Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Emil Vitásek

A-stabilní metody libovolně vysokého řádu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 51 (2006), No. 1, 61–68

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141301`

A-stabilní metody libovolně vysokého řádu

Emil Vitásek, Praha

1. Úvod

Při konstrukci metod pro přibližnou integraci obyčejných diferenciálních rovnic se obvykle požaduje, aby navrhované metody konvergovaly, tj. aby chybu bylo možné učinit libovolně malou volbou dostatečně malého integračního kroku a aby se chyba pokud možno co nejvíce zmenšila při zmenšení integračního kroku. Druhý požadavek je motivován úsporou výpočetního času. V praxi se však vyskytují soustavy diferenciálních rovnic, jejichž chování je takové, že k jejich uspokojivému řešení tyto přirozené požadavky nestačí. Jednu takovou třídu diferenciálních rovnic a problémy s jejím řešením popíšeme na velmi jednoduchém příkladě.

Řešme soustavu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \tag{1.1}$$

m lineárních rovnic, kde $\mathbf{A}$ je konstantní čtvercová matice řádu m s navzájem různými vlastními čísly λ_i a odpovídajícími vlastními vektory $\mathbf{u}_i$. Obecné řešení soustavy (1.1) se dá psát v tomto případě ve tvaru

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{u}_i + \mathbf{p}(t).$$

Předpokládejme, že je $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ pro $i = 1, \dots, m$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{u}_i \to \mathbf{0} \quad \text{pro} \quad t \to \infty. \tag{1.2}$$

Z tohoto důvodu budeme o kombinaci (1.2) mluvit jako o přechodovém řešení a o vektoru $\mathbf{p}(t)$ jako o ustáleném řešení. Nechť dále $\lambda_{\max}$ a $\lambda_{\min}$ jsou taková vlastní čísla, že platí $|\operatorname{Re}\lambda_{\max}| \geqq |\operatorname{Re}\lambda_i| \geqq |\operatorname{Re}\lambda_{\min}|$ pro $i = 1, \dots, m$. Je-li naším úkolem vypočítat ustálené řešení, je nutno řešit soustavu (1.1) nejméně až do bodu, v němž je nejpomaleji klesající exponenciála v přechodovém řešení už zanedbatelná. Čím menší je

---

RNDr. Emil Vitásek, CSc. (1931), Matematický ústav Akademie věd ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: vitas@math.cas.cz

Článek byl podpořen AV ČR, výzkumným záměrem č. AV0Z10190503.

tedy číslo $|\mathrm{Re}\,\lambda_{\min}|$, na tím delším intervalu je třeba soustavu řešit. Na druhé straně užití metody, která na tuto speciální situaci nebere zřetel, vyžaduje nutnost dobré aproximace i ostatních složek v přechodovém řešení, které se tlumí rychleji a které nás vlastně ani nezajímají. O velikosti integračního kroku pak bude rozhodovat číslo $|\mathrm{Re}\,\lambda_{\max}|$. Je-li $|\mathrm{Re}\,\lambda_{\max}|$ podstatně větší než $|\mathrm{Re}\,\lambda_{\min}|$, dostáváme se do velmi obtížné situace, kdy máme řešit diferenciální rovnici na dlouhém intervalu a přitom jsme nuceni užít integrační krok, který je v kterékoliv fázi výpočtu velice malý vzhledem k délce příslušného intervalu.

Studovaná soustava (1.1) je typickým představitelem soustavy diferenciálních rovnic *se silným tlumením* (stiff differential system). Jako míra zmíněných obtíží může sloužit poměr $|\mathrm{Re}\,\lambda_{\max}|/|\mathrm{Re}\,\lambda_{\min}|$, který nazveme *S-poměrem* dané soustavy. Čím je S-poměr větší, tím hůře se soustava chová. Poznamenejme, že pojem „stiff“ je zaveden heuristicky, a proto nelze uvést žádnou hranici, kdy daná soustava je už „stiff“. Situace je zde podobná jako u výroku, že matice je dobře nebo špatně podmíněná.

V souvislosti s posuzováním vhodnosti či nevhodnosti dané metody pro řešení „stiff“ soustav se už v padesátých letech minulého století objevil pojem tzv. *A-stability* zavedený významným švédským matematikem Germundem Dahlquistem (viz [4]) v roce 1953. K zavedení tohoto pojmu užijeme modelovou diferenciální rovnici prvního řádu

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{1.3}$$

s počáteční podmínkou $u(0) = u_0$, v níž A je *libovolná komplexní* konstanta se zápornou reálnou částí. Dále zvolíme *libovolně* $h > 0$ a pomocí zkoumané metody sestrojíme posloupnost $\{u_n\}$ přibližných hodnot řešení v bodech $t_n = nh$, $n = 0, 1, \ldots$ Zkoumanou metodu pak nazveme *A-stabilní*, platí-li

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

při *libovolném* integračním kroku $h > 0$. Požadavek A-stability se při řešení stiff soustav ukázal velmi účinný, naneštěstí je do značné míry restriktivní. Je totiž skoro na první pohled zřejmé, že ani Rungovy-Kuttovy metody, ani *explicitní* lineární mnohokrokové metody nemohou být A-stabilní. Je tomu tak proto, že obě tyto třídy metod vedou na aproximaci exponenciály $\exp(At)$ (která je řešením testovací rovnice (1.3)) pomocí polynomu, a ten má v nekonečnu pól. Podstatně více omezující je skutečnost, že maximální řád chyby A-stabilní mnohokrokové metody je 2. (Připomeňme, že řád metody je takové přirozené číslo p, že chyba v jednom kroku metody je řádu h^{p+1}.) Proto je žádoucí zavést nějakou nestandardní třídu metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic, v níž by existovaly A-stabilní metody libovolně vysokého řádu. V dalším textu jednu takovou třídu metod zavedeme. Předností těchto metod je, že se jejich vlastnosti dají vyšetřit pomocí zcela elementárního matematického aparátu.

2. SB-metody

Třídu metod ([7]), kterou zavedeme v tomto odstavci, popíšeme pro řešení skalární diferenciální rovnice

$$u' = f(t, u), \quad t \in [0, T], \tag{2.1}$$

s počáteční podmínkou

$$u(0) = \eta. \tag{2.2}$$

Pro užití metody k řešení soustavy diferenciálních rovnic stačí pouze předpokládat, že v rovnici (2.1) je proměnná u vektor a funkce f je vektorová funkce $n+1$ proměnných.

O pravé straně rovnice (2.1) předpokládáme, že je spojitá a lipschitzovská v pásu $0 < t < T$, $-\infty < u < \infty$. To zaručuje existenci a jednoznačnost řešení v celém intervalu $[0, T]$.

Buď dáno reálné číslo $h > 0$ (integrační krok), celé číslo k, $k \geqq 1$, reálná čísla $\mu_1, \ldots, \mu_k$, $\mu_k = 1$, čtvercová matice $\boldsymbol{C}$ řádu k a k-dimenzionální vektor $\boldsymbol{d}$. Položme ještě

$$t_{rk} = rh, \quad r = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

a

$$t_{rk+i} = t_{rk} + \mu_i h, \quad i = 1, \ldots, k-1. \tag{2.4}$$

Body (2.3) nazveme základní body a body (2.4) intermediální body. Přibližné řešení diferenciální rovnice (2.1) s počáteční podmínkou (2.2) v bodě t_i označme u_i a počítejme je z obecně nelineární soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} u_{rk+1} \\ \vdots \\ u_{(r+1)k} \end{pmatrix} = u_{rk}\boldsymbol{e} + h\boldsymbol{C} \begin{pmatrix} f_{rk+1} \\ \vdots \\ f_{(r+1)k} \end{pmatrix} + hf_{rk}\boldsymbol{d}, \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{2.5}$$

kde $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ a $f_j = f(t_j, u_j)$.

Předpoklad lipschitzovskosti pravé strany diferenciální rovnice (2.1) zaručuje, že vektor $(u_{rk+1}, \ldots, u_{(r+1)k})^{\mathrm{T}}$ je při daném u_{rk} touto rovnicí — aspoň pro dostatečně malá h — jednoznačně definován. Abychom se o tom přesvědčili, stačí užít postupné aproximace a Banachovu větu o kontrakci. Soustava (2.5) tedy představuje korektní metodu pro řešení diferenciální rovnice (2.1); nazveme ji *SB-metodou.* Užitý název je odvozen od anglických slov *selfstarting block metod*, která vyjadřují skutečnost, že metoda nepotřebuje žádnou speciální startovací proceduru a že se v jednom kroku metody počítá několik přibližných hodnot řešení najednou.

Abychom mohli vyslovit základní větu o konvergenci, zaveďme ještě pojem *lokální chyby* a *řádu* SB-metody. Lokální chybou budeme rozumět, jak je obvyklé v souvislosti s přibližným řešením obyčejných diferenciálních rovnic, vektor $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\big(u(t), h\big)$ daný rovnicí

$$\boldsymbol{L}\big(u(t), h\big) = \begin{pmatrix} u(t+\mu_1 h) \\ \vdots \\ u(t+\mu_k h) \end{pmatrix} - u(t)\boldsymbol{e} - h\boldsymbol{C} \begin{pmatrix} u'(t+\mu_1 h) \\ \vdots \\ u'(t+\mu_k h) \end{pmatrix} - hu'(t)\boldsymbol{d}.$$

Celé kladné číslo p je pak *řádem* SB-metody, platí-li

$$L_i\big(u(t), h\big) = O(h^{p+1}), \quad i = 1, \dots, k, \tag{2.6}$$

při $h \to 0$ pro libovolnou dostatečně hladkou funkci $u(t)$. Ekvivalentně lze podmínky (2.6) vyjádřit algebraickými vztahy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} + d_i &= \mu_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \nu \sum_{j=1}^{k} \mu_j^{\nu-1} c_{ij} &= \mu_i^{\nu}, \quad \nu = 2, \dots, p, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Poznamenejme, že vzorce (2.7) se odvodí z rovnic (2.6) elementárním užitím Taylorova vzorce.

Zcela obdobně, jako v případě vět o konvergenci standardních metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic, se dokáží následující věty.

Věta 2.1. *SB-metoda řádu aspoň jedna je konvergentní pro každé klasické řešení úlohy* (2.1)–(2.2).

Věta 2.2. *Má-li řešení problému* (2.1)–(2.2) *celkem* $p+1$ *spojitých derivací v intervalu* $[0, T]$, *je řád konvergence SB-metody pro toto řešení roven číslu* p.

3. *A*-stabilita SB-metod

Pro snadnou konstrukci A-stabilních metod libovolně vysokého řádu je účelné zúžit třídu SB-metod na tzv. *SBK-metody*, což jsou SB-metody, pro něž je $\mu_i = i/k$ pro $i = 1, \dots, k$ a které jsou řádu aspoň k.

Pro SBK-metody platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} + d_i &= \frac{i}{k}, \quad i = 1, \dots, k, \\ \nu \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{j}{k}\Big)^{\nu-1} c_{ij} &= \Big(\frac{i}{k}\Big)^{\nu}, \quad \nu = 2, \dots, p, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

neboli položíme-li

$$M = \operatorname{diag}\Big(\frac{1}{k}, \dots, \frac{k}{k}\Big), \tag{3.1}$$

pak ekvivalentně dostaneme

$$\begin{cases} Ce + d = Me, \\ 2CMe = M^2 e, \\ \vdots \\ kCM^{k-1}e = M^k e. \end{cases} \tag{3.2}$$

Zatím nic nevíme o existenci SBK-metod. Obraťme se proto nejprve k řešení tohoto problému. To provedeme v následujícím lemmatu (v němž I značí jednotkovou matici řádu k).

Lemma 3.1. *Nechť t je libovolný k-dimenzionální vektor. Nechť matice C je řešením rovnice*

$$M^2 V = CMV(I + kM) + (0, \dots, 0, t), \tag{3.3}$$

kde V je Vandermondova matice pro čísla $1/k, \dots, k/k$, tj.

$$V = \big(e, Me, \dots, M^{k-1}e\big) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{k}\right)^0, & \left(\frac{1}{k}\right)^1, & \dots, & \left(\frac{1}{k}\right)^{k-1} \\ \left(\frac{2}{k}\right)^0, & \left(\frac{2}{k}\right)^1, & \dots, & \left(\frac{2}{k}\right)^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{k}{k}\right)^0, & \left(\frac{k}{k}\right)^1, & \dots, & \left(\frac{k}{k}\right)^{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

a d je vektor definovaný rovnicí

$$d = Me - Ce. \tag{3.5}$$

Pak SB-metoda daná maticí C a vektorem d je SBK-metoda.

Důkaz tohoto lemmatu je zcela elementární. Předně matice C je rovnicí (3.3) jednoznačně definována, protože matice $MV(I + kM)$ je zřejmě regulární. K dokončení důkazu je tedy třeba ověřit platnost rovnic (3.2). První rovnice v (3.2) je právě rovnice (3.5). Abychom verifikovali zbývající rovnice, stačí psát (3.3) ve tvaru

$$(M^2 e, M^3 e, \dots, M^{k+1} e) = \big(0, \dots, 0, t\big) + (2CMe, 3CM^2 e, \dots, (k+1)CM^k e\big). \tag{3.6}$$

Porovnáme-li prvních $(k-1)$ sloupců matice na levé straně rovnice (3.9) s prvními $(k-1)$ sloupci matice na pravé straně této rovnice, dostaneme posledních $(k-1)$ rovnic (3.2). $\square$

Množina SBK-metod tedy není prázdná. Zkoumejme nyní A-stabilitu těchto metod. Aplikujme proto danou SBK-metodu na skalární diferenciální rovnici (1.3). Dostaneme

$$(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{C}) \begin{pmatrix} u_{rk+1} \\ \vdots \\ u_{(r+1)k} \end{pmatrix} = u_{rk}(\boldsymbol{e} + z\boldsymbol{d}), \quad z = hA. \tag{3.7}$$

Protože matice $(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{C})^{-1}$ pro dostatečně malá h existuje, je možno rovnici (3.7) psát (pro dostatečně malá h) podle Cramerova pravidla ve tvaru

$$(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{C})^{-1} = \frac{1}{Q(z)} \begin{pmatrix} p_{11}(z), & \dots, & p_{1k}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1}(z), & \dots, & p_{kk}(z) \end{pmatrix},$$

kde

$$Q(z) = \det(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{C})$$

a $p_{ij}(z)$ jsou polynomy stupně nejvýše $k-1$. Polynom $p_{ij}(z)$ je totiž determinant matice, která vznikne z matice $(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{C})$ vypuštěním j-tého řádku a i-tého sloupce a který je opatřen znaménkem $(-1)^{i+j}$. Poslední složka vektoru řešení soustavy (3.7), která je rozhodující pro celkové chování metody, je tedy dána vzorcem

$$u_{r(k+1)} = \frac{P(z)}{Q(z)} u_{rk}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

kde

$$P(z) = \sum_{j=1}^{k} p_{kj}(z)(1 + d_j z). \tag{3.8.}$$

Stupeň polynomu P je přitom nejvýše k. Následující věta nyní už plyne bezprostředně z definice A-stability.

Věta 3.1. *Nutná a postačující podmínka pro A-stabilitu SBK-metody je platnost nerovnosti*

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| < 1$$

pro všechna komplexní z se zápornou reálnou částí.

Při konstrukci A-stabilních SBK-metod hraje určující roli následující lemma.

Lemma 3.2. *Nechť vektor $\boldsymbol{t}$ definuje SBK-metodu ve smyslu lemmatu* 3.1. *Nechť dále $a_0, \dots, a_k$ $(a_0 = 1)$ jsou koeficienty polynomu* $\det(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{C})$. *Pak platí*

$$\boldsymbol{MVN}\ (a_k, \dots, a_1)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{(k+1)!}\boldsymbol{t} - \frac{1}{(k+1)!}\boldsymbol{M}^{k+1}\boldsymbol{e}, \tag{3.9}$$

kde $\boldsymbol{M}$ je matice definovaná rovnicí (3.1), *$\boldsymbol{V}$ je matice definovaná rovnicí* (3.4) *a* $\boldsymbol{N} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1!}, \dots, \frac{1}{k!}\right)$.

Důkaz se opírá o Caleyovu-Hamiltonovu větu (každá matice je kořenem svého charakteristického polynomu). Je sice zase elementární, vyžaduje však přece jenom více počítání, a proto se odvoláme na [7]. □

Lemma 3.2 umožňuje konstruovat SBK-metodu, jejíž polynom $\det(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{C})$ je libovolný předem zadaný polynom:

Věta 3.2. *Nechť* $Q(z) = \sum_{i=0}^{k} a_i z^i$ *je libovolný polynom s* $a_0 = 1$. *Pak existuje SBK--metoda, pro niž platí* $\det(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{C}) = Q(z)$.

Důkaz. Položme $\boldsymbol{t} = (k+1)! \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k+1)!} \boldsymbol{M}^{i+1}\boldsymbol{e}$ a sestrojme SBK-metodu podle lemmatu 3.1. Koeficienty $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_k$ polynomu $\det(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{C})$ splňují soustavu typu (3.9), na jejíž pravé straně je vzhledem k volbě vektoru $\boldsymbol{t}$ vektor $\boldsymbol{MVN}(a_k, \dots, a_1)^{\mathrm{T}}$. Protože matice $\boldsymbol{MVN}$ je zřejmě regulární, platí $(\tilde{a}_k, \dots, \tilde{a}_1)^{\mathrm{T}} = (a_k, \dots, a_1)^{\mathrm{T}}$, což dokazuje větu. □

Věta 3.2 poskytuje široké možnosti konstrukce SBK-metod se speciálními vlastnostmi, a tedy i A-stabilních metod libovolně vysokého řádu. Jeden elementární postup, který užívá známých vlastností tzv. Padéových aproximací exponenciály, nyní popíšeme.

Připomeňme, že *Padéovou aproximací* exponenciály (viz např. Golub, van Loan [5] nebo Baker Jr., Graves-Morris [1]) rozumíme racionální funkci $F(z) = S(z)/T(z)$, kde S, resp. T je polynom stupně s, resp. t, pro niž platí $F(z) = \exp(z) + O(z^{t+s+1})$ při $z \to 0$. Takové aproximace existují pro libovolná přirozená t a s a koeficienty polynomů $S(z)$ a $T(z)$ jsou reálné. Pro naše další úvahy je důležité, že při $s = t = k$ platí $T(z) = S(-z)$ a polynom $S(z)$ má kořeny v levé polorovině komplexní roviny. Položíme-li $S(z) = \sum_{i=0}^{k} s_i z^i$, platí navíc

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i s_i}{(j-i)!} = s_j, \quad j = 0, \dots, k, \\ &\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i s_i}{(j-i)!} = 0, \quad j = k+1, \dots, 2k. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tyto elementární vlastnosti Padéových aproximací exponenciální funkce už nám dovolí dokázat hlavní větu o A-stabilních metodách.

Věta 3.3. *Ve třídě SB-metod existují A-stabilní metody libovolně vysokých řádů.*

Důkaz. Podle věty 3.2 sestrojme SBK-metodu, pro niž platí $Q(z) = S(-z)$; snadno zjistíme, že polynom $P(z)$ definovaný rovnicí (3.8) je polynom $S(z)$. Plyne to v podstatě z toho, že výraz $\exp(h) - P(h)/S(-h)$ je poslední složka vektoru lokální chyby zkoumané metody aplikované na diferenciální rovnici $u' = u$, a je tedy řádu $O(h^{k+1})$. Odtud odvodíme vyjádření koeficientů polynomu $P(z)$ pomocí koeficientů polynomu $S(-z)$ a užijeme vzorce (3.10). Racionální funkce $P(z)/Q(z)$, která rozhoduje o A-stabilitě uvažované metody, je tedy rovna funkci $S(z)/S(-z)$. Je to funkce holomorfní v levé polorovině komplexní roviny, protože kořeny polynomu $S(-z)$ leží v pravé polorovině. Protože koeficienty polynomu $S(z)$ jsou reálné, platí $S(-\mathrm{i}y) = \overline{S(\mathrm{i}y)}$ pro reálná y. Platí tedy $|S(\mathrm{i}y)|/|\overline{S(\mathrm{i}y)}| = 1$ pro každé reálné y. Princip maxima modulu holomorfní funkce nyní dává požadovanou nerovnost

$$\left| \frac{S(z)}{S(-z)} \right| < 1 \quad \text{pro} \quad \operatorname{Re} z < 0. \quad \square$$

Ve třídě SB-metod jsme tedy nalezli elementární aparát pro konstrukci A-stabilních metod libovolně vysokého řádu. Ilustrujme závěrem užitečnost metod tohoto typu na jednoduchém příkladě.

Řešme jednodimenzionální rovnici pro vedení tepla

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) &= g(x), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \end{aligned}$$

metodou přímek (tj. tak, že provedeme diskretizaci pouze prostorové proměnné). Dostaneme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$u_h' = A_h u_h, \tag{3.11}$$

kde m je počet dílků, na který rozdělíme interval $[0,1]$, $h = 1/m$, A_h je konstantní třídiagonální matice řádu $(m-1)$ a u_h je $(m-1)$-dimenzionální vektor, jehož složky jsou hodnoty přibližného řešení na přímkách $x = x_k = kh$. Vlastní čísla matice A_h jsou dána vzorci

$$\lambda_\nu = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\nu\pi}{2m}, \quad \nu = 1, \ldots, m-1.$$

S-poměr soustavy (3.11) je tedy roven číslu

$$\frac{\sin^2\left(\frac{m-1}{m}\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{m}\frac{\pi}{2}\right)},$$

které roste nade všechny meze pro $m \to \infty$. Užijeme-li k řešení této soustavy ne dosti promyšlenou metodu, nemůžeme očekávat víc, než že dostaneme jen relativně stabilní diferenční schéma.

L i t e r a t u r a

[1] Baker, G. A. Jr., Graves-Morris, P.: *Padé Approximations.* Cambridge University Press, New York 1996.

[2] Butcher, J. C.: *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods.* John Wiley & Sons, Chichester 1987.

[3] Butcher, J. C., Jackiewicz, Z.: *Construction of high order diagonally implicit multistage integration methods for ordinary differential equations.* Applied Numerical Mathematics *21* (1996), 385–415.

[4] Dahlquist, G.: *A special stability problem for linear multistep methods.* BIT *3* (1953), 27–43.

[5] Golub, H. G., van Loan, Ch. F.: *Matrix Computations.* John Hopkins University Press, Baltimore 1989.

[6] Lambert, J. D.: *Numerical methods for ordinary differential systems.* John Wiley & Sons, London 1991.

[7] Práger, M., Taufer, J., Vitásek, E.: *Overimplicit multistep methods.* Apl. Mat. *18* (1973), 399–421.