Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

David Eric Edmunds; Jan Lang

Zobecněné trigonometrické funkce z různých úhlů pohledu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 54 (2009), No. 3, 212–224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141908

Zobecněné trigonometrické funkce z různých úhlů pohledu

David Edmunds, Brighton, Jan Lang, Columbus

V tomto přehledu se zaměříme na jednu z definic zobecněných trigonometrických funkcí, kterou budeme zkoumat z různých úhlů pohledu a ukážeme její roli v rozdílných oblastech matematiky. Začneme z pohledu analýzy, pro každé $p \in (1, \infty)$ definujeme funkci $\sin_p^{-1}$ prostřednictvím integrální formule, která je zobecněním známé integrální reprezentace funkce arcsin, a poté s její pomocí zadefinujeme zobecněné funkce sinus, kosinus a tangens (značené $\sin_p$, $\cos_p$ a tg_p) a ukážeme jejich základní vlastnosti (Pythagorova identita atd.). V další části prostřednictvím jednotkové kružnice v rovině s ℓ_p-normou definujeme zobecněné trigonometrické funkce podobným postupem jako v případě roviny s klasickou ℓ_2-normou a dokážeme, že tyto funkce se shodují s funkcemi definovanými v první kapitole. V třetí kapitole uvažujeme integrální operátor $T : L^p(I) \to L^p(I)$, definovaný předpisem $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ na $I = (0, 1)$, a soustředíme se na problém nalezení extremálních funkcí (tj. funkcí z jednotkové sféry v prostoru $L^p(I)$, na kterých se nabývá norma operátoru T). Ukážeme, že extremální funkce jsou vyjádřitelné prostřednictvím zobecněných trigonometrických funkcí. V následující části budeme studovat Dirichletův problém pro vlastní čísla p-laplacianu na omezeném intervalu. Zde všechny vlastní funkce jsou vyjádřitelné pomocí funkcí $\sin_p(nx)$, které splývají s klasickými řešeními, když $p = 2$. Po ukázce souvislosti s aproximační teorií uzavřeme článek přehledem alternativních definic zobecněných trigonometrických funkcí, které se vyskytují v literatuře.

Uvidíme, že všechny definice zobecněných trigonometrických funkcí, které lze najít v literatuře (viz [8], [9]), si zachovávají jen některé vlastnosti klasických trigonometrických funkcí a že žádná definice zobecněných trigonometrických funkcí není schopna zachovat všechny vlastnosti známé z klasických trigonometrických funkcí. Záleží jen na potřebách aplikací, která definice bude vhodnější.

1. Analytický úhel pohledu

Z přednášek integrálního počtu dobře víme, že

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \pi/2 \tag{1}$$

Prof. David Edmunds, Department of Mathematics, University of Sussex, Brighton BNI 9RF, Velká Británie, e-mail: `d.e.edmunds@sussex.ac.uk`

Mgr. Jan Lang, Dr., Department of Mathematics, The Ohio State University, 231 West 18th Avenue, Columbus, OH 43210-1174, USA, email: `lang@math.ohio-state.edu`. Rukopis vznikl během pobytu druhého autora na Complutense University, Madrid.

a že

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t, \qquad 0 \leqq x \leqq 1, \tag{2}$$

nám definuje diferencovatelnou funkci na $[0,1]$. Protože podíl $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ je kladný na $(0,1)$, funkce S je rostoucí a prostá z $[0,1]$ do $[0,\pi/2]$. Tato funkce je označena $\arcsin(x)$ a jejím prostřednictvím lze definovat funkci sin na intervalu $[0,\pi/2]$ a standardním způsobem ji lze rozšířit na funkci sin na intervalu $(-\infty,\infty)$.

Tento postup lze snadno zobecnit. Pro $1 < p < \infty$ definujme diferencovatelnou funkci $F_p : [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F_p(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt[p]{1-t^p}}\,\mathrm{d}t, \qquad 0 \leqq x \leqq 1. \tag{3}$$

Vzhledem k tomu, že F_p je monotónně rostoucí, je i prostou funkcí zobrazující interval $[0,1]$ na $[0,\pi_p/2]$, kde

$$\pi_p = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[p]{1-t^p}}\,\mathrm{d}t, \qquad 0 \leqq x \leqq 1. \tag{4}$$

Inverzní funkci k funkci F_p na $[0,\pi_p/2]$ označíme $\sin_p$ a rozšíříme jako v případě sin (tj. $p=2$) na $[0,\pi_p]$ definováním

$$\sin_p x = \sin_p(\pi_p - x), \qquad x \in [\pi_p/2, \pi_p];$$

k dalšímu rozšíření použijeme lichost a $2\pi_p$-periodičnost. Tímto postupem obdržíme diferencovatelnou funkci definovanou na $\mathbb{R}$, která se shoduje s funkcí sin, když $p = 2$.

Funkci $\cos_p$ definujeme následujícím způsobem:

$$\cos_p x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin_p x,\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Zřejmě $\cos_p$ je sudá, $2\pi_p$-periodická a lichá vzhledem k π_p; a $\cos_2 = \cos$.

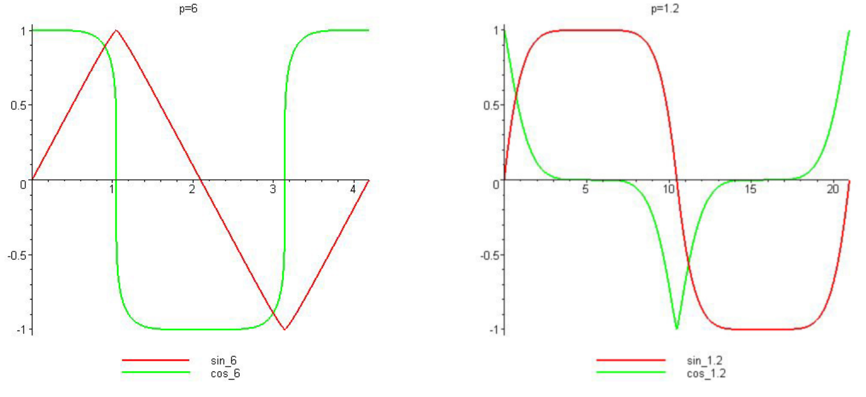
Nechť $x \in [0,\pi_p/2]$. Pak z definice plyne, že

$$\cos_p x = (1 - (\sin_p x)^p)^{1/p}. \tag{6}$$

Navíc ze symetričnosti a periodicity máme

$$|\sin_p x|^p + |\cos_p x|^p = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Obr. 1 níže ukazuje grafy funkcí $\sin_p$ a $\cos_p$ pro $p = 1.2$ a 6.



Obr. 1: $\sin_6, \cos_6$ $\qquad$ $\sin_{1.2}, \cos_{1.2}$

Z (4) plyne, že

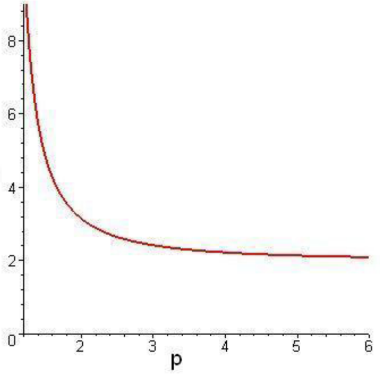
$$\frac{\pi_p}{2} = p^{-1} \int_0^1 (1-s^p)^{-1/p}\, s^{1/p-1}\, \mathrm{d}s = p^{-1}\, B(1-1/p,\, 1/p) = p^{-1}\, \Gamma(1-1/p)\, \Gamma(1/p),$$

kde B je beta funkce, Γ je gamma funkce a

$$\pi_p = \frac{2\pi}{p \sin(\pi/p)}. \tag{8}$$

Zřejmě $\pi_2 = \pi$ a

$$p\pi_p = 2\Gamma(1/p')\Gamma(1/p) = p'\pi_{p'}, \qquad \text{kde } p' = p/(p-1). \tag{9}$$



Obr. 2: $y = \pi_p$

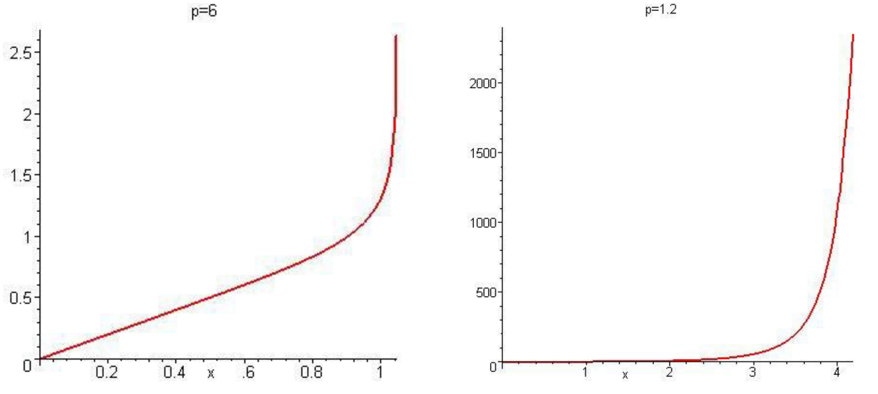
S pomocí (8) a (9) lze ukázat, že π_p je klesající, pokud p je rostoucí, a navíc

$$\lim_{p\to 1} \pi_p = \infty, \qquad \lim_{p\to\infty} \pi_p = 2, \qquad \lim_{p\to 1}(p-1)\pi_p = \lim_{p\to 1} \pi_{p'} = 2. \tag{10}$$

Spojitost mezi π_p a p je ukázána na obr. 2.

Zobecněnou funkci tangens definujeme stejně jako v klasickém případě:

$$\mathrm{tg}_p\, x = \frac{\sin_p x}{\cos_p x}. \tag{11}$$



Obr. 3: $y = \mathrm{tg}_6(x), \quad x \in [0, \pi_6/2)$ $\qquad$ $y = \mathrm{tg}_{1.2}(x), \quad x \in [0, \pi_{1.2}/2)$

Obr. 3 ukazuje chování tg_p, když $p = 1.2$ a 6.

Vidíme, že funkce $\mathrm{tg}_p\, x$ je dobře definovaná pro všechny $x \in \mathbb{R}$ vyjma body $(k + \frac{1}{2})\pi_p$ ($k \in \mathbb{Z}$); je lichá, π_p-periodická a $\mathrm{tg}_p\, 0 = 0$. Užitím (7) lze ukázat, že na intervalu $(-\pi_p/2, \pi_p/2)$ funkce tg_p má derivaci $1 + |\mathrm{tg}_p\, x|^p$. Z toho plyne, že:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{tg}_p^{-1}\, x) = \frac{1}{1 + |x|^p}$$

a na $(-\pi_p/2, \pi_p/2)$ máme

$$\mathrm{tg}_p^{-1}\, x = \int_0^x \frac{1}{1 + |t|^p}\, \mathrm{d}t.$$

Zjevně tedy $\mathrm{tg}_2^{-1}\, x = \mathrm{arctg}\, x$.

2. Geometrický úhel pohledu

Tuto kapitolu začneme připomenutím konstrukce funkcí sin a cos prostřednictvím jednotkové kružnice v rovině $\mathbb{R}^2$ vybavené obvyklou ℓ_2 metrikou, a poté tento postup zobecníme pro rovinu $\mathbb{R}^2$ s ℓ_p metrikou.

Nechť $r > 0$ a $S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = r^2\}$ je kružnice v rovině $\mathbb{R}^2$ s ℓ_2 metrikou.

Každý bod v $\mathbb{R}^2$ může být popsán v pravoúhlých souřadnicích (x, y) nebo v polárních souřadnicích (r, φ). Závislost mezi těmito různými souřadnicovými systémy je popsána pomocí funkcí $\sin, \cos$ a tg.

Vztahy mezi polárními a kartézskými souřadnicemi jsou dány

$$x = r\cos\varphi, \tag{12}$$

$$y = r\sin\varphi. \tag{13}$$

a φ je provázáno s x a y prostřednictvím funkce tangens:

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}(y/x),\ \ x, y > 0.$$

Z ℓ_2-metriky plyne

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

V případě $p \neq 2$ analogií kruhu je $p-$kružnice $S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x|^p + |y|^p = r^p\}$ a je přirozené požadovat následující identity:

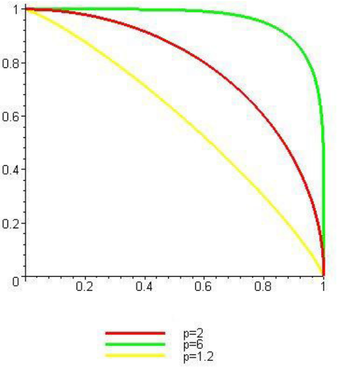
$$x = r\cos_p\varphi, \tag{14}$$

$$y = r\sin_p\varphi. \tag{15}$$

Z ℓ_p geometrie plyne, že Pythagorova identita bude mít následující tvar:

$$|\sin_p\varphi|^p + |\cos_p\varphi|^p = 1,$$

a tedy $\cos_p \varphi = (1 - (\sin_p \varphi)^p)^{1/p}$, když $x, y > 0$.



Obr. 4: Prvni kvadrant sféry S_1 pro $p = 2, 6, 1.2$.

Obr. 4 ukazuje změnu tvaru S_1 v závislosti na změně p. Když $p \neq 2$, pak p-kružnice S_r není symetrická vzhledem k rotaci, a tedy obvyklý vztah mezi délkou oblouku kruhové výseče na S_r a velikostí jejího vnitřního úhlu, který známe z ℓ_2 metriky, neplatí. Místo toho budeme požadovat celkem přirozenou následující podmínku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \sin_p \varphi = \cos_p \varphi,$$

a

$$\varphi = 0, \quad (x, y) = (1, 0),$$

a navíc předpokládejme, že φ roste, když (x, y) se pohybuje po S_r v kladném směru.

Pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin_p^{-1} t = \frac{1}{\cos_p(\sin_p^{-1} t)} = \frac{1}{1 - t^p}, \quad 0 \leqq t < 1,$$

z čehož plyne, že funkce $\sin_p$ a $\cos_p$ jsou shodné s funkcemi definovanými v předešlé kapitole.

Funkci tg_p definujeme stejně jako v kapitole 1,

$$\mathrm{tg}_p \varphi := \frac{\sin_p \varphi}{\cos_p \varphi},$$

a tedy jako v případě $p = 2$ máme

$$\varphi = \mathrm{tg}_p^{-1}(y/x), \ x, y > 0.$$

3. Integrální operátor a zobecněné trigonometrické funkce

V této kapitole se zaměříme na jeden z nejjednodušších možných integrálních operátorů. Na intervalu $I = [0, 1]$ definujeme operátor T,

$$Tf(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Pokud uvažujeme T jako zobrazení z $L_2(0,1)$ do $L_2(0,1)$, pak je zřejmé, že T je kompaktní a v $L_2(0,1)$ existuje funkce, na níž se nabývá norma T. V tomto případě se lehce ukáže, že $\|T\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} = 2/\pi$ a že norma se nabývá pro funkci

$$f(t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

přičemž

$$Tf(t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Když $p \neq 2$, pak jako v předchozím případě T je kompaktní zobrazení z $L_p(0,1)$ do $L_p(0,1)$, a tedy existuje funkce, na které se nabývá norma zobrazení T. V [7] bylo dokázáno

$$\|T\|_{L_p(0,1)\to L_p(0,1)} = \frac{(p'+p)^{1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}}\,(p')^{1/p}\,p^{1/p'}}{B(\frac{1}{p'},\frac{1}{p})}$$

a že norma se nabývá pro funkci

$$f(t) = \frac{\pi_p}{2}\cos_p\left(\frac{\pi_p x}{2}\right)$$

a že

$$Tf(t) = \sin_p\left(\frac{\pi_p x}{2}\right).$$

Tímto tedy opět získáme zobecněné trigonometrické funkce.

4. Vlastní funkce pro p-laplacian

Uvažujme klasický Dirichletův problém na $(0,1)$:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{na } (0,1),\\ &u(0)=0, \quad u(1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Je dobře známo, že všechna vlastní čísla mají tvar:

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

s odpovídajícími vlastními funkcemi

$$u_n(t) = \sin(n\pi t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Připomeňme si definici p-laplacianu, která je přirozeným zobecněním Laplaceova operátoru:

$$\Delta_p u = (|u'|^{p-2}u')'.$$

Zjevně $\Delta_2 u = \Delta u$. Pak analogií problému (17) je následující úloha:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_p u + \lambda|u|^{p-2}u = 0 \quad \text{na } (0,1),\\ u(0)=0, u(1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

V [5] bylo ukázáno, že všechna vlastní čísla pro tento problém mají tvar

$$\lambda_n = (n\pi_p)^p \frac{p}{p'}$$

s odpovídajícími vlastními funkcemi

$$u_n(t) = \sin_p(n\pi_p t).$$

Opět jsme u tohoto problému svědky výskytu zobecněných trigonometrických funkcí z kapitoly 1.

Poznamenejme, že literatura o p-laplacianu a operátorech jemu blízkých je rozsáhlá. Zmíníme se pouze o několika pracích, které jsme v předchozím necitovali a které se vztahují k zaměření tohoto článku. Předně jsou to zajímavý přehledový článek [12] a kniha [6], dále [2], kde je elegantně vytvořena Sturmova-Liouvilleova teorie pro jednorozměrný p-laplacian, a klasické články [4], [14].

5. Aproximační teorie a zobecněné trigonometrické funkce

Nechť $1 < p < \infty$ a $-\infty < a < b < \infty$. Uvažujme Sobolevovo vnoření na $I = (a, b)$,

$$E : W_0^{1,p}(I) \to L^p(I), \tag{19}$$

kde $W_0^{1,p}(I)$ je Sobolevův prostor funkcí na intervalu I s nulovou stopou (více v [13]) a normou

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(I)} := \left(\int_0^1 |u'(t)|^p \,\mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

Je dobře známo, že (19) je kompaktní zobrazení a podrobné informace o kompaktnosti Sobolevova vnoření, které je jedním z nejdůležitějších vnoření v analýze, hrají důležitou roli v rozličných oblastech matematiky. Vlastnosti kompaktních zobrazení mohou být popsány pomocí Kolmogorovových, Bernsteinových, Geľfandových či aproximačních čísel.

Připomeňme zde definice těchto čísel:

Definice 5.1. Nechť $T : X \to Y$ je omezený operátor, kde X a Y jsou Banachovy prostory, a nechť $n \in \mathbb{N}$.

(i) Kolmogorovovo n-té číslo $d_n(T)$ je definováno jako

$$d_n(T) = d_n(T(X), Y) = \inf_{X_n} \sup_{\|x\|_X \leqq 1} \inf_{y \in X_n} \|Tx - y\|_Y,$$

kde infimum je vzato ze všech n-rozměrných podprostorů X_n v X.

(ii) Geľfandovo n-té číslo $d^n(T)$ je definováno jako

$$d^n(T) = d^n(T(X), Y) = \inf_{L^n} \sup_{\|x\|_X \leqq 1, x \in L^n} \|Tx\|_Y,$$

kde infimum je vzato ze všech podprostorů L_n s kodimenzí n v prostoru X.

(iii) Bernsteinovo n-té číslo $b_n(T)$ je definováno jako

$$b_n(T) = b_n(T(X), Y) = \sup_{X_{n+1}} \inf_{Tx\in X_{n+1}, Tx\neq 0} \|Tx\|_Y / \|x\|_X,$$

kde X_{n+1} je podprostor $\operatorname{span}\{Tx : x \in X\}$ s dimenzí $\geqq n+1$.

(iv) Aproximační číslo $a_n(T)$ je definováno

$$a_n(T) = \inf \|T - F\|_{X\to Y},$$

kde infimum se bere ze všech omezených lineárních zobrazení $F : X \to Y$ s hodností F menší než n.

V našem případě máme $X = W_0^{1,p}(I)$ a $Y = L^p(I)$. Vzhledem k tomu, že $L^p(I)$ má aproximační vlastnost, když $1 < p < \infty$, pak E je kompaktní tehdy a jen tehdy, když $\lim_{m\to\infty} a_m(E) = 0$.

Definujme $I_0 = \left[a, a + \frac{|I|}{2n}\right]$, $I_n = \left[b - \frac{1}{2}\frac{|I|}{n}, b\right]$ a $I_i = \left[a + (i - \frac{1}{2})\frac{|I|}{n}, a + (i + \frac{1}{2})\frac{|I|}{n}\right]$ pro $1 < i < n$. Intervaly $\{I_i\}_{i=0}^n$ pokrývají I a jejich prostřednictvím jsou definovány následující zobrazení

$$R_n f = \sum_{i=1}^{n-1} P_i f,$$

kde

$$P_i f(x) = \chi_{I_i}(x) f\left(a + i\frac{|I|}{n}\right)$$

a χ_{I_i} označuje charakteristickou funkci množiny I_i. Je zřejmé, že R_n je zobrazení z $W_0^{1,p}(I)$ do $L^p(I)$ s hodnosti $n-1$.

Následující tvrzení bylo dokázáno v [3].

Věta. *Nechť* $1 < p < \infty$. *Pak*

$$s_n(E) = \frac{|I|}{n\pi_p} \cdot \left(\frac{p'}{p}\right)^{1/p}$$

a

$$s_n(E) = \|(E - R_n)g\|_{L^p(I)},$$

kde

$$g(x) = \sin_p\left(\frac{x-a}{\pi_p}\frac{|I|}{n}\right)$$

a $s_n(E)$ *značí libovolnou z hodnot* $a_n(E), d_n(E), d^n(E)$ *či* $b_n(E)$.

Předchozí věta nám dává informace o obraze jednotkové koule z $W_0^{1,p}(I)$ v prostoru $L^p(I)$ a plyne z ní, že největší prvek v $BW_0^{1,p}(I) := \{f;\ \|f\|_{W_0^{1,p}(I)} \leqq 1\}$ vzhledem k normě $L^p(I)$ je

$$f_1(x) := \frac{\sin_p\left(\frac{x-a}{\pi_p}|I|\right)}{\|\sin_p\left(\frac{x-a}{\pi_p}|I|\right)\|_{W_0^{1,p}(I)}}.$$

Aproximujeme-li $BW_0^{1,p}(I)$ pomocí jednorozměrného podprostoru v $L^p(I)$, nejvzdálenější prvek od optimální jednorozměrné aproximace je

$$f_2(x) := \frac{\sin_p\left(\frac{x-a}{\pi_p} \cdot \frac{|I|}{2}\right)}{\|\sin_p\left(\frac{x-a}{\pi_p}\frac{|I|}{2}\right)\|_{W_0^{1,p}(I)}}.$$

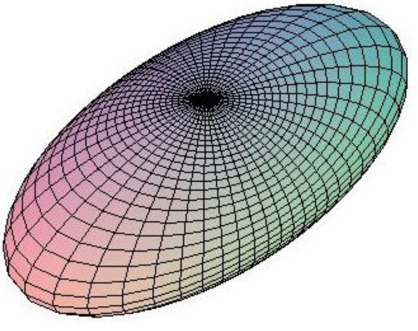
Obecněji, pokud aproximujeme $BW_0^{1,p}(I)$ pomocí n-rozměrného podprostoru v $L^p(I)$, pak nejvzdálenější prvek od optimální n-rozměrné aproximace je

$$f_n(x) := \frac{\sin_p\left(\frac{x-a}{\pi_p} \cdot \frac{|I|}{n}\right)}{\|\sin_p\left(\frac{x-a}{\pi_p}\frac{|I|}{n}\right)\|_{W_0^{1,p}(I)}}$$

a z předešlé věty máme $\|f_i\|_{L^p(I)} = s_n(E)$.

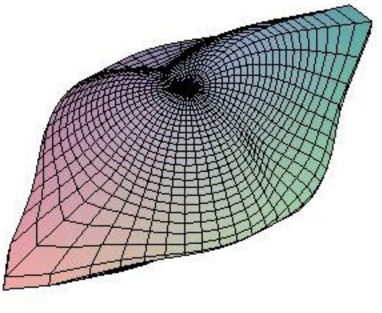
Níže uvádíme grafy, které zobrazují projekci $BW_0^{1,p}(I)$ na lineární podprostor $\operatorname{span}\{f_1, f_2, f_3\}$ v prostoru $L^p(I)$.

V případě $p = 2$ získáme elipsoid (kde osy x, y, z odpovídají funkcím f_1, f_2, f_3) a lze vidět, že funkce f_i zde hrají roli poloos elipsoidu.

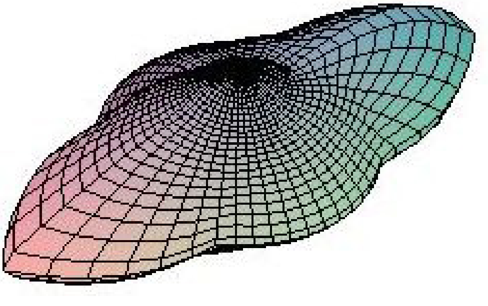


Obr. 5: $p = 2$

Pro $p = 10$ a $p = 1.1$ obdržíme následující grafy:



Obr. 6: $p = 10$



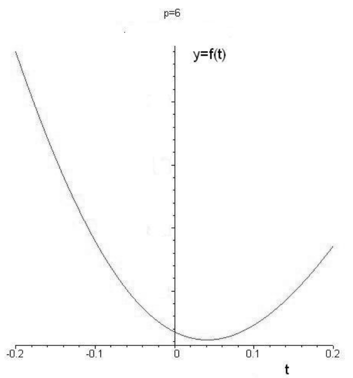
$p = 1.1$

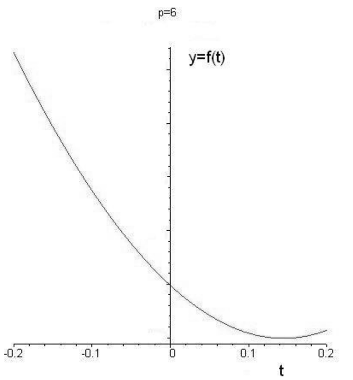
Všimněme si, že hlavní rozdíl mezi obr. 5 a obr. 6 je v nekonvexitě grafů na obr. 6. To naznačuje, že funkce f_1, f_2, f_3 nejsou ortogonální ve smyslu Jamesovy ortogonality.

Připomeňme definici této ortogonality. Pokud a, b jsou prvky z Banachova prostoru X, řekneme, že a je ortogonální vzhledem k b v Jamesově smyslu, pokud platí $\|a\|_X \leqq \|a + \lambda b\|_X$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$. Poznamenejme, že Jamesova ortogonalita není obecně reflexivní. V literatuře se někdy označuje jako Birkhoffova ortogonalita.

Obr. 7 ukazuje, že pro $p = 6$ (podobné grafy lze získat pro ostatní $p \neq 2$) funkce f_1 není ortogonální k f_3 a také že f_3 není ortogonální k f_1 v Jamesově smyslu.

Poznamenejme, že i když funkce f_n nejsou v Jamesově smyslu ortogonální, tak pro dostatečně velké $p > 1$ tvoří bázi v L_p prostoru (viz [1]).





Obr. 7: $f(t) = \|f_1 + tf_3\|_p$ $\qquad$ $f(t) = \|f_3 + tf_1\|_p$

6. Další definice zobecněných trigonometrických funkcí

Definice zobecněných trigonometrických funkcí zvažovaná v předchozím textu je jen jednou z mnoha, jež můžeme najít v literatuře, která je velmi rozsáhlá a sahá až k Lundbergově práci z roku 1879 (viz [11]): detaily různých definic a přístupů lze najít v pracích Lindqvista [10], Lindqvista a Peetreho [8]; viz také [9]. V [11] můžeme najít elegantní historický přehled. Dále ukážeme některé z těchto alternativních definicí. Začneme definicí zavedenou a studovanou v [8] a [9].

Nechť $p \in (1, \infty)$ a mějme

$$\widetilde{\pi_p} = p \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1 - t^p)^{(p-1)/p}}.$$

Na intervalu $(0, \widetilde{\pi_p}/p)$ definujeme funkce S_p, C_p a T_p následovně:

$$x = \int_0^{S_p(x)} \frac{\mathrm{d}t}{(1 - t^p)^{(p-1)/p}}, \quad x = \int_{C_p(x)}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1 - t^p)^{(p-1)/p}}, \quad x = \int_0^{T_p(x)} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^p)^{2/p}}$$

a rozšíříme je na $\mathbb{R}$, stejně jako bylo provedeno v kapitole 1. Poznamenejme, že $\widetilde{\pi_p} = p\, S_p^{-1}(1) = p\, C_p^{-1}(0)$. Pak na intervalu $(0, \widetilde{\pi_p}/p)$ platí:

$$S_p(x)^p + C_p(x)^p = 1, \quad T_p(x) = \frac{S_p(x)}{C_p(x)},$$

$$S_p'(x) = C(x)^{p-1}, \quad C_p'(x) = -S(x)^{p-1},$$

$$S_p\left(\frac{\widetilde{\pi_p}}{p} - x\right) = C_p(x), \tag{20}$$

$$S_p\left(\frac{\widetilde{\pi_p}}{2p}\right) = \frac{1}{\sqrt[p]{2}} = C_p\left(\frac{\widetilde{\pi_p}}{2p}\right). \tag{21}$$

V případě $p = 2$, pak zjevně $S_2(x) = \sin x,\ C_2(x) = \cos x,\ T_2(x) = \operatorname{tg} x$.

Další možnost definování zobecněných trigonometrických funkcí je popsána v [10] (viz také dřívější článek [15]). Definujme

$$\hat{\pi}_p = \frac{2\sqrt[p]{p-1}}{p \sin\frac{\pi}{p}}\pi.$$

Na $(0, \hat{\pi}_p/2)$ zavedeme funkce $\hat{S}_p(x), \hat{C}_p(x)$, a $\hat{T}_p(x)$ pomocí rovností:

$$x = \int_0^{\hat{S}_p(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[p]{1 - \frac{t^p}{p-1}}}, \qquad x = \int_{\hat{C}_p(x)}^{\sqrt[p]{p-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[p]{1 - \frac{t^p}{p-1}}},$$

$$x = \int_0^{\hat{T}_p(x)} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \frac{t^p}{p-1}}$$

a poté je rozšíříme na $\mathbb{R}$ stejně jako v kapitole 1. Připomeňme, že

$$\sqrt[p]{p-1} = \hat{S}_p(\frac{\hat{\pi}_p}{2}) = \hat{C}_p(0).$$

Pro $p = 2$ pak okamžitě dostáváme $\hat{S}_2(x) = \sin x, \hat{C}_2(x) = \cos x,\ \hat{T}_2(x) = \operatorname{tg} x$.
A na $(0, \hat{\pi}_p/2)$ platí

$$\frac{(\hat{C}_{p'}(x))^{p'}}{p'-1} + \frac{(\hat{S}_p(x))^p}{p-1} = 1$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\hat{S}_p(x)}{\mathrm{d}x} = (p-1)^{1/p}(\hat{C}_{p'}(x))^{p'-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{C}_p(x)}{\mathrm{d}x} = -(p-1)^{1/p}(\hat{S}_{p'}(x))^{p'-1}$$

$$\hat{S}_p(x) = \hat{C}_p\left(\frac{\hat{\pi}}{2} - x\right), \quad \hat{C}_p(x) = \hat{S}_p\left(\frac{\hat{\pi}}{2} - x\right),$$

zatímco pro $\hat{T}_p$ máme

$$\hat{T}_p(x) = \frac{\hat{S}_p(x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\hat{S}_p(x))} = \frac{\hat{S}_p(x)}{(p-1)^{1/p}(\hat{C}_{p'})^{p'-1}},$$

a také

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\hat{T}_p(x)\right) = 1 + \frac{(\hat{T}_p(x))^p}{p-1}.$$

Je důležité si povšimnout, že bez ohledu na to, kterou definici použijeme, dobré vlastnosti budou vždy doprovázeny vlastnostmi méně elegantními. Například definice použitá v předešlých kapitolách nám dává elegantní Pythagorovu identitu (7) a je úzce svázaná s Dirichletovým problémem pro p-laplacian, ale derivace funkce $\cos_p$ je popsána prostřednictvím poněkud komplikované formule a navíc $\pi_p \to \infty$, když $p \to 1$. První definice z této kapitoly vede k Pythagorově identitě a k identitě (20), ale derivace funkce S_p je vyjádřitelná pouze pomocí mocniny funkce C_p. A pro poslední definici v této kapitole platí, že $\hat{\pi}_p$ je sice omezené pro p z intervalu $(1, \infty)$, ale Pythagorova identita není elegantní a derivace funkcí $\hat{S}_p$ a $\hat{C}_p$ jsou vyjádřeny ve formě, která má daleko k jakékoliv formě elegance.

Je tedy zřejmé, že rozhodnutí o tom, která definice zobecněných trigonometrických funkcí je nejlepší, závisí na tom, které vlastnosti trigonometrických funkcí jsou potřebné pro aplikace, ve kterých je hodláme použít.

Literatura

[1] Binding, P., Boulton, L., Čepička, J., Drábek, P., Girg, P.: *Basis properties of eigenfunctions of the p-Laplacian.* Proc. Amer. Math. Soc. *134* (2006), no. 12, 3487–3494.

[2] Binding, P., Drábek, P.: *Sturm-Liouville theory for the p-Laplacian.* Studia Sci. Math. Hungar. *40* (2003), 375–396.

[3] Edmunds, D. E., Lang, J.: *Behaviour of the approximation numbers of a Sobolev embedding in the one-dimensional case.* J. Funct. Anal. *206* (2004), no. 1, 149–166.

[4] Elbert, Á.: *A half-linear second order differential equation, in Qualitative theory of differential equations.* Vol. I, II (Szeged, 1979), 153–180, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 30, North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.

[5] Drábek, P., Manásevich, R.: *On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with p-Laplacian.* Differential Integral Equations *12* (1999), no. 6, 773–788.

[6] Drábek, P., Kufner, A., Nicolosi, F.: *Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities.* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1997.

[7] Levin, V. I.: *On a class of integral inequalities.* Recueil Mathématiques *4* (46) (1938), 309–331.

[8] Lindqvist, P., Peetre, J.: *p-Arclength of the q-Circle.* Preprints in Mathematical Sciences 2000:21, Lund University.

[9] Lindqvist, P., Peetre, J.: *Generalized trigonometric functions (Solution to problem 10744).* Amer. Math. Monthly *108* (2001), no. 5, 473–474.

[10] Lindqvist, P.: *Some remarkable sine and cosine functions.* Ricerche Mat. *44* (1995), no. 2, 269–290 (1996).

[11] Lindqvist, P., Peetre, J.: *Comments on Erik Lundberg's 1879 thesis, especially on the work of Göran Dillner and his influence on Lundberg.* Mem. dell'Istituto Lombardo, Accad. Sci. e Lett., Classe Sci. Mat. Nat. XXXI, Fasc. 1, Milano 2004.
[12] Lindqvist, P.: *Notes on the p-Laplace equation.* Report, Univ. of Jyväskylä, Dept. Math. and Statistics, 102, Jyväskylä 2006, pp. ii+80.
[13] Nečas, J., John, O.: *Partial Differential Equations of Mathematical Physics.* (In Czech), SPN, Praha, 1972.
[14] Otani, M.: *A remark on certain nonlinear elliptic equations.* Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. *19* (1984), 23–28.
[15] Peetre, J.: *The differential equation* $y'^p - y^p = \pm 1$ $(p > 0)$. University of Stockholm, Department of Mathematics, Report no. 12, 1992.
[16] Schmidt, E.: *Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potentz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet.* Math. Ann. *117* (1940), 301–326.

DML-CZ – současnost a budoucnost

Oldřich Ulrych a Jiří Veselý, Praha

Na konci tohoto roku skončí pětiletý projekt digitalizace české matematické literatury DML-CZ (viz základní informace v [10]). Představuje další vývojovou fázi v oblasti archivace, prezentace a okamžité dostupnosti publikací z oboru matematika. Je všeobecně známo, že se vývoj v této oblasti po staletí stále zrychluje. K ilustraci si stačí připomenout několik vybraných letopočtů: Jedna z nejrozšířenějších matematických knih, Eukleidova *Elementa* (*Stoicheia*) ze 4. stol. př. n. l., která ovlivňuje vývoj matematiky dodnes, vyšla tiskem poprvé r. 1506. Vůbec první tištěnou matematickou knihou byla patrně *Treviso Arithmetic* z r. 1478 a prvním odborným časopisem, který zveřejňoval i matematické práce, byl *Journal des sçavans*, založený r. 1665. Téhož roku začaly vycházet i *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* Patrně nejstarší dosud existující čistě matematický časopis *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelles Journal*) začal vycházet r. 1826.

Pozoruhodná je vzrůstající rychlost, se kterou matematické poznatky přibývají. Již kolem r. 1850 vycházelo přibližně 1000 matematických vědeckých článků ročně a o 100 let později jich bylo ročně již zhruba šestkrát víc. Přitom matematické poznatky

RNDr. Oldřich Ulrych a doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `ulrych@karlin.mff.cuni.cz`, `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`

Podporováno projektem 1ET200190513 *DML-CZ: Česká digitální matematická knihovna* v rámci programu „Informační společnost" Akademie věd ČR (Národní program výzkumu, 2005–2009).