($H_r(K, Z_2)$ je r-tá homologická grupa s koeficienty v Z_2.) Přitom je $p^0 = \dim H_0(K, Z_2)$ počet souvislých komponent K.

uzávěru množiny M těch vlastních bodů projektivní roviny, pro které je

$$x_0^m F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \geqq 0 \quad \text{při} \quad x_0 = 1\,.$$

Obr. 3 ukazuje názorně rovnost $P - Q = E(M)$. Předpokládejme, že Γ sestává z oválů O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 a nechť $F \leqq 0$ vně O_1. Sudé ovály jsou O_1, O_3, O_4, liché O_2, O_5. Proto je $P = 3$, $Q = 2$, $p^0 = 3$, $p' = 2$, $p^2 = 0$, tedy $E(M) = 1 = P - Q$.



Obr. 3.

D. Hilbert také zkoumal topologickou strukturu reálných algebraických křivek v trojrozměrném projektivním prostoru (prostorových křivek). Dokázal v práci [2], že počet komponent reálné prostorové křivky řádu m nepřevyšuje číslo $1/4\,(m - 2) + 1$ pro m sudé a $1/4\,(m - 1)(m - 4) + 1$ pro m liché a že křivky s tímto maximálním počtem komponent existují.

Otázku vzájemné polohy komponent reálné prostorové křivky dané jako průsečnice dvou algebraických nadploch zkoumal O. A. Olejnik v práci [12].

Označme Γ algebıaickou plochu v RP_3 určenou rovnicí

$$x_0^p F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right) = 0\,,$$

kde $F(x, y, z)$ je mnohočlen stupně p s reálnými koeficienty a γ označme plochu určenou rovnicí $x_0^q f(x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0) = 0$, kde $f(x, y, z)$ je mnohočlen stupně q s reálnými koeficienty. Předpokládejme, že Γ ani γ nemají reálné singulární body a také, že křivka C, určená jako průsečnice Γ a γ, nemá reálné singulární body, tj. že hodnost matice

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{\partial F}{\partial y}, & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x}, & \dfrac{\partial f}{\partial y}, & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{matrix}\right\|$$

je dvě ve všech bodech křivky C. Označme M uzávěr v RP_3 množiny všech vlastních bodů plochy Γ, pro něž platí

$$x_0^p f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right) \geqq 0 \quad \text{při} \quad x_0 = 1 .$$

V práci [12] je dokázáno, že pro q sudé platí:

$$E(M) \leqq \frac{1}{3} p^3 + \frac{3}{8} pq^2 + \frac{1}{4} p^2 q - p^2 - pq + \frac{7}{6} p + \frac{|E(\Gamma)|}{2} . \tag{5}$$

Pro $E(\Gamma)$ platí odhad

$$E(\Gamma) \leqq (p-1)^3 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3} + 1 . \tag{6}$$

Jestliže q je liché číslo a γ, Γ a nadrovina $x_0 = 0$ se protínají v konečném počtu σ bodů, pak

$$E(M) \leqq \frac{1}{3} p^3 + \frac{3}{8} pq^2 + \frac{1}{4} p^2 q - \frac{3}{4} p^2 - \frac{3}{4} pq + \frac{13}{24} p + \frac{|E(\Gamma) - \sigma|}{2} . \tag{7}$$

Z toho plyne, že pro $p = 1$ a libovolné q, tj. v případě rovinných algebraických křivek vztahy (5), (7) jsou shodné s odhady, které získal I. G. Petrovskij v pracích [4], [5]. Tyto odhady jsou

$$E(M) \leqq \frac{3q^2 - 6q}{8} + 1 \quad \text{pro} \quad q \text{ sudé}, \tag{8}$$

$$E(M) \leqq \frac{3q^2 - 3}{8} \quad \text{pro} \quad q \text{ liché} . \tag{9}$$

Již dříve bylo uvedeno, že tyto odhady nelze zlepšit. Pro případ $p = 2$ vztahy (8) a (9) mají tvar

$$|E(M)| \leqq \frac{3}{4} q^2 - q + 1 + \frac{|E(\Gamma)|}{2} \quad \text{pro} \quad q \text{ sudé} , \tag{10}$$

$$|E(M)| \leqq \frac{3}{4} q^2 - \frac{1}{2} q + \frac{3}{4} + \frac{|E(\Gamma) - \sigma|}{2} \quad \text{pro} \quad q \text{ liché} . \tag{11}$$

V tomto případě je $E(\Gamma)$ buď 0, nebo 2. V práci [5] je dokázáno, že odhady (10) a (11) jsou také přesné. V případě, že Γ je jednodílný hyperboloid, jsou zde sestrojeny křivky, pro které platí v (8), (9) rovnost. V případě, že Γ je algebraická plocha libovolného řádu p, jsou zde sestrojeny algebraické křivky, pro které platí

$$E(M) = \frac{3}{8} pq^2 + C(p),$$

kde $C(p)$ závisí pouze na p. Z předchozích odhadů lze získat mnoho geometrických důsledků pro prostorové algebraické křivky podobně jako pro rovinné křivky.

I. G. Petrovskij v práci [5] zkoumal algebraické nadplochy řádu m v RP_n. Jak bylo uvedeno na začátku tohoto článku, je tato nadplocha určena rovnicí

$$F(x_0, \ldots, x_n) = 0,$$

kde F je homogenní polynom řádu m v neurčitých $x_0, \ldots, x_n$ s reálnými koeficienty a systém rovnic:

$$F(x_0, \ldots, x_n) = 0\,; \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, \ldots x_n) = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

nemá reálné řešení. Množina bodů Γ této nadplochy je uzavřená podvarieta dimenze $n - 1$. Pro její Eulerovu charakteristiku platí:

$$E(\Gamma) = 0 \quad \text{pro } n \text{ sudé},$$

$$E(\Gamma) \leqq (m - 1)^n - 2S(n, m) + 1 \quad \text{pro } n \text{ liché}.$$

$S(m, n)$ je definováno takto: Položme $l = [mn - 2n - m/2]$ ($[x]$ je celá část čísla x), $S(m, n)$ je rovno počtu členů polynomu

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{m+1} - 1}{x_i - 1},$$

jejichž stupeň není větší než l.

Označíme-li M_0 uzávěr v RP_n množiny vlastních bodů, pro které platí:

$$x_0^m F\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \geqq 0 \quad \text{při} \quad x_0 = 1,$$

pak pro m sudé a libovolné n platí odhad:

$$E(M_0) \leqq \frac{(m - 1)}{2} - S(n, m) + \frac{1}{2},$$

pro m liché a n liché platí

$$E(M_0) \leqq \frac{(m - 1)^n}{2} - S(n, m) + 1$$

a pro m liché a n sudé platí:

$$E(M_0) \leqq \frac{(m-1)^n}{2} - S(n, m) + \frac{(m-1)^{n-1}}{2} - S(n-1, m) + 1 .$$

Zaveďme dále tato označení: $b(K)$ součet všech Bettiho čísel polyedru K, $b_1(K)$ součet všech Bettiho čísel se sudými indexy, $b_2(K)$ součet všech Bettiho čísel s lichými indexy. O. A. Olejnik obdržel v článku [13] odhady pro $b(\Gamma)$, $b_1(\Gamma)$, $b_2(\Gamma)$ a $b(M_0)$, $b_1(M_0)$ a $b_2(M_0)$. Jako speciální důsledek obdržel odhad počtu p^0 komponent algebraické plochy řádu m v RP_3, a to

$$p^0 \leqq \frac{(m-1)^3}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{12} + 2 \quad \text{pro } m \text{ sudé} ,$$

$$p^0 \leqq \frac{(m-1)^3}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{12} + \frac{m(m-1)}{4} + 2 \quad \text{pro } m \text{ liché} .$$

Tyto výsledky byly získány zkoumáním změny topologické struktury algebraické plochy při změně koeficientů definující rovnice a aplikací Morseovy teorie.

J. Milnor ([6]) zkoumal podmnožiny eukleidovského prostoru R^n definované systémem rovnic

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n) = 0 .$$

Označme V takto určenou množinu. Jestliže $f_1, \ldots, f_p$ jsou polynomy takové, že stupeň $f_i \leqq m$, pak pro součet všech Bettiho čísel množiny V platí:

$$b(V) \leqq m(2m-1)^{n-1} .$$

Je-li W kompaktní nadplocha v R^n určená rovnicí $f = 0$, kde f je polynom sudého řádu m a W nemá singulární body, pak platí:

$$b(W) \leqq m(m-1)^{n-1} .$$

Ve stejné práci je ještě tento odhad: Označme M množinu v R^n určenou nerovnostmi

$f_1 \geqq 0, \ldots, f_p \geqq 0$, kde f_i je polynom stupně d_i a nechť $d = \sum_{i=1}^{p} d_i$. Pak platí:

$$b(M) \leqq \tfrac{1}{2}(d+2)(d+1)^{n-1}$$

Jako důsledek těchto vět získává J. Milnor odpovídající odhady v reálném projektivním prostoru. Podobně v práci R. Thoma [7] je dokázán s použitím Morseovy teorie pro množinu A nulových bodů polynomu f stupně m v R^n odhad

$$b(A) \leqq m^n .$$

Je-li f nezáporný polynom (tj. polynom nenabývající záporných hodnot) stupně m, pak platí

$$b(A) \leqq (m-1)^n .$$

Pro algebraickou nadplochu A řádu m v RP_n dostáváme odhad

$$b(A) \leqq \frac{m(m^n - 1)}{m - 1}.$$

Pro algebraické plochy čtvrtého řádu v RP_3 máme více lepších výsledků. Již K. Roon ([8]) dokázal, že tato plocha nemůže mít více než dvanáct komponent. V této práci byly sestrojeny plochy čtvrtého řádu v RP_3 sestávající z deseti oválů. Z výsledků Petrovského a Olejnikových ([5]) však plyne, že jestliže plocha sestává pouze z oválů, nemůže jich být více než deset. V poslední době se těmito plochami zabýval UTKIN v pracích [14], [25], kde dokázal, že plocha čtvrtého řádu nemůže mít více než jedenáct komponent, provedl pro tyto plochy klasifikaci podle homotopických tříd komponent a sestrojil plochy různých typů. Definitivně rozřešil problém počtu komponent algebraické plochy čtvrtého řádu Charlamov v práci [22]. Dokázal, že maximální počet komponent plochy šestého řádu je deset.

Problémy odhadů topologických invariantů algebraických variet (Eulerovy charakteristiky, Bettiho čísel, signatury aj.) se zabývají v poslední době v Leningradě (V. A. Rochlin a jeho žáci) a v Gorkém (D. A. Gudkov). Jde o tuto problematiku:

Mějme zadány homogenní reálné polynomy $P_1, \ldots, P_s$ řádů $m_1, \ldots, m_s$ v $q + 1$ proměnných. Nechť A je podmnožina RPq určená rovnicemi

$$(12) \qquad P_1(x_0, \ldots, x_q) = 0, \ldots, P_s(x_0, \ldots, x_q) = 0$$

a B určena rovnicemi

$$(13) \qquad P_1(x_0, \ldots, x_q) = 0, \ldots, P_{s-1}(x_0, \ldots, x_q) = 0\,.$$

Dále předpokládejme, že A je neprázdná a systém rovnic (12) nemá singularity na A, pro $n = q - s$ liché předpokládejme ještě, že systém (13) nemá singularity na B.

Základním objektem zkoumání bude množina A pro $n = q - s$ sudé, dvojice (B, A) pro $n = q - s$ liché. Je-li n liché a m_s sudé, nerovnostmi $P_s \geqq 0$, resp. $P_s \leqq 0$ jsou v B definovány podvariety B_+, resp. B_- se společným krajem A. Označme $H_*(X, Y, Z_2)$ relativní homologickou grupu dvojice (X, Y) s koeficienty v Z_2. Dále označme a dimenzi průniku jádra homomorfismu

$$\cap\omega : H_*(B_-, A, Z_2) \to H_*(B_-, A, Z_2)$$

definovaného předpisem

$$\cap\omega(\xi) = \xi\cap\omega \quad (\text{cap} - \text{produkt})\,,$$

kde $\omega = m_s/2\; W_1(B_-)$ ($W_1(B_-)$ je Stiefel-Whitneyova třída B_-) s jádrem hraničního homomorfismu

$$\partial\colon H_*(B_-, A, Z_2) \to H_*(B_-, A, Z_2)\,.$$

Přejdeme-li ke komplexifikaci daných objektů, systém rovnic (12), resp. (13) určuje množiny CA, resp. CB v komplexním projektivním prostoru CP_q. Na rozdíl od A, resp. B jsou CA, resp. CB určeny čísly $q, m_1, \ldots, m_s$ jednoznačně až na difeomorfismus. Speciálně jsou těmito čísly určeny homologické grupy množiny CA.

Definujeme-li polynomy $\chi_s^q(m_1, \ldots, m_s)$ pro $0 \leqq s \leqq q$ formulemi

$$\chi_s^q(m_1, \ldots, m_s) = \begin{cases} q + 1 & \text{pro } s = 0 \\ m_1 m_2, \ldots, m_q & \text{pro} \quad 0 < s = q \end{cases},$$

$$\chi_s^q(m_1, \ldots, m_s) = m_s \chi_{s-1}^{q-1}(m_1, \ldots, m_{s-1}) - (m_{s-1})\, \chi_s^{q-1}(m_1, \ldots, m_s),$$

pak Eulerova charakteristika CA je rovna $\chi_s^q(m_1, \ldots, m_s)$. Pro n sudé ještě potřebujeme další invariant, tzv. signaturu $\sigma(CA)$ (definici viz [26]). Je ji však možno vyjádřit tímto způsobem:

Definujme polynomy $\sigma_s^q(m_1, \ldots, m_s)$ pro $0 \leqq s \leqq q$, $q - s$ sudé takto:

$$\sigma_s^q(m_1, \ldots, m_s) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad s = 0 \\ m_1 m_2, \ldots, m_q & 0 < s = q \end{cases},$$

$$\sigma_s^q(m_1, \ldots, m_s) = m_s \sigma_{s-1}^{q-1}(m_1, \ldots, m_{s-1}) - \sum_{\eta=1}^{m_s} \sigma_{s+1}^{q-1}(m_1, \ldots, m_{s-1}, \eta - 1, \eta)$$

$$\text{pro} \quad 0 < s < q\,.$$

Pak je

$$\sigma(CA) = \sigma_s^q(m_1, \ldots, m_s)\,.$$

Zavedeme-li nový prostor Y jako dvojnásobné nakrytí CB podél CA, označíme $C_k(m)$ koeficient při t^{2k} v rozkladu v řadu funkce

$$\frac{(1 + t)^m + (1 - t)^m}{(1 + t)^m - (1 - t)^m}$$

a položme

$$\tau_s^q(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n+1)} C_k \left(\frac{m_s}{2}\right) \sigma_s^{q-2k+1}(m_1, \ldots, m_s)\,.$$

Pak platí

$$\sigma(Y) = \tau_s^q(m_1, \ldots, m_s)\,.$$

Totální Bettiho číslo $b(Y)$ je určeno jednoznačně čísly $q, m_1, \ldots, m_1$ a označíme ho $b_s^q(m_1, \ldots, m_s)$.
Platí nerovnost:

$$2a + b(A) \leqq b_s^q(m_1, \ldots, m_s)\,.$$

V. A. Rochlin v [21] dokázal, že platí nerovnosti:

(14) $$b(A) \leqq \begin{cases} \chi_s^q(m_1, \ldots, m_s) & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ 2(n + 1) - \chi_s^q(m_1, \ldots, m_s) & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$$

Dále pro n sudé za předpokladu

(15) $$b(A) = \chi_s^q(m_1, \ldots, m_s)$$

je

(15) $$E(B_-) \equiv \sigma_s^q(m_1, \ldots, m_s) \pmod{16}\,.$$

Pro n liché a m_s sudé za předpokladu

$$2a + b(A) = b_s^q(m_1, \ldots, m_s) \tag{16}$$

je

$$2E(B_-) = \tau_s^q(m_1, \ldots, m_s) \pmod{16}.$$

Speciálně pro rovinné křivky ($q = 2$, $s = 1$) je jedna z variet B_+, B_- orientovatelná a druhá neorientovatelná. Předpokládejme, že B_- je neorientovatelná, pak $a = 1$ a

$$b(B_+) = \tfrac{1}{2}b(A),$$

$$b(B_-) = \tfrac{1}{2}b(A) + 1.$$

V tomto případě je $\frac{1}{2}b(A)$ počet komponent křivky A, a protože platí

$$b_1^2(m_1) = m_1^2 - 3m_1 + 6,$$

jsou nerovnosti (14) ekvivalentní Harnackovým nerovnostem.
Rovnost v (15) znamená, že A je M-křivka.
Dále platí

$$E(B_-) = N - P + 1,$$

a protože

$$\tau_1^2(m_1) = 2 - \frac{m_1^2}{2},$$

je možno kongruenci (15'), psát ve tvaru

$$P - N \equiv \left(\frac{m_1}{2}\right)^2 \mod 8,$$

což je Gudkovova hypotéza. Podobně jako speciální případy zde dostáváme již známé odhady pro prostorové křivky a pro nadroviny v RP_3.

V. M. Charlamov v práci [23] a D. A. Gudkov společně s A. D. Krachnovem v práci [24]se zabývají dalším typem podvariet splňujících systém rovnic (12), (13) a dostávaji výsledky analogické předchozím. Např. V. M. Charlamov dostává pro n sudé za předpokladu

$$b(A) = \chi_s^q(m_1, \ldots, m_s) - 2$$

kongruenci

$$E(A) \equiv \sigma_s^q(m_1, \ldots, m_s) \pm 2 \pmod{16}$$

a pro n liché a m_s sudé za předpokladu

$$2a + b(A) = b_s^q(m_1, \ldots, m_s) - 2$$

kongruenci

$$2E(A) \equiv \tau_s^q(m_1, \ldots, m_s) \pm 2 \mod 16.$$

Pro případ rovinných křivek pro m_1 sudé a

$$P + N = \frac{(m_1 - 1)(m_1 - 2)}{2}$$

dostaneme

$$P - N \equiv \left(\frac{m_1}{2}\right)^2 \pm 1 \mod 8$$

Všechny tyto práce tedy představují přímé zobecnění klasických výsledků.

Literatura

[1] A. HARNACK: *Über die Vielheitkeit der ebenen algebraischen Kurven,* Math. Ann *10* (1876) 189—198.

[2] D. HILBERT: *Über die reellen Zuge algebraischen Kurven,* Math. Ann *38* (1891) 115—138.

[3] D. HILBERT: *Über die gestalt einer Fläche vierter Ordnung,* Nachr. Ges. Wiss. Götingen 1909 308—313

[4] I. G. PETROVSKIJ: *On the topology of real plane algebraic curves,* Ann. Math. *39* (1938) 189—196

[5] I. G. PETROVSKIJ, O. A. OLEJNIK: *O topologii dějstvitělnych algebraičeskich pověrchnostěj*: DAN SSSR ser, mat. *13* (1949) 389—402

[6] J. MILNOR: *On the Betti numbers of real varieties,* Proc. AMS *15* No 2 (1964) 275—280.

[7] R. THOM: *Sur l'homologie des variétés algebriques réeles.* Differential and combinatorial topology, A Symposium in honour of Marston Morse, Princeton Univ. press 1965 255—265.

[8] K. ROHN: *Die Maximalzahl von Ovalen bei einer Fläche 4 Ordnung* Berichte über die Verhandlungen, Leipzig *63* (1911) 423—440.

[9] K. ROHN: *Die Maximalzahl und Anordnung der Ovalen bei der ebenen Kurve 6 Ordnung und bei der Fläche 4 Ordnung,* Math. Ann. *73* (1913) 177—229.

[10] D. A. GUDKOV: *Polnaja topologičeskaja klasifikacija neosobych dějstvitělnych krivych šestogo porjadka v dějstvitělnoj projektivnoj ploskosti.* DAN SSSR *98* No 4 (1954) 521—4.

[11] COOLIDGE I. *A treatise on algebraic plane curves,* Oxford 1961.

[12] O. A. OLEJNIK: *O topologii dějstvitělnych algebraičeskich krivych na algebraičeskoj pověrchnosti,* Mat. sbornik *1* (1951) 133—156.

[13] O. A. OLEJNIK: *Ocenki čisel Betti dějstvitělnych algebraičeskich giperpověrchnostěj,* Mat. sbornik *28(70)* 3 (1951) 635—640.

[14] G. A. UTKIN: *O topologičeskoj klasifikacii neosobych dějstvitělnych pověrchnostěj četvěrtogo porjadka,* DAN SSSR *175* 1 (1967) 40—43.

[15] I. WALKER: *Algebraic Curves,* Princeton 1950.

[16] D. A. GUDKOV: *Topologija krivych šestogo porjadka i pověrchnostěj četvěrtogo porjadka,* Učennyje zapiski Gorkovskogo universitěta *87* (1969) 3—153.

[17] V. I. ARNOLD: *O rozpoloženii ovalov věščestvěnnych ploskich algebraičeskich krivych, involucijach četyrechměrnych gladkich mnogoobrazij i arifmetike celočiselnych kvadratičnych form,* Funkcionalnyj analiz t. *5*, vyp. 3 1971 1—9.

[18] D. A. GUDKOV: *Postrojenije novoj seriji M-krivych,* DAN SSSR *200* No 6 (1971) 1269—1272.

[19] V. A. ROCHLIN: *Dokazatělstvo gipotězy Gudkova,* Funkcionalnyj analiz *6*, vyp 2 (1972) 62—64.

[20] V. A. ROCHLIN: *Sravnenije po modulju šestnadcat v 16-toj probleme Gilberta,* Funkcionalnyj analiz *6*, vyp 4 (1972) 58—64.

[21] V. M. CHARLAMOV: *Maksimalnoje čislo komponent pověrchnosti 4-toj stěpeni v RP_3,* Funkcionalnyj analiz *6*, vyp 4 (1972) 101.

[22] V. M. CHARLAMOV: *Novyje sravnenija dlja Eulerovoj charakteristiki věščestvěnnych algebraičeskich mnogoobrazij,* Funkcionalnyj analiz *7*, vyp. 2 (1973) 74—78.

[23] D. A. GUDKOV, A. D. KRACHNOV: *Eulerova Charakteristika věščestvěnnych algebraičeskich mnogoobrazij,* Funkcionalnyj analiz *7*, vyp. 2 (1973) 96—100.

[24] A. UTKIN: *Učennyje zapiski Gorkovskogo universitěta 87* (1969)

[25] F. HIRZEBRUCH: *Topological methods in algebraic geometry,* Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg 1966.

[26] *Problemy Gilberta,* sbornik, Moskva 1969.