Ondřej Moc
Počítání Leonharda Eulera s nekonečnými součiny

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 50 (2005), No. 1, 27–43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141252

Počítání Leonharda Eulera s nekonečnými součiny

Ondřej Moc, Ústí nad Labem

Úvod

Článek pojednává o některých nekonečných součinech v pracích Leonharda Eulera (1707–1783), zejména v souvislosti s funkcí gama a funkcí sinus. Eulera právem řadíme mezi největší velikány světové vědy. Jeho vědecký odkaz představuje úctyhodný výkon. Publikoval velké množství prací, podle některých pramenů[1]) je celkový počet jeho děl a prací roven číslu 886. Mnohé z těchto prací jsou dostupné v elektronické podobě v [25]. Většina Eulerových publikací přinesla významné objevy ve všech odvětvích tehdejší matematiky, přičemž některé obory sám svými výzkumy založil. Kromě množství článků napsal řadu knih, které se staly prototypem úspěšných matematických učebnic. Dále vydal řadu knih věnovaných např. optice, hydrodynamice, mechanice atd. Euler se též snažil popularizovat vědecké poznatky široké veřejnosti. Eulerovy učebnice měly takovou autoritu, že pomohly ustálit značení v mnoha matematických disciplínách. Od Eulera pocházejí symboly $f(x)$, π, i, e a další[2]). Eulerovu reputaci dobře vystihuje výrok francouzského akademika Françoise Araga (1786–1853): „Euler byl schopen počítat bez jakékoli viditelné námahy, asi jako jiní lidé dýchají nebo jako se orel vznáší ve vzduchu.“

Interpolační problém

Euler měl již od počátku své vědecké kariéry originální přístup k řešení problémů. V 21 letech vytvořil základy teorie budoucí gama funkce. Stalo se tak při řešení problému, který dlouhou dobu trápil přední matematiky. O co vlastně šlo? Rozvoj matematické analýzy v 17. a 18. století vedl k úlohám spojeným s interpolací mezi členy číselných posloupností. Vhodnou jednoduchou ilustraci poskytuje vzorec pro

[1]) Viz např. [18], str. 50.
[2]) Viz [26].

Mgr. Ondřej Moc (1973), katedra matematiky a statistiky, Fakulta sociálně-ekonomická, Univerzita J. E. Purkyně, Moskevská 54, 400 96 Ústí nad Labem, e-mail: moc@fse.ujep.cz; externí postgraduální student Matematicko-fyzikální fakulty UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.

součet prvních členů aritmetické posloupnosti

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1}$$

Vztah (1) byl znám již ve starém Řecku, a to např. v souvislosti s tzv. *figurálními čísly*[3]). Pokud chceme určit součet např. prvního sta přirozených čísel, můžeme buď postupně všechna čísla sečíst, nebo dosadit $n=100$ do vzorce na pravé straně (1). Pro libovolné n tak redukujeme výpočet na provedení pouhých tří početních operací. Z našeho pohledu stojí za povšimnutí, že zatímco výraz na levé straně (1) má význam pouze pro $n\in\mathbb{N}$, výraz na pravé straně (1) poskytuje smysluplné hodnoty pro libovolné $n\in\mathbb{R}$ a tak nabízí řešení problému interpolace mezi členy posloupnosti $1,\ \ 1+2,\ \ 1+2+3,\ \ 1+2+3+4$ atd.

Řešení podobných interpolačních problémů bylo často spojeno s integrálním počtem. Například John Wallis (1616–1703) v knize *Arithmetica infinitorum* (1655) použil metodu *indivisibilií*[4]) ploch k řešení problému kvadratury kruhu. Úloha z dnešního pohledu vedla k výpočtu integrálu

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Wallis se snažil nalézt vztah podobný rovnosti $\int_0^1 x^{p/q}\,\mathrm{d}x = q/(p+q)$ pro každý integrál ve tvaru $\int_0^1 (1-x^{1/p})^q\,\mathrm{d}x$, kde p, q jsou přirozená čísla. Cílem bylo nalézt obecnou formuli pro uvedený integrál ve tvaru s p a q, a pak konkrétní substitucí $p=q=\frac{1}{2}$ získat hodnotu integrálu (2). Jedním ze získaných výsledků byl tzv. *Wallisův součin*[5])

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\,. \tag{3}$$

Tento součin sehrál významnou roli při Eulerově odvození integrálního tvaru gama funkce.

Euler se začal věnovat problémům vedoucím ke gama funkci v roce 1729. Tehdy, z podnětu Christiana Goldbacha (1690–1764), hledal obecný předpis, který by poskytl všechny členy posloupnosti $1,\ \ 1\cdot 2,\ \ 1\cdot 2\cdot 3,\ \ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ atd. Z dnešního pohledu Euler hledal vzorec analogický k (1) lišící se pouze tím, že místo sčítání přirozených čísel uvažujeme jejich násobení. Uvědomíme-li si, že v té době již k „běžné matematické výbavě“ patřila binomická věta, Taylorův rozvoj a další, je zřejmé, že znalost vzorce, který by usnadnil výpočet faktoriálů, byla velmi žádoucí. Současně se též od takového vztahu očekávalo, že umožní interpolovat mezi faktoriály.

---

[3]) Viz [22], str. 49, nebo [4], str. 42.

[4]) Metoda indivisibilií se používala při výpočtu obsahů ploch, resp. objemů těles. Spočívala v rozdělení plochy na části čar (např. přímky), resp. rozdělení tělesa na části ploch (např. kruhy). Tyto se nazývaly indivisibilie a vhodné sečtení jejich velikostí (tj. z geometrického hlediska jejich složení do původního útvaru) poskytlo hledaný obsah plochy, resp. objem tělesa, více viz [18], str. 25.

[5]) Wallisovo odvození je popsáno např. v [6], str. 170–176.

Malá odbočka

Obtížnost Eulerova úkolu spočívala v tehdejším vymezení pojmu funkce. V [8] Euler uvedl: *„Funkce proměnné veličiny je analytický výraz složený libovolným způsobem z této proměnné veličiny a z čísel nebo konstantních veličin.“* Zmiňovaný analytický výraz znamenal předpis (vzorec) získaný pomocí základních početních operací, jako jsou sčítání, odčítání, násobení, dělení, mocnění, logaritmování, derivování, integrování atd.[6]) Dnešní pojetí funkce jakožto vztahu mezi dvěma množinami čísel nabízí vcelku jednoduché řešení. Přirozeným číslům přiřadíme jejich faktoriály a ostatní hodnoty můžeme stanovit „libovolně“. Tomu graficky odpovídá zanesení bodů o souřadnicích $[0,1]$, $[1,1]$, $[2,2]$, $[3,6]$, $\ldots$ do kartézského souřadného systému a jejich následné propojení křivkou tak, aby vznikl graf funkce. To lze samozřejmě provést mnoha způsoby, a tím definujeme funkce, které řeší interpolační problém.

Dnes tedy chápeme každé rozšíření faktoriálů na $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ za přirozeně možné. Proto můžeme úlohu zúžit a hledat spojité funkce, které pro $n \in \mathbb{N}$ vyhovují vztahu $f(n) = n!$ a navíc splňují některé dodatečné podmínky. Jednou z „přirozených“ podmínek je rozšíření platnosti vztahu $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ na množinu $\mathbb{R}^+$. Hledáme tedy takovou funkci f, která vyhovuje funkcionální rovnici

$$f(x+1) = (x+1)f(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{4}$$

S přihlédnutím ke vztahům $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $\ldots$ můžeme pro funkci f určit počáteční podmínky, např. $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ atd. Za zmínku stojí, že z uvedených podmínek stačí uvést pouze jedinou. Ostatní podmínky vyplývají z rovnice (4). Tu lze upravit do tvaru $f(x+2) = (x+2)f(x+1) = (x+2)(x+1)f(x)$, resp. obecně vyjádřit ve tvaru

$$f(x+n) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)f(x), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{5}$$

Pak platí $f(1) = f(0+1) = 1\cdot f(0) = 1$, $f(2) = f(0+2) = 2\cdot 1\cdot f(0) = 2$ atd. Rovnice (5) má další důležitou vlastnost. Pokud bychom znali všechny hodnoty x např. z intervalu $(0,1\rangle$, mohli bychom pomocí rovnice (5) vypočítat všechny hodnoty z intervalu $(n, n+1\rangle$, kde $n \in \mathbb{N}$, tedy obecně pro libovolné $x \in \mathbb{R}^+$. Rovnici (5) navíc můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = \frac{f(x+n)}{(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3,\ldots\}. \tag{6}$$

Rovnice (6) tak rozšiřuje interpolační problém na množinu $\mathbb{R}$ s výjimkou záporných celých čísel. Tato zobecnění rovnice (4) tak umožňují na základě znalosti všech funkčních hodnot v intervalu $(x, x+1\rangle$, kde $x \in \langle -1, \infty)$, vypočítat všechny hodnoty funkce f na množině $\mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3,\ldots\}$. Zbývá tedy „pouze“ určit hodnoty funkce f v nějakém vhodném intervalu.

---

[6]) Více poznámek k vývoji pojmu funkce lze nalézt např. v článcích [19] a [15].

Vraťme se proto k rovnici (4). Řešení této rovnice není jednoznačné. Vzhledem k již uvedenému nám situaci neusnadní ani požadavek na spojitost funkce f. Na řadu proto přichází podmínka $f(0) = 1$. Spojité řešení rovnice (4) spolu s požadavkem $f(0) = 1$ vytváří spojitou funkci, která produkuje faktoriály, nicméně i tato omezení jsou „slabá" ve smyslu získání jednoznačného řešení. To lze ukázat pomocí následujícího příkladu. Nechť f je hledané řešení rovnice (4), které splňuje podmínku $f(0) = 1$. Označme symbolem $f_n(x)$ předpis funkce $f(x)$ na intervalu $(n, n+1\rangle$. Uvažujme libovolnou spojitou periodickou funkci g s periodou $p = 1$, pro kterou platí $g(0) = 1$. Je tedy např. $g(x) = \cos 2\pi x$ nebo $g(x) = 1 + \sin 2\pi x$. Nechť hledaná funkce f je na intervalu $(0, 1\rangle$ rovna hodnotám funkce g. Potom z (5) plyne, že

$$f_n(x) = g(x)x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1). \tag{7}$$

Řešení popsaná pomocí zmiňovaných goniometrických funkcí nejsou konvexní funkce. Podle hezkého přirovnání v [5] připomínají „záda velblouda". Můžeme zkusit přidat další podmínky, např. konvexitu a diferencovatelnost nalezeného řešení. Podobně jako v předchozím případě lze však ukázat, že ani konvexita, ani diferencovatelnost funkce f (a to jednou, dvakrát, ...) nejsou dostatečně silné podmínky pro jednoznačnost řešení rovnice (4). Dostatečně silnou podmínkou pro jednoznačné řešení rovnice (4) se ukázala být až logaritmická konvexita. K tomuto pojmu se později ještě vrátíme.

Euler a gama funkce

Uvedená řešení interpolačního problému mají tu nevýhodu, že se nedají vyjádřit pomocí jediného, analytického předpisu, který by odpovídal funkci tak, jak byla chápána v Eulerově době.

První uspokojivá řešení se nezávisle na sobě objevila v roce 1729 zásluhou Eulera a Daniela I. Bernoulliho (1700–1782). Shodou okolností se tak stalo během jediného týdne. Dne 6. října 1729 poslal Daniel Bernoulli Goldbachovi dopis věnovaný řešení jedné úlohy spojené s cykloidou. V dodatku dopisu je uvedeno řešení interpolačního problému: „Nechť x je index členu a A je nekonečně velké číslo; tvrdím, že obecný člen (tj. $x!$) [7]) bude

$$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdot \frac{4}{3+x} \cdots \frac{A}{A-1+x}\right).$$

Jestliže místo toho, abychom A považovali za nekonečně velké, položíme A rovno nějakému dostatečně velkému číslu, pak získáme veličinu blízkou k obecnému členu..."

Ukažme, co tím měl Bernoulli na mysli. Tak např. chceme-li určit hodnotu 3!, položíme $x = 3$. Potom je

$$3! \sim \left(A + \frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{A-1}{A+1} \cdot \frac{A}{A+2}\right) = 6\left(1 + \frac{1}{4A^2 + 12A + 8}\right).$$

[7]) Poznámka autora.

Je zřejmé, že se zvyšující se hodnotou A dostaneme přesnější odhad 3!. Např. pro $A = 10$ je $3! \sim 6 + \frac{1}{88}$, pro $A = 100$ je $3! \sim 6 + \frac{1}{6868}$ a limitní přechod $A \to \infty$ dává $3! = 6$. Tolik k řešení Daniela I. Bernoulliho. Dodejme jen, že tento výsledek byl publikován teprve v roce 1843.

Euler k řešení přistoupil obecněji. Goldbachovi zaslal k danému problému celkem dva dopisy. První z nich nese datum 13. října 1729 a pojednává o problému interpolace pomocí nekonečného součinu. V druhém dopisu z 8. ledna 1730 je popsáno řešení v integrálním tvaru. Oba dopisy obsahovaly pouze jednoduchý nástin řešení. Podrobnosti Euler zveřejnil v článku [9]. V tomto textu Euler shrnul oba výsledky, přičemž hlavní důraz kladl na odvození vzorce v integrálním tvaru. O nekonečném součinu se zmiňuje již jen krátce. Euler uvádí[8]):

…*hledal jsem obecné vyjádření, které dává všechny členy posloupnosti*

$$1, \quad 1 \cdot 2, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad \ldots$$

Za předpokladu …, že se tato posloupnost chová víceméně jako geometrická posloupnost, nalezl jsem následující vyjádření

$$\frac{1 \cdot 2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n} \cdot 3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n} \cdot 4^n}{3+n} \cdot \frac{4^{1-n} \cdot 5^n}{4+n} \cdots, \tag{8}$$

které vyjadřuje n-tý člen dané posloupnosti. Tento výraz se však nikdy úplně nezkrátí. Pokud je n celé číslo nebo zlomek, výsledkem je pouze přibližná hodnota žádaného členu, vyjma případy $n = 0$ a $n = 1$, kdy je výsledek roven číslu 1. Pro $n = 2$ dostaneme

$$\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdots = \textit{druhý člen } 2.$$

Zde se nabízí otázka, jak dalece Euler chápal limitní procesy spojené s nekonečnými součiny. Je např. snadné vyjádřit posloupnost částečných součinů odpovídající hodnotě $n = 3$. Je

$$p_k = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 6} \cdots \frac{(k+1)(k+1)(k+1)}{k \cdot k \cdot (k+3)} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{(k+1)(k+1)}{(k+2)(k+3)}.$$

Chceme-li získat hodnotu 3!, vypočteme $\lim_{k \to \infty} p_k$. Je

$$\lim_{k \to \infty} 2 \cdot 3 \cdot \frac{(k+1)(k+1)}{(k+2)(k+3)} = 6.$$

Euler píše, že si je vědom toho, že popsaný výsledek není vhodný k určování hodnot faktoriálů. Všiml si však, že vzorec má smysl i pro neceločíselné hodnoty, a je proto vhodný k interpolaci mezi faktoriály. Dále Euler uvádí, že při dosazení $n = \frac{1}{2}$ získal vztah podobný (3).

[8]) Cituji z anglického překladu [10], který je dostupný na webové adrese `http://home.sandiego.edu/~langton/eg.pdf`

… dostal jsem řadu

$$\sqrt{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdots},$$

která vyjadřuje hodnotu hledaného členu. Tato řada je mi ale povědomá v souvislosti se vzorcem pro obsah kruhu, který jsem viděl u Wallise. Pro Wallise znamenal, že čtverec se má ke kruhu o jeho průměru jako $2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdots$ *ku* $3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdots$ *Jestliže průměr kruhu bude roven jedné, bude obsah kruhu roven*

$$=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdots$$

Z této souvislosti jsem odvodil, že člen s indexem $n=\frac{1}{2}$ *je roven odmocnině z obsahu kruhu s průměrem rovným jedné.*

Jak Euler dále uvádí, v jistých případech můžeme integrací získat vzorce související s kvadraturou křivek. Protože věděl, že člen $n=\frac{1}{2}$ souvisí s obsahem kruhu, napadlo ho hledat obecné vyjádření faktoriálů pomocí vhodné formule v integrálním tvaru. Začal vyšetřovat integrál $\int_0^1 x^e(1-x)^n\,\mathrm{d}x$, kde $n\in\mathbb{Z}$ a e představuje libovolnou, ale pevně stanovenou hodnotu z množiny $\mathbb{R}$. Pomocí postupů, v dnešní době ne zcela korektních, odvodil pro faktoriály vztah

$$n! = \int_0^1 (-\ln x)^n\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Tak opět našel vzorec, který má rozumný smysl i tehdy, je-li n jakékoliv reálné číslo z intervalu $(-1,\infty)$. Adrien Maria Legendre (1752–1833) v roce 1809 upravil v práci [16] integrál (9) pomocí substituce $x=\exp(-t)$ a „posunutí“ definičního oboru do dnes používaného tvaru

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t,\quad x\in(0,\infty). \tag{10}$$

Mezi gama funkcí a faktoriály tedy platí vztah

$$\Gamma(x) = (x-1)!\,,\quad x\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

Od Legendra též pochází označení funkce řeckým písmenem Γ a pojmenování integrálu (10) *Eulerovým integrálem druhého druhu.* Integrací per partes dostaneme z integrálu (10) vztah

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}t^x\right]_0^\infty + x\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

Gama funkce tedy vyhovuje funkcionální rovnici

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\quad x\in(0,\infty), \tag{12}$$

která je analogií ke vztahu (4).

Řešení (9) v integrálním tvaru Euler podrobně zdůvodnil. Způsob, pomocí kterého odvodil součin (8), však v [9] neuvádí. Teprve v roce 1789 to podrobněji popsal v článku *De termino generali serierum hypergeometricarum* (O obecných členech hypergeometrické řady). Převedeme-li Eulerovy úvahy do dnešního značení, můžeme je popsat následujícím způsobem:

Vyjdeme od charakteristického vztahu pro faktoriály $n! = n \cdot (n-1)!$. Jestliže $n \in \mathbb{N}$, můžeme psát

$$(x+n)! = x!\,(x+1)(x+2)\cdots(x+n). \tag{13}$$

Jestliže je i x přirozené číslo, potom platí

$$(x+n)! = (n+x)! = n!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+x).$$

Je tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x+n)!}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+x)} = 1. \tag{14}$$

Nechť α značí libovolné, ale pevně zvolené reálné číslo. Potom snadno zjistíme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+x)}{(n+\alpha)^x} = 1. \tag{15}$$

Pomocí (14) a (15) získáme vztah

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x+n)!}{n!\,(n+\alpha)^x} = 1. \tag{16}$$

Použitím vzorců (13) a (16) obdržíme vztah

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x!\,(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!\,(n+\alpha)^x} = 1. \tag{17}$$

V této limitě vystupuje $x!$ jako proměnná, která se „neúčastní“ limitního procesu. Můžeme ji proto před limitu vytknout a výsledkem takové operace bude vztah

$$x! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+\alpha)^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}. \tag{18}$$

Označme nyní symbolem p_n hodnotu zlomku na pravé straně výrazu (18) pro nějaké konkrétní $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha = 1$. Je tedy např.

$$p_1 = \frac{1!\,(1+1)^x}{x+1}, \quad p_2 = \frac{2!\,(2+1)^x}{(x+1)(x+2)}, \quad p_3 = \frac{3!\,(3+1)^x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \ldots \tag{19}$$

Pro limitní přechod $n \to \infty$ Euler využil „teleskopičnost“ nekonečného součinu

$$\lim_{n\to\infty} p_n \sim p_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_4}{p_3} \cdots . \tag{20}$$

Dosazením (19) do (20) dostaneme z (18) vztah

$$x! = \frac{2^x}{x+1} \cdot \frac{2^{1-x}\,3^x}{x+2} \cdot \frac{3^{1-x}\,4^x}{x+3} \cdot \frac{4^{1-x}\,5^x}{x+4} \cdots . \tag{21}$$

Porovnáním s (8) zjistíme, že (21) je hledaný výraz pro interpolaci mezi faktoriály, který Euler popsal v roce 1729. Dodejme jen, že vzorec (21) lze upravit do tvaru

$$\begin{aligned} x! &= \left(\frac{2^x}{1^{x-1}}\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{3^x}{2^{x-1}}\frac{1}{x+2}\right)\cdots = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n}{n+x}\right] = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Krátce po vydání [9] Euler dokázal, že oba získané vzorce (8) a (9) definují na $(0,\infty)$ tutéž funkci. Uvědomíme-li si, kolika různými způsoby je možné řešit uvedený interpolační problém, vyniká o to více Eulerova geniální intuice, která ho vedla různými postupy k totožným výsledkům.

Ukažme, že obě funkce jsou na $(0,\infty)$ skutečně shodné. Nebudeme přitom ale pracovat s funkcemi (8) a (9), ale s gama funkcí (10) ve smyslu Legendreovy úpravy. Vyjádření gama funkce pomocí nekonečného součinu získáme pomocí vztahů (22) a (11)

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right]. \tag{23}$$

Standardní důkaz založený na použití beta funkce lze najít např. v [14], kap. XVIII, § 2. Přibližme důkaz založený na odlišné myšlence, a to na pojmu logaritmické konvexity.

Definice. Řekneme, že funkce f definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je *logaritmicky konvexní na* I, je-li funkce f kladná na I a složená funkce $\log(f)$ konvexní na I.

Logaritmická konvexita je silnější podmínka než „obyčejná" konvexita. Logaritmicky konvexní funkce jsou konvexní, ne každá konvexní funkce je však logaritmicky konvexní. Např. konvexní polynomy libovolně vysokého stupně nejsou logaritmicky konvexní na žádném intervalu. Je snadné ukázat, že součin logaritmicky konvexních funkcí je logaritmicky konvexní funkce.

Bohrova-Mollerupova věta

Již bylo zmíněno, že spojitost, diferencovatelnost ani konvexita nejsou dostatečně silné podmínky k získání jednoznačného řešení funkcionální rovnice (12) a že teprve požadavek logaritmické konvexity řešení spolu s podmínkou $f(1) = 1$ poskytuje jednoznačné řešení rovnice (4). Tyto podmínky jsou základem tzv. *Bohrovy-Mollerupovy věty.*

Věta 1. *Existuje právě jedna kladná spojitá funkce f definovaná na intervalu $(0, \infty)$, která*

i) *pro všechna $x \in (0, \infty)$ vyhovuje funkcionální rovnici $f(x+1) = xf(x)$,*
ii) *vyhovuje podmínce $f(1) = 1$,*
iii) *je logaritmicky konvexní na intervalu $(0, \infty)$.*

Tuto větu dokázali v roce 1922 dánští matematici Harald Bohr (1887–1925) a Johannes Mollerup (1872–1937). V roce 1931 vydal Emil Artin (1898–1962) knihu [1], ve které uvedl významně jednodušší důkaz této věty. Současně ukázal[9]), že funkce gama ve tvaru (10) vyhovuje podmínkám věty 1. Význam věty 1 spočívá v tom, že pokud dokážeme, že nějaká funkce vyhovuje všem předpokladům věty 1, pak se na intervalu $(0, \infty)$ tato funkce nutně musí rovnat gama funkci (10).

V následující části textu zavedeme funkci h, o které budeme předpokládat, že je definována pro všechna $x \in (0, \infty)$, je na tomto intervalu kladná a vyhovuje podmínkám i), ii), iii) věty 1. Jednu takovou funkci už známe, jak bylo již uvedeno, je touto funkcí gama funkce ve tvaru (10). Naším cílem bude ukázat, že funkce h je též rovna funkci definované nekonečným součinem na pravé straně rovnice (23). K důkazu přitom bude stačit dokázat rovnost obou funkcí pro $x \in (0, 1\rangle$, protože vzhledem k podmínce i) věty 1 se pak budou obě funkce shodovat ve všech bodech $x \in (0, \infty)$.

Ukažme tedy, že nekonečný součin (23) vyhovuje podmínkám věty 1 a je proto roven funkci h. Porovnáním vztahů (22) a (23) snadno ověříme splnění podmínky i) věty 1. Z dosazení $x = 1$ do (23) je ihned vidět splnění podmínky ii) věty 1. Z předpokladu logaritmické konvexity funkce h vyplývají pro $x_1, x_2, x_3 \in (0, \infty)$, $x_1 < x_2 < x_3$ nerovnosti

$$\frac{\log h(x_2) - \log h(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \frac{\log h(x_3) - \log h(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \frac{\log h(x_3) - \log h(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{24}$$

Pro $x \in (0, 1\rangle$ a $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $n - 1 < n < n + x \leqq n + 1$. Vzhledem k tomu můžeme nerovnosti (24) přepsat ve tvaru

$$\frac{\log h(n-1) - \log h(n)}{(n-1) - n} \leqq \frac{\log h(x+n) - \log h(n)}{(x+n) - n} \leqq \frac{\log h(n+1) - \log h(n)}{(n+1) - n}.$$

Z podmínky i) vyplývají vztahy

$$\log h(n) = \log(n-1) + \log h(n-1), \quad \text{resp.} \quad \log h(n+1) = \log n + \log h(n).$$

Použitím těchto vztahů a následnou úpravou dostaneme

$$x \log(n-1) + \log h(n) \leqq \log h(x+n) \leqq x \log n + \log h(n),$$

což vzhledem ke vztahům

$$h(x+n) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)h(x) \quad \text{a} \quad h(n) = (n-1)!$$

[9]) Další důkaz, využívající Hölderovu nerovnost, lze nalézt např. v [22].

vede po „odlogaritmování“ k nerovnostem

$$(n-1)^x(n-1)! \leqq x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)h(x) \leqq n^x(n-1)!\,.$$

Vzhledem k tomu, že nerovnosti platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, lze výraz n nahradit hodnotou $n+1$. Tím získáme

$$n^x n! \leqq x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)h(x) \leqq (n+1)^x n!\,,$$

resp.

$$1 \leqq \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n^x\, n!}\, h(x) \leqq \left(\frac{n+1}{n}\right)^x,$$

což po limitním přechodu $n \to \infty$ dává

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,. \tag{25}$$

Protože platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^x}{n^x} = 1,$$

lze v (25) nahradit n^x výrazem $(n+1)^x$, čímž získáme

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^x\, n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,. \tag{26}$$

Jmenovatel zlomku lze upravit do tvaru

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n) = n!\, x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right). \tag{27}$$

Pomocí (27) a „teleskopické“ vlastnosti nekonečného součinu

$$\left(\frac{2}{1}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^x = (n+1)^x$$

upravíme vzorec (26) do tvaru

$$h(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{m} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right],$$

z čehož vyplývá, že

$$h(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right]. \tag{28}$$

Je tedy funkce h rovna funkci definované výrazem (23). Na počátku jsme přitom předpokládali logaritmickou konvexitu funkce h. Znamená to, že funkce (23) vyhovuje všem podmínkám věty 1, musí proto být na tomto intervalu shodná s (10), což jsme chtěli ukázat.

Nekonečný součin (23) je navíc definován pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Je proto vhodný k definici gama funkce na množině $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Často se můžeme setkat s definicí gama funkce ve tvaru

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\, \mathrm{e}^{-\gamma x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/k}}{1 + (x/k)}\,, \quad x \in \Omega, \tag{29}$$

kde $\mathrm{e} = 2{,}71828\dots$ je základ přirozených logaritmů a $\gamma = 0{,}577215\dots$ je tzv. Eulerova-Mascheroniova[10]) konstanta. Připomeňme, že hodnota této konstanty se zpravidla zavádí rovností

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \Big).$$

V dalším textu odvodíme pro γ některé vztahy a ukážeme souvislost γ s jinými konstantami. Vzorec (29) se stal výchozím bodem pro mnoho dalších výpočtů.

Sinový součin

Vyjádření funkce sinus pomocí nekonečného součinu (dále jen *sinový součin*) se objevilo poprvé v roce 1734 v Eulerově práci *De summis serierum reciprocarum* (O součtu reciprokých řad) v souvislosti s problémem určení součtu řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad z \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Součet řady (30) byl později označen symbolem $\zeta(z)$ a tato funkce, rozšířená na množinu $(1, \infty)$, byla na počest významného německého matematika Georga Friedricha Bernharda Riemanna (1826–1866) později nazvána *Riemannova zeta funkce.* Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \zeta(2)$ před rokem 1734 úspěšně odolávala jakýmkoliv pokusům o určení součtu. Vypočítat hodnotu $\zeta(2)$ se marně snažili např. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Johann Bernoulli a jeho bratr Jacob Bernoulli (1654 až 1705), a to i přesto, že v té době již byly známy součty podobných řad, jako např. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 1/(n^2 - 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 + n)$ nebo $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 1/(n^2 - n)$.

Teprve Euler dokázal v roce 1734 vypočítat hodnotu $\zeta(2)$. Vyšel přitom ze vzorce

$$1 - \frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dots = \Big(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\Big) \cdots, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{31}$$

[10]) Euler určil hodnotu γ s přesností na 15 desetinných míst. Lorenzo Mascheroni (1750 až 1800) na 32 míst, z toho však pouze 19 bylo správných. Do dnešního dne není patrně známo, zda je γ racionální nebo iracionální číslo. V roce 1997 vypočítal Thomas Papanikolaou hodnotu γ na 1 000 000 desetinných míst a pomocí rozvoje γ v řetězový zlomek ukázal, že pokud je γ racionální číslo, má jeho jmenovatel více než 244 663 číslic.

který zdůvodnil tím, že nulové body řady jsou $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ atd. Proto je řada (podle analogie s polynomy) dělitelná výrazy $1 \pm s/\pi$, $1 \pm s/(2\pi)$, $1 \pm s/(3\pi)$ atd.

Eulerovo řešení vyvolalo u některých matematiků rozpaky. Např. Johann Bernoulli poukázal na správnost zdůvodnění pouze za předpokladu, že funkce $\sin z$ nemá v $\mathbb{C}$ kromě $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, žádné další nulové body. Tyto námitky byly pro Eulera motivem k dalšímu bádání. Výsledkem byla řada objevů, mimo jiné např. vztah $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\,z} = \cos z + \sqrt{-1}\,\sin z$ a z něho plynoucí rovnice

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\,z} - \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}\,z}}{2\sqrt{-1}}\,, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\,z} + \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}\,z}}{2}\,, \tag{32}$$

nebo formule $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + x/n)^n$, se kterou Euler pracoval ve tvaru

$$\mathrm{e}^x = \Big(1 + \frac{x}{\mathrm{i}}\Big)^{\mathrm{i}}. \tag{33}$$

Zde bych poznamenal, že Euler v (33) značil symbolem i nekonečně velké číslo[11]) (lat. *infinitus*). Abych se vyhnul kolizím ve značení, budu v následujícím textu používat pro nekonečně velkou veličinu místo i označení N.

Pomocí vztahů (32) a (33) Euler v roce 1743 odvodil sinový součin znovu, a to v práci *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur* (Další pojednání o součtu řady mocnin převrácených hodnot přirozených čísel, ve kterém jsou tyto součty odvozeny úplně odlišným způsobem)[12]). Toto odvození popsal roku 1748 obšírněji v učebnici [8]. Při dalším výkladu budu vycházet právě z této knihy.

Sinový součin je zde odvozen v IX. kapitole s názvem *De investigatione factorum trinomialium* (O vyšetřování trojčlenných faktorů). Výklad začíná odkazem na známý postup nalezení reálných dvojčlenných faktorů (kořenových činitelů) celistvé funkce $f(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \cdots$. Hledá tedy výraz $p - qz$, který vyhovuje podmínce $f(p/q) = 0$.

Co tím máme na mysli? Dnes studenti již na střední škole vědí, že např. polynom $x^2 + px + q$, kde $p, q \in \mathbb{R}$, má pro $p^2 - 4q \geqq 0$ kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\,.$$

Zmíněný polynom lze tedy vyjádřit pomocí rozkladu na kořenové činitele ve tvaru $(x - x_1)(x - x_2)$. Jestliže má výraz $p^2 - 4q$ zápornou hodnotu, jsou kořeny polynomu komplexně sdružená čísla. Podobně můžeme rozložit na kořenové činitele (faktory) i polynomy vyšších řádů. Právě o nalezení vhodného postupu výpočtu těchto faktorů se Euler snažil.

---

[11]) Použití i ve smyslu označení imaginární jednotky (lat. *imaginarius*) nalezneme u Eulera až od roku 1777.

[12]) Pouze volný překlad. Název článku zřejmě souvisí s předchozí prací *De summis serierum reciprocarum.*

V další části IX. kapitoly Euler popisuje způsob, kterým lze nalézt imaginární faktory[13]) funkce, a tedy i imaginární nulové body funkce. Jedním ze získaných výsledků bylo nalezení faktorů výrazu $a^n - z^n$ ve tvaru $a^2 - 2az\cos(2k\pi/n) + z^2$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqq n$. Nalezené faktory Euler použil při hledání faktorů funkce $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$. Pomocí (33) vyjádřil uvedenou funkci ve tvaru

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{x}{N}\right)^N. \tag{34}$$

V (34) provedl substituci $N = n$, $1 + x/N = a$ a $1 - x/N = z$. Tím převedl (34) na funkci $a^n - z^n$ a díky znalosti jejích faktorů snadno získal faktory funkce $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ ve tvaru

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{N}\right)\left(1 - \frac{x}{N}\right)\cos\frac{2k\pi}{N} + \left(1 - \frac{x}{N}\right)^2. \tag{35}$$

Zde se Euler nezastavil. Přihlédnutím k nekonečně velké hodnotě N nahradil člen[14]) $\cos(2k\pi/N)$ výrazem $1 - 2k^2\pi^2/N^2$ a vzorec (35) upravil na tvar

$$\frac{4x^2}{N^2} + \frac{4k^2\pi^2}{N^2} - \frac{4x^2k^2\pi^2}{N^4} = \frac{4k^2\pi^2}{N^2}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{N^2}\right). \tag{36}$$

Z levé strany rovnice (36) Euler usoudil, že pro $k = 0$ je faktorem funkce výraz[15]) $2x$. Pravá strana rovnice (36) zase poskytuje faktory funkce pro $k \neq 0$ ve tvaru

$$1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{N^2}. \tag{37}$$

Vzhledem k nekonečně velké hodnotě N Euler zanedbal člen x^2/N^2. Hledanými faktory funkce jsou proto výrazy $2x$ a $1 + x^2/(k^2\pi^2)$, kde $k \in \mathbb{N}$. Po uspořádání faktorů dostaneme pro funkci $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ vzorec

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots. \tag{38}$$

Jestliže x bude imaginární veličinou, stanou se tyto exponenciální výrazy siny a kosiny nějakého reálného úhlu. Nechť $x = z\sqrt{-1}$. Potom podle (32) je možné vyjádřit rovnost (38) ve tvaru

$$\frac{\mathrm{e}^{z\sqrt{-1}} - \mathrm{e}^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right)\cdots. \tag{39}$$

Rovnost v (39) vpravo je často nazývána *sinový součin.* Uvedený postup umožňuje nalézt všechny (i imaginární) faktory funkce sinus. Z těchto faktorů snadno určíme

---

[13]) Tj. kořenové činitele obsahující kromě nezávisle proměnné i imaginární kořeny.

[14]) Úprava je umožněna rozvojem funkce kosinus v mocninnou řadu a vhodným zanedbáním.

[15]) V předchozím textu (§ 148, § 150) Euler zdůvodnil, proč v případě faktorů ve formě čtverce jistého výrazu uvažuje pouze jeho první mocninu.

nulové body funkce. Z (39) je zřejmé, že všechny faktory funkce $\sin z$ lze vyjádřit ve tvaru z nebo $1 - z^2/(k^2\pi^2)$. Nulovými body funkce sinus jsou proto pouze hodnoty $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Tímto způsobem Euler vyhověl námitce Johanna Bernoulliho a ukázal, že funkce sinus nemá kromě $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, v oboru komplexních čísel žádné další nulové body. Poznamenejme jen, že další důkazy rovnosti (39) lze nalézt např. v [17].

V X. kapitole [8] se Euler vrátil k funkci $\zeta(z)$ a ukázal, jakým způsobem je možné použitím sinového součinu vypočítat funkční hodnoty pro $z = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Porovnáním (38) s rozvojem funkce $(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$ v mocninnou řadu a následnou substitucí $x^2 = \pi^2 z$ získal vzorec

$$1 + \frac{\pi^2}{3!}\,z + \frac{\pi^4}{5!}\,z^2 + \frac{\pi^6}{7!}\,z^3 + \cdots = (1+z)\Big(1 + \frac{1}{4}\,z\Big)\Big(1 + \frac{1}{9}\,z\Big)\cdots. \tag{40}$$

Roznásobením součinů na pravé straně (40) získáme výraz $1 + Az + Bz^2 + \cdots$, kde $A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$, $B = 1(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots) + \frac{1}{4}(\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots) + {} + \frac{1}{9}(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots) + \cdots$. Euler považoval oba výrazy v (40) za „polynomy nekonečně vysokého stupně“. Z jejich shodnosti vyplývá rovnost koeficientů u stejných mocnin proměnné z v obou výrazech. Porovnáním koeficientů u členu z dospěl k výsledku, že $\zeta(2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(1/k^2) = \pi^2/6$. Dalšími výpočty určil také hodnoty $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\ldots$, $\zeta(26)$. Výsledky vyjádřil ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{2^{2n-2}}{(2n+1)!}\cdot\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\,\pi^{2n},$$

kde a_{2n}/b_{2n} jsou postupně zlomky $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{691}{105}$, $\frac{35}{1}$, $\ldots$ Jak Euler tvrdí, tyto zlomky se zdají být na první pohled nahodilé, mají však celou řadu dalších použití. To souvisí se vztahem

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{B}_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde B_{2n} jsou tzv. *Bernoulliova čísla*, viz např. [21]. Tímto způsobem Euler vyřešil problém nalezení součtu převrácených hodnot druhých mocnin přirozených čísel a navíc podal obecný návod pro určení součtu pro sudé mocniny.

Gama funkce a sinový součin

Spojení gama funkce a sinového součinu vede k zajímavým výsledkům. Gama funkce vyhovuje funkcionální rovnici $f(x+1) = xf(x)$, je tedy $\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x)$. Ze vztahu (29) lze pro převrácenou hodnotu gama funkce odvodit rovnost

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\Big\{\Big(1 + \frac{x}{k}\Big)\,\mathrm{e}^{-x/k}\Big\}. \tag{41}$$

Funkce definovaná nekonečným součinem na pravé straně (41) nabývá v dřívějších „nepříjemných“ bodech $0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ nulových hodnot. Tímto je v těchto bodech „dodefinována“ a v dalším textu budu za definiční obor funkce $1/\Gamma$ považovat množinu $\mathbb{R}$. Úpravou vztahu (41) získáme rovnici

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\,\frac{1}{\Gamma(1-x)} = x\prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1-\frac{x^2}{k^2}\Bigr), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{42}$$

Provedeme-li na pravé straně rovnice (39) substituci $z = \pi x$, získáme další z obvyklých zápisů sinového součinu

$$\sin(\pi x) = \pi x\prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1-\frac{x^2}{k^2}\Bigr), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{43}$$

Porovnáním (42) a (43) snadno zjistíme, že

$$\sin\pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{44}$$

Pro tento nečekaný výsledek, ukazující souvislost gama funkce s funkcí sinus se vžil název *reflekční vzorec* (reflection formula). Substitucí $x=\frac{1}{2}$ v (44) snadno zjistíme, že $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, a podobně získáme další výsledky. Dosazením $x=\frac{1}{3}$ do (44) získáme rovnici $\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3}) = 2\sqrt{3}\pi/3$. Dále pro $x=\frac{1}{4}$ z (44) plyne $\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{2}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = \sqrt{2\pi}\pi$ atd. Zobecněním předchozích výsledků je tzv. *Gaussova multiplikační formule*[16])

$$\Gamma\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\Gamma\Bigl(\frac{2}{n}\Bigr)\cdots\Gamma\Bigl(\frac{n-1}{n}\Bigr) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}\,.$$

Zajímavé souvislosti mezi gama funkcí a zeta funkcí lze získat logaritmováním obou stran rovnice (29). Platí

$$\ln\bigl(\Gamma(x)\bigr) = \ln\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr) - \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\frac{x}{k} - \ln\Bigl(1+\frac{x}{k}\Bigr)\Bigr). \tag{45}$$

Existuje-li derivace f' kladné funkce f, je podíl f'/f derivací funkce $\ln f$. Výraz f'/f proto často nazýváme *logaritmickou derivací* funkce f. Pro libovolné $x\in\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ zavedeme funkci $\Psi(x)$ jakožto logaritmickou derivaci funkce gama. Vzhledem k tomu, že řada vpravo v (45) konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}^+$, můžeme psát

$$\Psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(\ln\bigl(\Gamma(x)\bigr)\bigr) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\Bigr).$$

[16]) Viz např. Gaussova kniha *Disquisitiones Generales circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}\,xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\,x^3 + \cdots$$

(Obecné pojednání o nekonečné řadě …), str. 150. Kniha je v elektronické podobě dostupná na [24].

Pro $x \in \mathbb{R}^+$ tedy platí

$$\Psi(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k-1} \right). \tag{46}$$

Postupným derivováním vztahu (46) získáme rovnice

$$\Psi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k-1)^2}, \quad \ldots, \quad \Psi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+k-1)^{n+1}}. \tag{47}$$

Substitucí $x = 1$ v rovnicích (46) a (47) získáme hodnoty

$$\Psi(1) = -\gamma, \quad \Psi'(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \ldots, \quad \Psi^{(n)} = (-1)^{n+1} n!\, \zeta(n+1), \tag{48}$$

kde $\zeta(z)$ je Riemannova zeta funkce (30). Rovnice (48) ukazují zajímavé chování funkce gama a jejích derivací v okolí bodu 1 a její souvislost s Eulerovou-Mascheroniovou konstantou a hodnotami zeta funkce, neboť $\Psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma$; $\Psi'(1) = \Gamma''(1) - \big(\Gamma'(1)\big)^2$, tedy $\Gamma''(1) = \gamma^2 + \pi^2/6$, atd.

Závěr

V článku jsem uvedl několik poznámek o Eulerově přístupu k nekonečným součinům. Rozhodně tím není zcela vyčerpán popis Eulerovy práce v oblasti nekonečných součinů. Euler však nebudoval soustavnou teorii nekonečných součinů. Pracoval s nimi při řešení konkrétních problémů. I když existovala další, paralelní možnost, Euler si díky své geniální intuici většinou vybíral právě ta řešení, která se později ukázala jako nejvhodnější a která přinášela další, zajímavé podněty. Tím se tato řešení stala inspirující výzvou pro Eulerovy následovníky.

Poděkování. Tímto bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Jiřímu Veselému, CSc., za množství cenných připomínek a rad, které mi poskytoval po celou dobu, kdy rukopis článku vznikal.

L i t e r a t u r a

[1] Artin, E.: *Einführung in die Theorie der Gammafunktion.* Teubner, Leipzig 1931.
[2] Bašmaková, I. G., Juškevič, A. P.: *Leonhard Euler.* Istoriko-matematičeskie issledovania VII, GIFML, Moskva 1954, 453–512.
[3] Beckmann, P.: *Historie čísla* π. Academia, Praha 1998.
[4] Bečvář, J.: *Hrdinský věk řecké matematiky.* Historie matematiky I, Prometheus, Praha 1993.
[5] Davis, P. J.: *Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function.* Amer. Math. Monthly *66* (1959), 849–869.
[6] Edwards, C. H. Jr.: *The historical development of the calculus.* Springer, New York 1979.

[7] EULER, L.: *De summis serierum reciprocarum.* Opera Omnia, Ser. 1, vol. 14, Leipzig 1925.
[8] EULER, L.: *Vvěděnije v analiz bezkoněčnych.* Tom I., vyd. 2., GIFML, Moskva 1961 (ruský překlad latinského díla „Introductio in analysin infinitorum", 1748).
[9] EULER, L.: *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.* Opera Omnia, Ser. 1, vol. 14, Leipzig 1925.
[10] EULER, L.: *On transcendental progressions that is, those whose general terms cannot be given algebraically.* Překlad [9] z latiny S. G. LANGTON, University of San Diego, 1999.
[11] FOLTA, J., NEUŽILOVÁ, L.: *Leonhard Euler — tvůrce nových matematických disciplín a analytické mechaniky.* VTM *4* (1997), 5.
[12] HARENBERG, B. (ed.): *Kronika lidstva.* Fortuna Print, Praha 2003.
[13] JARNÍK, V.: *Integrální počet I.* Academia, Praha 1984.
[14] JARNÍK, V.: *Integrální počet II.* Academia, Praha 1984.
[15] KOPÁČKOVÁ, A.: *Fylogeneze pojmu funkce.* Matematika v proměnách věků II, Prometheus, Praha 2001.
[16] LEGENDRE, A. M.: *Memoires de la classe des sciences mathematiques et physiques de l'Institut de France.* Paris 1809, 477–490.
[17] REMMERT, R.: *Classical topics in complex function theory.* Springer, New York 1998.
[18] SCHWABIK, Š., ŠARMANOVÁ, P.: *Malý průvodce historií integrálu.* Prometheus, Praha 1996.
[19] SCHWABIK, Š.: *Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století.* Matematika v 19. století, Prometheus, Praha 1996.
[20] TROJOVSKÝ, P.: *Číselné řady u Bernoulliů.* Matematika v proměnách věků I, Prometheus, Praha 1998.
[21] VESELÝ, J.: *Matematická analýza pro učitele.* MatFyzPress, Praha 2001.
[22] VESELÝ, J.: *Poznámky k historii funkce gama.* Člověk – Umění – Matematika, Prometheus, Praha 1996.
[23] `http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html`
[24] `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/index.html`
[25] `http://www.eulerarchive.org/`
[26] *Encyklopedická edice LISTY* (1). Encyklopedický dům, Praha 1997.