František Kuřina

I elementární matematika může být krásná

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 48 (2003), No. 2, 115--128

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141169

I elementární matematika může být krásná

František Kuřina, Hradec Králové

Známý anglický matematik G. H. HARDY (1877–1947) napsal v knize *Obrana matematikova*, která nedávno vyšla i česky, tato slova:

Matematik, podobně jako malíř nebo básník, je tvůrcem vzorců... Matematikovy vzorce, stejně jako vzorce malíře nebo básníka, musí být krásné; ideje, jako barvy nebo slova, do sebe musí harmonicky zapadat. Krása je prvním předpokladem: ošklivá matematika nemá na světě trvalého místa... Krása matematické věty závisí z velké části na její závažnosti, tak jako i v poezii krása verše závisí do určité míry na významu myšlenek, které obsahuje ([8], str. 83).

Významný současný francouzský matematik a čestný doktor Karlovy univerzity G. CHOQUET (1915) se vyznává:

Moje práce je založena na intuici. Jsem básník. Práce mého mozku, když něco vymýšlím či dělám matematiku, je podobná práci malíře či básníka. To jest vidím věci, jejich geometrickou podstatu ([12], str. 134). *Chování vědce, ať již v matematice či v experimentálních vědách, připomíná chování průzkumníka v lese, který hledá pramen nebo vzácný druh hmyzu. Kráčí stezičkou s napnutými smysly připravenými vnímat podněty. Bez umdlení využívá postranní pěšinky. A někdy se stane zázrak. Vydal se za motýlem a objevuje potůček, v němž se povalují valouny zlata* ([12], str. 90).

Jsem si vědom toho, že krásu matematiky není nutné žádnému tvůrčímu matematikovi připomínat; snad každý ji pociťuje a mohl by o ní podat i osobní svědectví. Mně však jde o jinou věc. Zdá se mi, že estetické hodnoty matematiky si při svém studiu neuvědomují dostatečně budoucí učitelé. Je to patrně handicap našeho univerzitního vzdělávání. Přitom ovšem, jak zdůraznil např. náš předčasně zesnulý matematik ZDENĚK FROLÍK:

Krása matematiky spočívá v její harmonii. A nalézání harmonie je... tím nejhlubším zdrojem uspokojení. Je to krása vnímatelná a samotné vnímání této krásy může dát člověku náplň života. Přitom tuto krásu může člověk pouze vnímat — a vůbec ji nemusí vytvářet. Téměř žádný matematikář na gymnáziu vědecky nepracuje, ale každý by měl mít pro krásy matematiky vytříbenou vnímavost. Bez vnímavosti kantorů si těžko mohu představit úspěch reformy studia matematiky, i kdyby byla sebevíc připravená...

Prof. RNDr. FRANTIŠEK KUŘINA, CSc. (1932), Univerzita Hradec Králové, Víta Nejedlého 573, 500 03 Hradec Králové.

Vypracování tohoto příspěvku bylo podpořeno grantem GA ČR 406/02/0829.

Naši současní autoři Jiří Matoušek a Jaroslav Nešetřil zdůrazňují v úvodu své knihy o diskrétní matematice:

… občasná radost z elegantní myšlenky, někdy dokonce smíšená s pocitem dobře vykonané práce, je pro studium matematiky nesmírně důležitá ([13], str. 12).

Na téma prožívání radosti z matematiky a poznání jejích krás jsem v poslední době přednesl dvě přednášky (v Bohdanči a v Prachaticích). Jejich kladný ohlas mne podnítil k napsání tohoto článku. Jeho charakter je zcela elementární a matematik v něm nic nového nenajde; obracím se zde na čtenáře-učitele matematiky, kterému snad může poskytnout několik inspirací využitelných příležitostně i ve škole. Článek [16] s podobným zaměřením jako tento příspěvek od maďarské matematičky R. Péterové (1905–1977) byl přeložen do češtiny a vyšel v Pokrocích *36* (1991), 65–72.

1. Množinový ráj

V nadpisu tohoto odstavce jsem si dovolil použít metaforické označení z často citovaného výroku Davida Hilberta (1862–1943):

Nikdo nás nemůže vyhnat z množinového ráje, který pro nás stvořil George Cantor (1845–1918).

Jedním ze základních pojmů Cantorovy teorie množin je, jak známo, pojem *ekvivalence množin*: Množiny A, B jsou ekvivalentní, existuje-li prosté zobrazení jedné z nich na druhou. V tomto smyslu říkáme, že množiny A, B mají stejnou mohutnost. Každou množinu ekvivalentní s množinou všech přirozených čísel nazýváme množinou spočetnou. Jedním z pozoruhodných Cantorových výsledků byl poznatek, že nekonečná množina může být ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou.

Např. množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel je ekvivalentní s množinou $\mathbb{P}$ všech prvočísel. To snadno nahlédneme, budeme-li pod zápisy přirozených čísel psát postupně prvočísla:

$$\begin{array}{llllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots \\ 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & \dots \end{array}$$

K ověření možnosti této konstrukce je ovšem nutné ukázat, že druhý řádek neustále rostoucích prvočísel „nikde nekončí“, tj. že prvočísel je nekonečně mnoho. Tento krásný výsledek dokázal ovšem již Eukleides (360–290 př. n. l.) ve svých *Základech.* V duchu českého překladu jeho díla ([5], str. 149) můžeme postupovat takto:

Jsou-li $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvočísla, pak číslo $p = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ je buď prvočíslem, nebo je dělitelné prvočíslem různým od prvočísel $p_1, \dots, p_n$ (neboť při dělení čísla p libovolným z čísel p_i ($i = 1, \dots, n$) dostáváme zbytek 1). Ke každé konečné množině prvočísel existuje tedy prvočíslo, které v ní není obsaženo, a prvočísel tedy nemůže být konečně mnoho.

Z podnětu světoznámého matematika maďarského původu Paula Erdőse (1913 až 1996) sestavili berlínští matematici Martin Aigner a Günter M. Ziegler knihu „perfektních“ matematických důkazů *Proofs from the Book* ([1]). Věta o tom, že prvočísel je nekonečně mnoho, je v ní dokázána šesti zcela odlišnými způsoby.

Množina prvočísel je ovšem jedna z nejpozoruhodnějších číselných množin. Ačkoliv lze bezprostředně nahlédnout na úrovni základní školy, že každé prvočíslo větší než 5 lze psát ve tvaru $6k+1$ nebo $6k+5$, kde k je číslo přirozené, není znám vzorec pro určení libovolného prvočísla v posloupnosti prvočísel. Číslo 2 je jediné sudé prvočíslo, existují však prvočísla, jejichž rozdíl je roven dvěma (3, 5; 5, 7; 11, 13; … nebo např. čísla 299 477; 299 479 (podle knihy [4], str. 322)). To jsou tzv. prvočíselná dvojčata. Přitom však není dosud známo, zda prvočíselných dvojčat existuje nekonečně mnoho. Z druhé strany lze sestrojit „mezeru“ mezi prvočísly libovolně velkou, např. můžeme nalézt 1000 za sebou jdoucích přirozených čísel, která jsou všechna složená. K tomu stačí uvážit posloupnost čísel

$$2+1001!,\quad 3+1001!,\quad 4+1001!,\quad \ldots,\quad 1001+1001!,$$

z nichž každé je jistě o jednu větší než předcházející a tato čísla jsou po řadě dělitelná čísly 2, 3, …, 1001. Vzhledem k tomu, že číslo bezprostředně následující v přirozené posloupnosti čísel za číslem $1001+1001!$ je sudé, nemůže být toto číslo prvočíslem a mezera v posloupnosti prvočísel je proto větší než 1000.

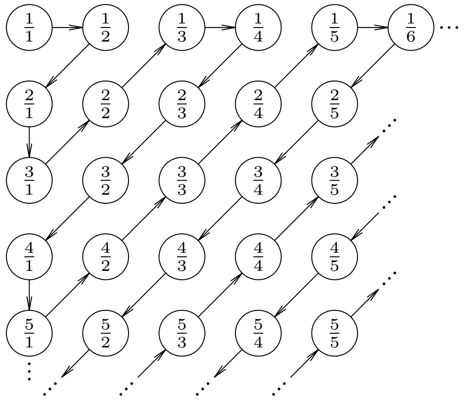
Mezeru mezi prvočísly lze tedy sestrojit libovolně velkou, avšak až „dosti daleko“ v posloupnosti prvočísel. Platí totiž pozoruhodný *Bertrandův postulát*:

Ke každému přirozenému n existuje prvočíslo p, pro něž platí $n < p \leqq 2n$.

Joseph Bertrand (1822–1900) formuloval toto tvrzení jako hypotézu a ověřil je pro $n < 3\,000\,000$. Poprvé je dokázal Pafnutij Čebyšev (1821–1894), mnohem jednodušší důkaz pak podal indický génius Ramanujan (1887–1920), a roku 1932 dokázal tuto větu devatenáctiletý P. Erdős. Jeho důkaz je zařazen do „Knihy“ ([1], str. 7).

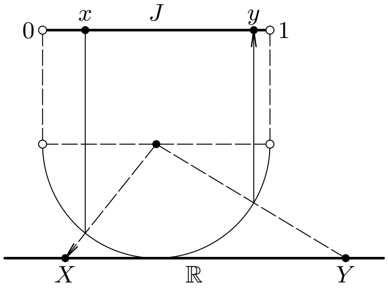
O pozoruhodných vlastnostech prvočísel existuje přirozeně bohatá matematická literatura. Problémy, které teorie čísel řeší, jsou někdy snadno formulovatelné, ale mnohé z nich dosud řešení vzdorují.

Vraťme se zpět k číselným množinám. Jeden z krásných Cantorových výsledků byl důkaz spočetnosti množiny $\mathbb{Q}$ všech čísel racionálních a nespočetnosti množiny $\mathbb{R}$ všech čísel reálných. Uspořádáme-li množinu všech kladných racionálních čísel do tabulky na obr. 1 (v prvním řádku jsou racionální čísla, která lze psát ve tvaru zlomku s čitatelem 1 a postupně rostoucími jmenovateli, v druhém řádku podobně zlomky s čitatelem 2, ve třetím s čitatelem 3, …), můžeme všechny tyto zlomky seřadit podle naznačené čáry do posloupnosti, což ovšem znamená, že je jich spočetně mnoho (přitom každé racionální číslo reprezentujeme jen jedním zlomkem).



Obr. 1.

K nespočetnosti množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel sestrojme nejdříve prosté zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na otevřený interval $J = (0, 1)$ podle obr. 2.



Obr. 2.

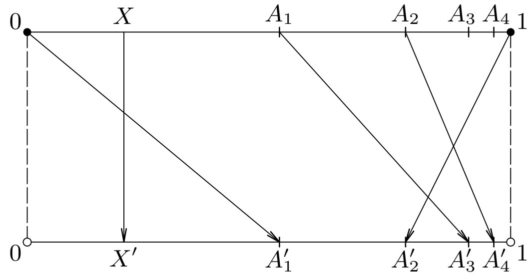
Každé číslo z intervalu J můžeme zapsat ve tvaru neukončeného desetinného rozvoje. Vyloučíme-li z těchto zápisů např. ty, které končí samými devítkami, má každé reálné číslo uvažovaného intervalu jednoznačně určený desetinný rozvoj. Kdyby reálných čísel intervalu J bylo spočetně mnoho, bylo by je možné zapsat do tvaru tabulky se spočetně řádky takovéhoto typu:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}\underline{1}238432\ldots\\
a_2 &= 0{,}8\underline{7}43212\ldots\\
a_3 &= 0{,}18\underline{4}5614\ldots\\
a_4 &= 0{,}956\underline{8}012\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Tato tabulka nemůže vyčerpat všechna reálná čísla intervalu J, neboť snadno sestrojíme např. číslo

$$c = 0{,}2111\ldots,$$

které v žádném z těchto řádků není napsáno. Je konstruováno např. tak, že číslici 1 v zápisu čísla a_1 nahradíme číslicí 2, číslice 7, 4, 8, … v zápisech čísel a_2, a_3, a_4, … nahradíme číslicí 1 atd. Této metodě se, jak známo, říká *Cantorova diagonální metoda.*



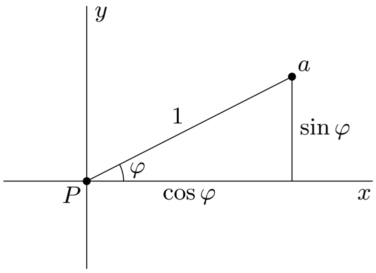
Obr. 3.

Přidáme-li k intervalu J jeho krajní body, jistě se mohutnost množiny J nezmění. Mělo by tedy existovat prosté zobrazení uzavřeného intervalu $\langle 0,1\rangle$ na otevřený interval $(0,1)$. Jeho konstrukci můžeme připomenout obrázkem 3 (inspirovaným knihou [10]). Sestrojme v intervalu $\langle 0,1\rangle$ posloupnost bodů $A_1, A_2, , A_3, \ldots$, která konverguje k bodu 1, a označme $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots$ pravoúhlé průměty těchto bodů do otevřeného intervalu $(0,1)$. Zobrazení f konstruované předpisem

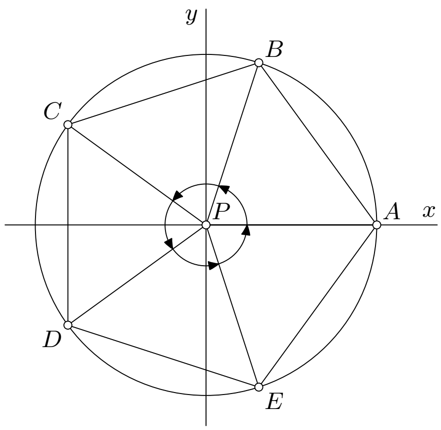
$$f(0) = A'_1, \quad f(1) = A'_2, \quad f(A_n) = A'_{n+2}, \quad n = 1,2,3,4,\ldots, \quad f(X) = X',$$

kde X' je pravoúhlý průmět libovolného bodu X (různého od bodů posloupnosti $\{A_n\}$) intervalu $\langle 0,1\rangle$ do intervalu $(0,1)$, je prostým zobrazením uzavřeného intervalu $\langle 0,1\rangle$ na otevřený interval $(0,1)$.

Lze ukázat, že interval $(0,1)$ je množinově ekvivalentní nejen s množinou $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, ale např. i s množinou všech bodů čtverce, krychle nebo trojrozměrného prostoru. Podrobnější výklad této problematiky je možné najít např. v klasické učebnici teorie množin P. S. Alexandrova [2].



Obr. 4.



Obr. 5.

Geometrická znázornění komplexních čísel umožňují přiblížit zajímavé souvislosti. Např. podle *Moivreovy věty* platí pro komplexní jednotku $a = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ (obr. 4)

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi \tag{1}$$

a kořeny binomické rovnice

$$x^n = 1, \tag{2}$$

neboli komplexní $\sqrt[n]{1}$, se zobrazí do vrcholů pravidelného n-úhelníku. Pro $n = 5$ je tato situace nakreslena na obr. 5.

Otázku eukleidovských konstrukcí pravidelných n-úhelníků vyřešil roku 1895 devatenáctiletý génius C. F. Gauss. Podrobně a zajímavě o této problematice, která přesahuje rámec elementární matematiky, pojednává Michal Křížek v práci *Od Fermatových prvočísel ke geometrii* ([9], str. 131). Konstrukcím pravidelných n-úhelníků je věnována rovněž kniha [18] ruského autora A. G. Školnika.

Pro $n = 2$ znamená rovnost (1)

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2\mathrm{i}\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi,$$

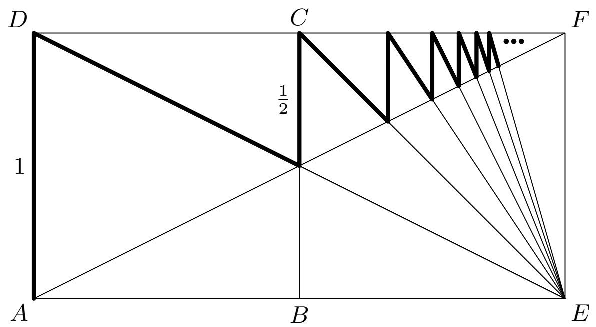
neboli

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \\ \sin 2\varphi &= 2\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}$$

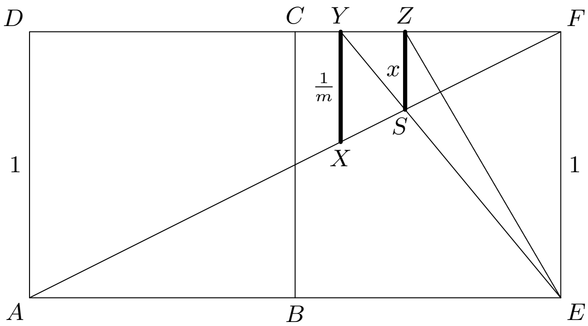
2. Umění vidět

Pro řešení úloh a pro porozumění matematice je důležité chápat souvislosti, umět spojovat myšlenky zdánlivě odlehlé, umět poznávat společné vlastnosti různých vztahů, ... Souhrnně budeme nazývat tento soubor nedefinovatelných dovedností *uměním vidět.* Pro ilustraci různých přístupů k řešení úloh zde uvedu několik příkladů ze své pedagogické praxe.

Příklad 1. *Vypočítejte délku tlustě nakreslené „nekonečné lomené čáry“ na obr.* 6*, kde* $ABCD$*,* $BEFC$ *jsou čtverce se stranou délky* 1. (Konstrukce lomené čáry je zřejmá z obr. 7.)



Obr. 6.



Obr. 7.

Pokusme se nejdříve vypočítat součet délek „svislých“ částí lomené čáry. Z podobnosti trojúhelníků XYS, FES a XYF, SZF (obr. 7) vyplývá, že $x = 1/(m+1)$, a svislé úsečky mají tedy délky

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots$$

Protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

je harmonická řada, roste délka svislých částí studované lomené čáry nade všechny meze. Tento výsledek můžeme ovšem nahlédnout i na úrovni základní školy, neboť každý z nekonečně mnoha sčítanců v závorce je větší než $\frac{1}{2}$:

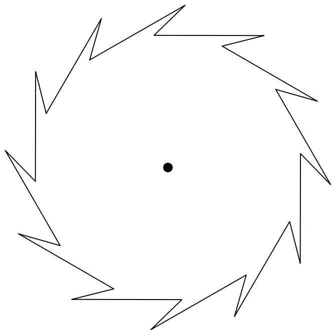
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \\ + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \cdots .$$

Ačkoliv se celá lomená čára „vejde“ do trojúhelníku AFD, má nekonečnou délku.

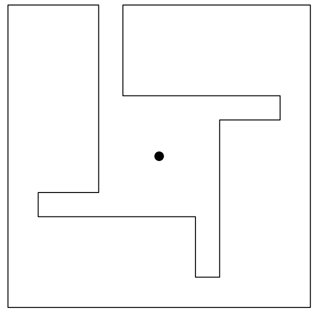
Jiný překvapivý výsledek uvádí Ronald L. Graham, který s Paulem Erdősem ukázal, že na čtverec se stranou dlouhou 1 km a 1 mm lze položit bez překrývání při „vhodném“ rozmístění $100\,000^2 + 6000$ čtverců se stranou dlouhou 1 cm. Podrobnější informace o tom lze nalézt v článku *Combinatorial Scheduling Theory* [7].

Příklad 2. *Sestrojte mnohoúhelník, který má tuto vlastnost: z některého bodu jeho vnitřku (vnějšku) není vidět žádná jeho strana celá.*

Po upřesnění, jak chápat požadavek „z bodu je (není) vidět stranu mnohoúhelníku celou“, dojdou obvykle někteří řešitelé k závěrům, že úloha nemá řešení. Tyto závěry ovšem nejsou správné. Jedno řešení první a jedno řešení druhé úlohy je nakresleno na obr. 8 a 9.

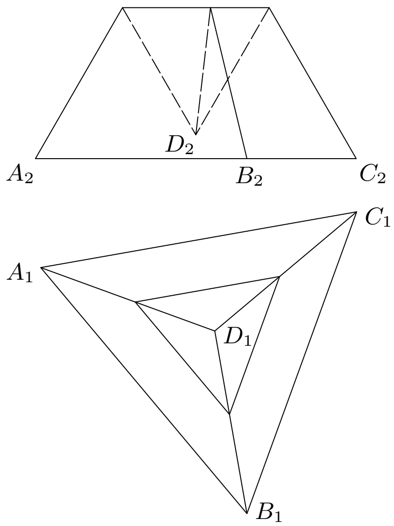


Obr. 8.



Obr. 9.

Příklad 3. *Sestrojte mnohostěn, jehož povrch lze vytvořit „překládáním“ daného rovnostranného trojúhelníku.*



Obr. 10.

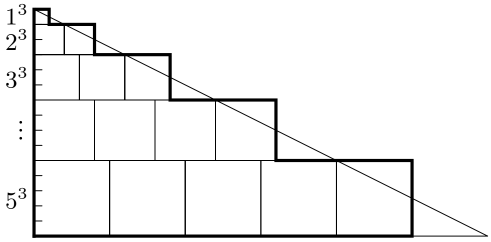
Při zadání úlohy jsem předpokládal, že jediným řešením úlohy je pravidelný čtyřstěn. Jedna studentka mne překvapila „promáčknutím“ vrcholu čtyřstěnu dovnitř: úloha má tedy nekonečně mnoho řešení (obr. 10)). Umění vidět se lze učit celý život.

Příklad 4. *Pozorováním rovností*

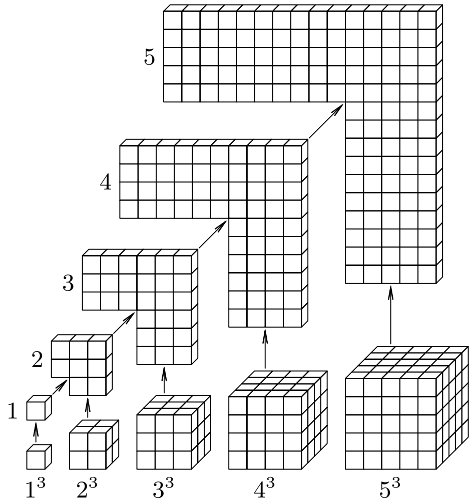
$$1^3 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$$

můžeme dospět k domněnce, že pro každé přirozené n platí

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$



Obr. 11.



Obr. 12.

Tento výsledek lze samozřejmě snadno dokázat matematickou indukcí. Můžeme ho však také ověřit obrázky 11 a 12, jejichž autory jsou George Schrage a Alan L. Fry [15]. Součty

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

pro $p = 1, 2, \ldots, 10$ studoval již Jacob Bernoulli (1654–1705) ([14]).

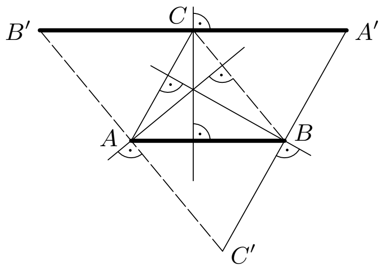
Příklad 5. V prvním ročníku naší matematické olympiády byla zadána úloha: *Základními prvky trojúhelníku jsou jeho strany a úhly. V kolika základních prvcích se mohou shodovat dva trojúhelníky, které nejsou shodné?*

Překvapivý výsledek spočívá v konstrukci trojúhelníků, které nejsou shodné, ač se shodují v pěti základních prvcích. Jsou to např. podobné trojúhelníky se stranami $a = 27,\ b = 36,\ c = 48,\ a' = 36,\ b' = 48,\ c' = 64$. Postup řešení úlohy, která patrně pochází od Georga Polyi, můžete najít v knize [19].

3. Mohou být důkazy zajímavé?

Položme si nejdříve otázku: Proč se matematici neustále zabývají důkazy tvrzení, která byla mnohokrát dokázána? Důvody jistě nejsou logické; o správnosti důkazů, které byly matematickou společností přijaty, nikdo nepochybuje. Podle mého názoru jde spíše o důvody estetické, o nalezení elegantnějšího, vtipnějšího či názornějšího důkazu.

Jedním z nejzajímavějších důkazů elementární geometrie je patrně důkaz věty o průsečíku výšek trojúhelníku. Tento důkaz není v Eukleidových Základech a důkaz, který se u nás nejčastěji vyskytuje v učebnicích, pochází podle Richarda Baltzera [3] od C. F. Gausse (1777–1855). Ani největší matematici své doby se tedy nevyhýbali řešení problémů elementární matematiky.



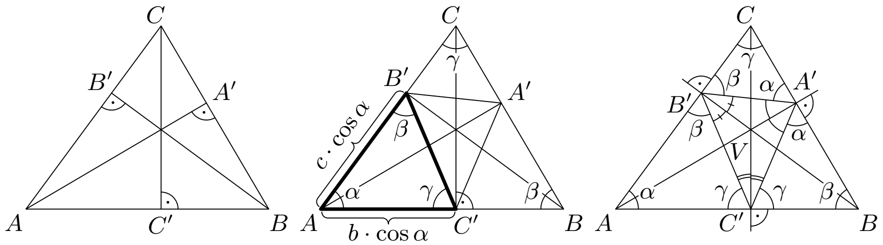
Obr. 13.

Gaussův důkaz spočívá na myšlence „přidělit výškám trojúhelníku novou roli“. Výšky trojúhelníku ABC jsou v označení podle obr. 13 osami stran trojúhelníku $A'B'C'$, jehož střední příčky jsou stranami trojúhelníku ABC. Protože osy stran libovolného trojúhelníku se protínají (ve středu kružnice jemu opsané), je tím dokázáno, že i výšky libovolného trojúhelníku procházejí jedním bodem.

Výšky libovolného ostroúhlého trojúhelníku ABC můžeme ovšem považovat za osy úhlů trojúhelníku $A'B'C'$, jehož vrcholy jsou patami výšek trojúhelníku ABC (obr. 14). Trojúhelník ABC je totiž podobný trojúhelníku $AB'C'$, neboť z pravoúhlých trojúhelníků $AC'C$ a $BB'A$ plyne $|AC'| = |AC|\cos\alpha$ a $|AB'| = |AB|\cos\alpha$. Stejně uvážíme podobnost trojúhelníků

$$\triangle BC'A' \sim \triangle BCA, \quad \triangle CB'A' \sim \triangle CBA.$$

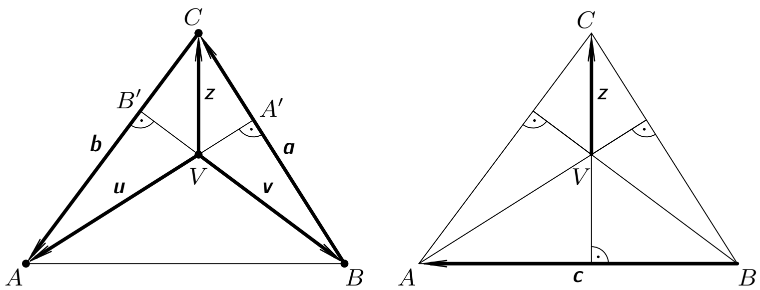
Z toho plyne shodnost stejně označených úhlů na obrázku.



Obr. 14.

Výšky trojúhelníku ABC procházejí jedním bodem, neboť jsou osami úhlů trojúhelníku $A'B'C'$.

Důkaz věty závisí pochopitelně na teorii, kterou máme k dispozici. Jsou-li známy základní vlastnosti vektorů, můžeme větu o průsečíku výšek dokázat v označení podle obr. 15 takto:



Obr. 15.

Je-li V průsečík výšek AA' a BB' trojúhelníku ABC, pak pro skalární součiny vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$ platí

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Dále platí

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}. \tag{4}$$

Násobíme-li rovnosti (3), (4) po řadě skalárně vektory $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$, dostaneme

$$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b},$$

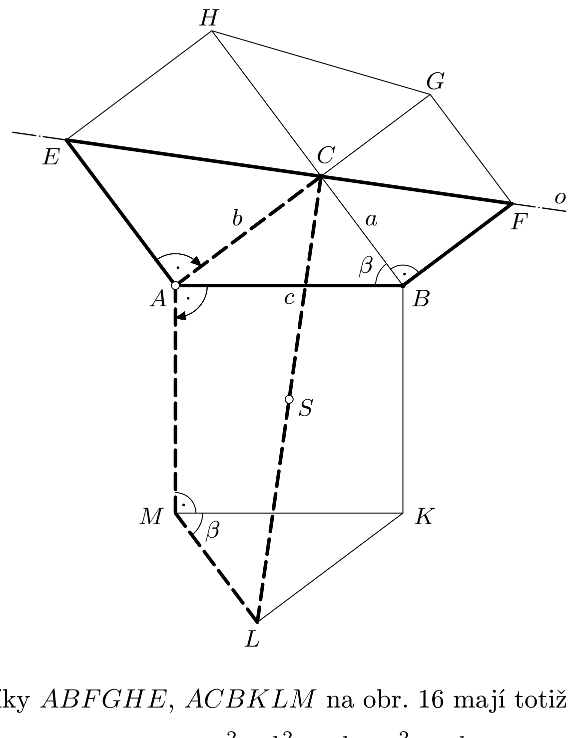
neboli

$$\boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 0.$$

Protože $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, platí $\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{c} = 0$ a přímka CV je výškou trojúhelníku ABC.

Nejfrekventovanější důkaz elementární geometrie je patrně důkaz Pythagorovy věty (viz např. knihy [11] a [6]).

Zde uvedeme tři její důkazy, které jsou opravdu pěkné. První pochází podle publikace [15] od Leonarda da Vinciho (1452–1519).



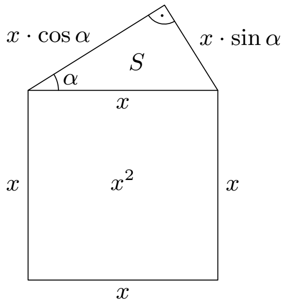
Obr. 16.

Šestiúhelníky $ABFGHE$, $ACBKLM$ na obr. 16 mají totiž sobě rovné obsahy

$$a^2 + b^2 + ab = c^2 + ab,$$

neboť čtyřúhelníky $EABF$ a $CAML$ jsou shodné (v otočení se středem A o 90° přejde první z nich do druhého) a každý z nich je polovinou příslušného šestiúhelníku.

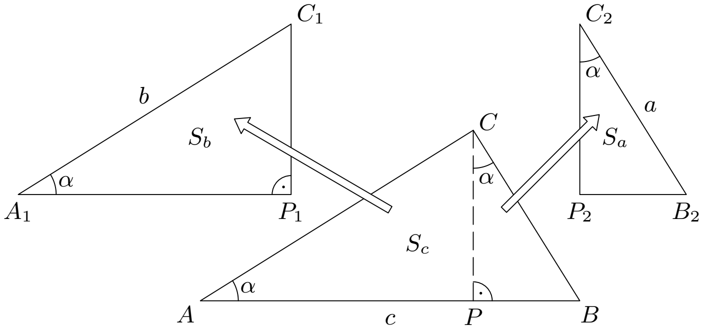
Druhý důkaz, který si připomeneme, pochází od G. Polyi ([17]).



Obr. 17.

Pro obsah S pravoúhlého trojúhelníku s přeponou o délce x platí v označení podle obr. 17

$$S = \frac{1}{2}\, x^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha = k \cdot x^2, \quad \text{kde} \quad k = \frac{1}{2}\,\sin\alpha\cos\alpha.$$



Obr. 18.

Pro obsahy trojúhelníků na obr. 18 tedy můžeme psát

$$S_c = S_a + S_b,$$

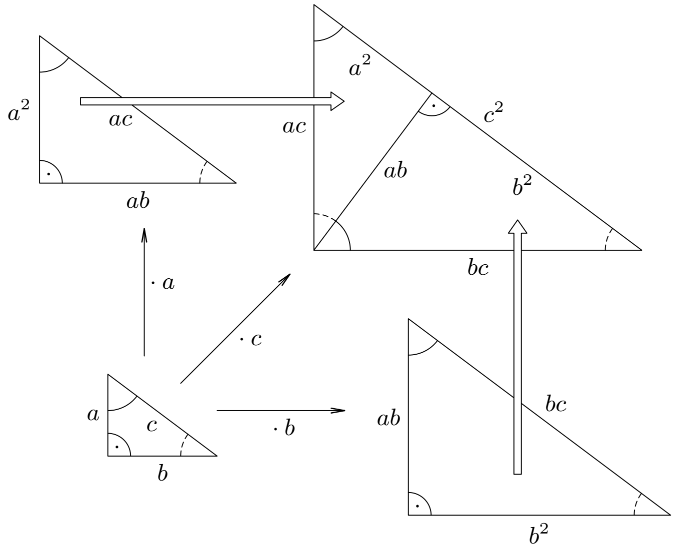
neboli

$$kc^2 = ka^2 + kb^2.$$

Tím je Pythagorova věta dokázána.

Zcela jiný přístup k důkazu Pythagorovy věty uvedl Frank Burk ([15], str. 7).

Jeho odvození je zřejmé z obr. 19. Zvětšíme-li pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek a, b a přeponou c postupně a-krát, b-krát a c-krát, můžeme z prvních dvou trojúhelníků složit trojúhelník třetí, a tedy $c^2 = a^2 + b^2$.



Obr. 19.

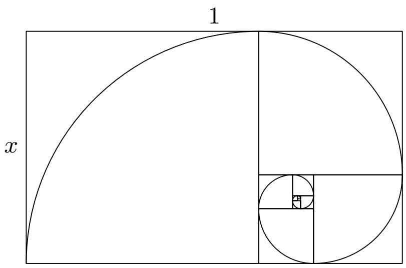
4. Závěr

Vyučování na jakémkoliv stupni školy nemůže být účinné bez upřímného zaujetí učitelů a bez zájmu žáků. V předchozích odstavcích jsem se snažil ukázat, že elementární matematika může být zajímavá i krásná. Může být hezká i vizuálně. Všimněme si např. obdélníku se stranami 1, x, kde x je větší díl úsečky délky 1 rozdělené v poměru zlatého řezu, tedy tak, že platí

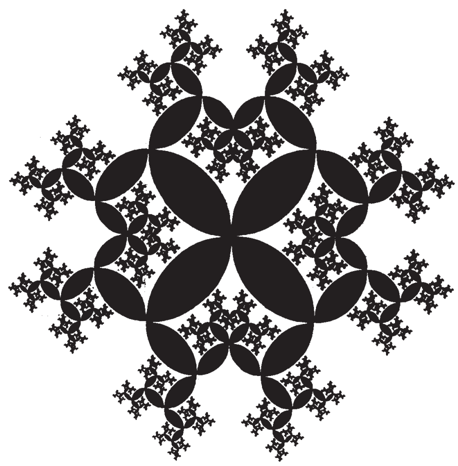
$$1 : x = x : (1 - x),$$

neboli

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$



Obr. 20.



Obr. 21.

Rozdělíme-li takový obdélník na čtverce a jim vepíšeme čtvrtkružnice podle obr. 20, dostaneme spirálu, která ve fraktálním provedení je zobrazena na obr. 21. Tento námět je převzat z knihy *Zlatý řez* od švýcarského matematika HANSE WALSERA [20].

Zakončeme slovy básníka (ALEXANDRA SERGEJEVIČE PUŠKINA):

… v činnosti, kterou člověk nenávidí, nelze dosáhnout úspěchu. Svou práci musíte milovat jako ženu, a pak i ta sebenicotnější se zdá být důležitou a nadšení pro ni přináší štěstí a úspěch. Láska dodává význam všemu, co pro ni děláte, a odmění vás nezávislostí na všem, co je mimo ni.

Jsem rád, že máme na školách učitele, kteří jsou schopni takovéhoto vyznání:

Vždy znovu a znovu se skláním před výtvorem lidského ducha, jakým je matematika — věda založená na axiomech, věda, která je schopna popsat děje ve vesmíru stejně jako v elementárních částicích. Je mým skromným krédem tuto krásnou jednotu matematiky a fyziky naznačit studentům, snažit se je co nejméně odradit nebo dokonce přimět některého, aby se těmto vědám věnoval podrobněji. (HANA JODASOVÁ)

L i t e r a t u r a

[1] AIGNER, M., ZIEGLER, G. M.: *Proofs from the Book.* Springer, Berlin 2001.
[2] ALEKSANDROV, P. S.: *Úvod do obecné theorie množin a funkcí.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1954.
[3] BALTZER, R.: *Elemente der Mathematik.* Hirzel, Leipzig 1883.
[4] BEHNKE, H., REMMERT, R., STEINER, H.-G., TIETZ, H.: *Mathematik I.* Fischer, Frankfurt am Main 1964.
[5] *Eukleidovy Základy.* Jednota českých mathematiků, Praha 1907.
[6] FRAEDRICH, A. M.: *Die Satzgruppe des Pythagoras.* Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994.
[7] GRAHAM, R. L.: *Combinatorial Scheduling Theory.* In: *Mathematics Today.* Edited by L. A. STEEN, Springer, New York 1978.
[8] HARDY, H. G.: *Obrana matematikova.* Prostor, Praha 1999.
[9] KŘÍŽEK, M.: *Od Fermatových prvočísel ke geometrii.* In: *Matematik Pierre de Fermat.* Cahiers du CEFRES No. 28, Praha 2002.
[10] KUTUZOV, B. V.: *Geometrija.* Učpedgiz, Moskva 1950.
[11] LIETZMANN, W.: *Der pythagoreische Lehrsatz.* Teubner, Leipzig 1951.
[12] LUKEŠ, J., NETUKA, I., VESELÝ, J.: *Professor Gustav Choquet.* Matfypress, Praha 2002.
[13] MATOUŠEK, J., NEŠETŘIL, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Karolinum, Praha 2000.
[14] MILLER, M.: *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme.* Teubner, Leipzig 1979.
[15] NELSEN, R. B.: *Proofs without words, I., II.* MAA, Washington 2000.
[16] PÉTER R.: *Mathematics is beautiful.* Math. Intelligencer, Vol. *12,* č. 1 (1990), 58–64.
[17] POLYA, G.: *Mathematics and plausible reasing.* Princeton University Press, Princeton 1954.
[18] ŠKOLNIK, A. G.: *Dělení kruhu.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1953.
[19] VYŠÍN, J., ZELINKA, R.: *První ročník matematické olympiády.* SPN, Praha 1953.
[20] WALSER, H.: *Der goldene Schnitt.* Teubner, Leipzig 1993.