Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Libor Koudela

První rektifikace algebraických křivek

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 2, 139–147

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141949`

První rektifikace algebraických křivek

Libor Koudela, Pardubice

Úvod

Mezi úlohy, které v matematice 17. století hrály významnou roli a jejichž řešení přispělo k formulování infinitezimálního počtu, patří nalezení obsahu obrazce s křivočarými hranicemi (problém kvadratury, tedy sestrojení čtverce či obdélníku stejného obsahu jako má daný obrazec) a nalezení délky oblouku křivky (problém rektifikace – doslova *narovnání*, sestrojení úsečky stejné délky, jako má daný oblouk). Zatímco problém kvadratury byl v dílčích případech úspěšně vyřešen již ve starověku, o proveditelnosti rektifikace se ještě kolem poloviny 17. století pochybovalo. René Descartes ve své *Geometrii*, vydané poprvé roku 1637, píše: „…poměr mezi přímými a zakřivenými liniemi není znám a já věřím, že nemůže být člověkem poznán“ [4, s. 412].

Descartův výrok, v němž zaznívá aristotelské „dogma“ o nemožnosti porovnat kružnici a úsečku, je interpretován různými způsoby (viz např. [11, s. 77–78]). Descartes byl obeznámen s infinitními metodami, považoval je však, na rozdíl od algebraických metod, za nepřesné. Je pravděpodobné, že jeho přesvědčení o nemožnosti nalézt poměr mezi délkami rovných a zakřivených linií se týká nemožnosti nalézt geometricky konstruovatelnou úsečku, jejíž délka by byla shodná s délkou daného oblouku.

V roce 1658 určil Christopher Wren délku oblouku prosté cykloidy. Jeho výsledek byl (bez důkazu) uveden Blaisem Pascalem v *Histoire de la Roulette* (1658) a cykloida se tak stala první křivkou, jejíž rektifikace byla zveřejněna. René de Sluse ještě soudil, že rektifikace cykloidy je umožněna specifickým charakterem této křivky (cykloida patří mezi mechanické křivky podle Descartovy klasifikace) a vyslovil obdiv k „řádu přírody, který (…) nedovoluje nalézt úsečku rovnou křivce“ [12, s. 145]. Neudržitelnost tohoto názoru však prokázaly rektifikace prvních algebraických křivek, které byly provedeny v době bezprostředně následující.

První rektifikovanou algebraickou křivkou byla semikubická parabola (křivka popsaná rovnicí $ay^2 = x^3$), kterou se přibližně ve stejné době zhruba před 350 lety zabývali William Neil, Hendrik van Heuräet a Pierre de Fermat. Řešení je ve všech třech případech založeno na převedení problému rektifikace na problém kvadratury pomocné křivky (tj. nalezení obsahu obrazce ohraničeného pomocnou křivkou). Tou je v daném případě parabola, jejíž kvadratura byla známa z díla Archimédova.

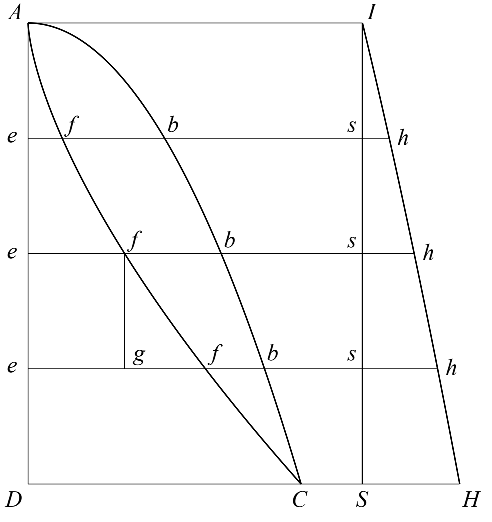
Mgr. Libor Koudela, Ústav matematiky, Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice, Studentská 84, 532 10 Pardubice, e-mail: libor.koudela@upce.cz

Neilova rektifikace semikubické paraboly

Neilův výsledek zaznamenal John Wallis v pojednání *Tractatus duo*, vydaném roku 1659 [15, s. 91–93]. Podle Wallise provedl Neil rektifikaci semikubické paraboly kolem roku 1657 a opíral se při tom o zásady uvedené ve Wallisově spise *Arithmetica infinitorum* (1655).

K dané parabole AbC (můžeme ji považovat za graf funkce $f_1(x)=k\sqrt{x}$, $k>0$, pokud budeme chápat svislou přímku AD na obr. 1 jako osu x a vodorovnou přímku AI jako osu y) sestrojíme křivku AfC, jejíž ordináta ef je úměrná ploše Aeb ohraničené parabolou (křivka AfC by tedy byla grafem funkce $f_2(x) = \int_0^x k\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}kx^{3/2}$), dále úsečku IsS tak, aby obsah obdélníku $ADSI$ byl ve stejném poměru k ploše $ADCb$ jako úsečka AD k DC, a konečně křivku IhH (graf funkce $f_3(x)$) tak, aby $eh^2 = es^2 + eb^2$.

Potom platí, že obsahy obrazců $ADHI$, $ADSI$ a $ADCb$ jsou ve stejném vzájemném poměru jako délky oblouku AfC a úseček AD, DC a křivka IhH je parabolou.



Obr. 1. Rektifikace semikubické paraboly podle Neila.

Na obr. 1 je překreslena ilustrace ze spisu *Tractatus duo*; původní značení je zachováno (body ležící mezi koncovými body uvažovaných čar jsou označovány stejnými písmeny). Hlavní myšlenka Wallisem uváděného Neilova postupu spočívá v chápání křivky AfC jako lomené čáry sestávající z nekonečně mnoha nekonečně krátkých úseček ff a nalezení pomocné křivky IhH, jejíž kvadraturu umíme provést. Obsahy ploch ohraničených křivkami IhH a AbC jsou přitom chápány jako součty obsahů obdélníků se základnou ee a výškou eh, resp. eb.

Křivka AfC je sestrojena tak, aby její ordináta ef byla úměrná obsahu Aeb; malý přírůstek tohoto obsahu představovaný obdélníkem se základnou ee a výškou eb je pak úměrný přírůstku ordináty ef, tedy úsečce gf. Podobně obsah celého obrazce $ADCb$ odpovídá délce úsečky DC a obsah obdélníku $ADSI$ délce úsečky AD. Obsahy obdélníků se základnou ee a výškou es (která je konstantní) odpovídají délce úseček ee. Podle Pythagorovy věty je $ff^2 = ee^2 + gf^2$, a protože křivka IhH je konstruována tak, aby platilo $eh^2 = es^2 + eb^2$, budou obsahy obdélníků se základnou ee a výškou eh odpovídat délkám úseček ff. Délka křivky AfC je tak vyjádřená obsahem $ADHI$, tedy je ve stejném poměru k AD jako $ADHI$ k $ADSI$. Tím je první část tvrzení dokázána.

Čtverce eb tvoří aritmetickou posloupnost a čtverce ee jsou všechny stejné, čtverce eh tvoří tudíž rovněž aritmetickou posloupnost a úsečky eh jsou ordinátami paraboly. Protože je známo, jak provést kvadraturu paraboly IhH, lze určit i délku oblouku AfC.

Budeme-li místo ee psát dx a přírůstek gf značit symbolem $df_2(x)$, dostaneme pro délku odpovídajícího úseku $dl \equiv ff$ křivky AfC podle Pythagorovy věty $dl = \sqrt{dx^2 + df_2^2(x)}$. Po úpravách vyjde pro délku oblouku l mezi body A a C známý vzorec

$$l = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{df_2(x)}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (f_1(x))^2}\, dx, \tag{1}$$

z něhož je patrné, že určení délky grafu funkce $f_2(x)$ je ekvivalentní kvadratuře $f_3(x) = \sqrt{1 + (f_1(x))^2}$. Wallis a Neil, jejichž řešení bylo čistě geometrické, však ještě neviděli obecné pravidlo spojující křivky $y = f_2(x)$ a $y = f_3(x)$ a souvislost mezi řešením problémů kvadratury a rektifikace.

Van Heuräet a aplikace Descartovy metody

Pravděpodobně nezávisle na Neilovi a Wallisovi provedl rektifikaci semikubické paraboly van Heuräet a svůj postup popsal v pojednání *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, jež vyšlo jako příloha latinského překladu Descartovy *Geometrie* [3], který vydal roku 1659 Frans van Schooten.

K dané křivce $ABCDE$ a úsečce Σ (i zde zachováváme původní značení) se sestrojí další křivka $GHIKL$ tak, aby platilo

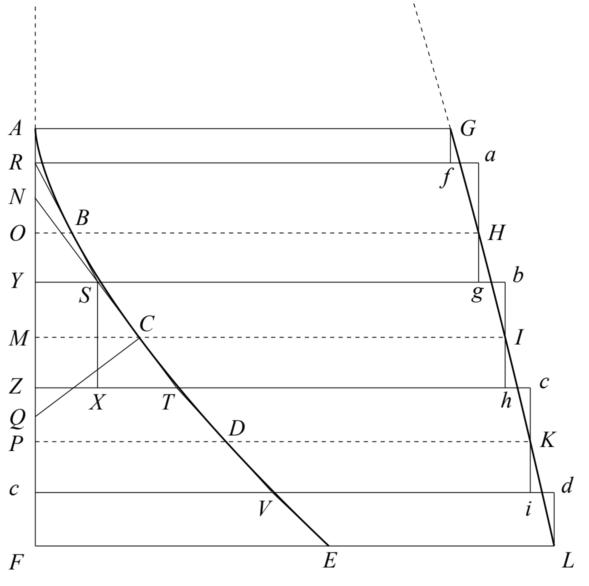
$$\frac{MC}{CQ} = \frac{\Sigma}{MI}, \tag{2}$$

kde MC je ordináta bodu C a CQ normála k první křivce v témže bodě (obr. 2). Potom délka křivky $ABCDE$ bude číselně rovna obsahu plochy ohraničené křivkou $GHIKL$ a úsečkami AF, AG a FL, dělené délkou Σ.

V bodech O, M, P vztyčíme kolmice k AF, které protnou druhou křivku v bodech H, I, K. V jejich průsečících B, C, D s křivkou $ABCDE$ sestrojíme tečny, které se protnou v bodech S, T, V; těmito body rovněž vedeme kolmice k AF. V bodech H, I, K sestrojíme rovnoběžky s AF. Bodem S vedeme rovnoběžku SX s AF a tečnu TS protáhneme až do N.

Protože úhel $\angle NCQ$ je pravý, platí $MC : CQ = MN : NC = SX : ST$, což je podle předpokladu rovno $\Sigma : MI$. Z toho plyne $SX \cdot MI = ST \cdot \Sigma$, tedy obsah obdélníku $YZbh$ je roven délce tečny ST uvnitř tohoto obdélníku násobené Σ.

Podobně jako v předchozím případě je postup založen na představě křivky jako lomené čáry a převedení rektifikace na kvadraturu pomocné křivky, přičemž předpokládá znalost způsobu konstrukce tečen ke křivce $ABCDE$. Budeme-li ji považovat za graf funkce $y = f(x)$, bude pomocná křivka grafem funkce $y = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.



Obr. 2. Rektifikace semikubické paraboly podle van Heuräeta.

Jako příklad uvádí van Heuräet semikubickou parabolu. Úsečku AM označíme x, MC bude y a křivka $ABCDE$ bude popsána rovnicí $y^2 = x^3/a$. Dále označíme $s = AQ$, $v = CQ$ a $z = MI$. Je $QM = s - x$, tzn. $QM^2 = s^2 - 2sx + x^2$ a podle Pythagorovy věty pro trojúhelník QCM platí $s^2 - 2sx + x^2 + x^3/a = v^2$. Na poslední rovnici použije van Heuräet tzv. Huddovo pravidlo[1])

$$\frac{x^3/a \;+\; x^2 \;-\; 2sx \;+\; s^2 - v^2 = 0}{3 \qquad\quad 2 \qquad\quad 1 \qquad\qquad 0}, \tag{3}$$

odtud $s = x + 3x^2/(2a)$; po odečtení $AQ = x$ od obou stran máme $MQ = 3x^2/(2a)$ a tedy

$$CQ^2 = MQ^2 + MC^2 = \frac{9x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{a}.$$

[1]) Huddovo pravidlo lze formulovat takto (viz např. [7, s. 49–51]): Má-li polynom $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ dvojnásobný kořen x_0 a je-li $t_k = p + kq$ libovolná aritmetická posloupnost, pak x_0 je rovněž kořenem polynomu $\sum_{k=0}^{n} a_k t_k x^k$. Často se volí (jako v tomto případě) $p = 0$, $q = 1$; hodnoty t_k jsou ve vzorci (3) uvedeny pod čarou. Jan Hudde byl, podobně jako van Heuräet, van Schootenovým žákem a pravidlo nesoucí jeho jméno se objevilo v traktátu připojeném k témuž vydání Descartovy *Geometrie* jako van Heuräetův příspěvek o rektifikaci [3, s. 507–516].

Zvolíme-li např. $\Sigma = a/3$, dostaneme vzhledem k (2)

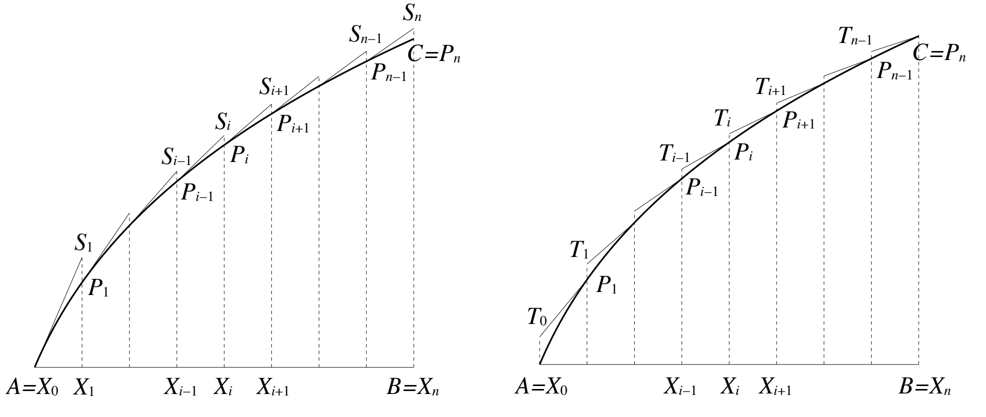
$$z = \sqrt{\frac{1}{4}xa + \frac{1}{9}a^2}. \tag{4}$$

Křivka $GHIKL$ je tedy parabola; protože je známo, jak provést její kvadraturu, je tím pádem i známo, jak provést rektifikaci křivky $ABCDE$.

Podstata van Heuräetova postupu je v zásadě stejná jako u Neila; opírá se o převedení problému rektifikace na problém kvadratury pomocné křivky. Rozdílná je technická stránka: van Heuräet použil Descartovu metodu konstrukce tečen a formuli (4) odvodil algebraickými prostředky; jeho postup měl navíc obecnější ráz.

Fermatova rektifikace pomocí *reductio ad absurdum*

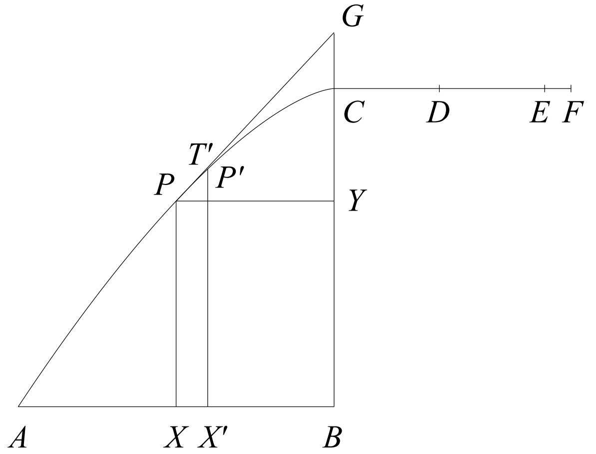
Vedle hledání úsečky stejné délky jako má oblouk dané křivky se řada matematiků kolem poloviny 17. století zabývala i porovnáváním délek oblouků dvou různých křivek. Roberval, Torricelli a další zjistili, že délka prvního závitu Archimédovy spirály popsané v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = \varphi$ je rovna délce oblouku paraboly $y = x^2/2$ mezi body $x = 0$ a $x = \varrho$.



Obr. 3. K Fermatově metodě rektifikace.

Stejným problémem se zabýval Pascal v dopise z roku 1658, jehož adresát byl uveden pouze iniciálami A. D. D. S. Jak uvádí Alexandre Koyré [8, s. 132], pro Pascala jedinou pravou geometrií byla geometrie starých Řeků. Pascalův důkaz je veden „po způsobu starých“ (à la maniere des Anciens) [12, s. 255], tzn. nezpochybnitelně, bez použití kinematického přístupu i bez indivisibilií. K porovnání uvedených oblouků použil Pascal čáry opsané a vepsané oběma křivkám a ukázal, že rozdíly jejich délek lze učinit menší než délka libovolné dané úsečky.

Fermat v reakci na Pascalovo pojednání podobným způsobem ukázal možnost rektifikace oblouku konkávní křivky ve spise *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, dissertatio geometrica* [5, s. 211–254] a příkladem, na němž svou metodu demonstroval, byla opět semikubická parabola. Hlavní myšlenka Fermatova postupu je následující. Dané křivce *opíšeme* dva systémy úseček sestávající z částí tečen a ukážeme, že délka prvního je větší než délka daného oblouku a délka druhého menší, přičemž rozdíly mezi délkou obou systémů úseček a daného oblouku lze učinit menší než libovolná kladná hodnota.



Obr. 4. K rektifikaci semikubické paraboly Fermatovou metodou.

Nechť AC je oblouk konkávní křivky nad úsečkou AB. Uvažujme ekvidistantní dělení úsečky AB pomocí bodů $X_0{=}A$, X_1, X_2, …, $X_n{=}B$ (obr. 3); z praktických důvodů je zde voleno označování bodů pomocí písmen s indexy, které Fermat nepoužívá). V každém z dělících bodů X_i sestrojíme kolmici k základně AB; v jejich průsečících s křivkou, které označíme P_i, $i = 0, \dots, n$, sestrojíme tečny a označíme S_{i+1} body, v nichž tečna v bodě P_i protne kolmice v bodech X_{i+1}. Podobně označíme T_{i-1} body, v nichž tečna v bodě P_i protne kolmice v bodech X_{i-1} (sklon tečen na obr. 3 je pro větší názornost mírně nadsazen).

S odvoláním na Archimédův postulát týkající se porovnávání délek dvou konkávních oblouků se společnými koncovými body Fermat ukazuje, že při dostatečném počtu dělících bodů bude rozdíl délek obou opsaných čar a tím spíše i rozdíl mezi délkou delší z obou čar a obloukem jakož i obloukem a kratší z obou čar menší než délka libovolné dané úsečky.

Rektifikaci Fermat demonstruje na příkladu paraboly s vrcholem v bodě C a osou CB, pro niž platí $AB^3 : XB^3 = BC^2 : YC^2$ (viz obr. 4). Jedná se tedy o parabolu $ay^2 = x^3$, Fermat však (na rozdíl od Descartova stoupence van Heuräeta) tímto způsobem křivky nepopisuje. V bodě C sestrojíme kolmici CF na osu BC, jejíž délka bude odpovídat parametru a paraboly, tzn.

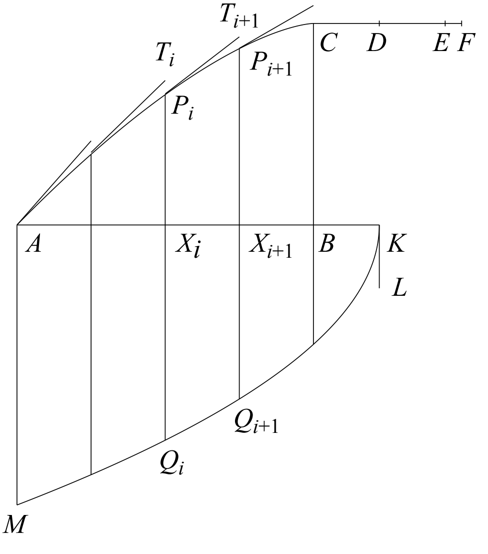
$$CF \cdot BC^2 = AB^3. \tag{5}$$

V bodě P sestrojíme tečnu k parabole a její průsečík s osou označíme G. Podle Fermatovy metody tečen platí $CY = 2 \cdot CG$ a tedy rovněž $GY : CY = 3 : 2$. Na úsečce CF zvolíme bod D, aby platilo $CD : CF = 9 : 4 = GY^2 : CY^2$. Platí tedy $CF \cdot CY^2 = CD \cdot GY^2$, což je s ohledem na (5) rovno PY^3. Tedy $GY^2 : PY^2 = PY : CD$ a protože podle Pythagorovy věty zároveň platí $PG^2 = PY^2 + GY^2$, dostáváme

$$\frac{PG^2}{PY^2} = \frac{PY + CD}{CD}. \tag{6}$$

V bodě X' sestrojíme další kolmici k základně AB, která protne parabolu v bodě P' a tečnu v bodě T'. Z podobnosti trojúhelníků máme $PT' : XX' = PG : PY$ a s ohledem na (6)

$$\frac{PT'^2}{XX'^2} = \frac{PY + CD}{CD}. \tag{7}$$



Obr. 5. Převedení rektifikace na kvadraturu pomocné křivky.

Základnu AB rozdělíme pomocí bodů $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ na n stejných úseků (obr. 5). V dělících bodech vztyčíme kolmice k základně, které protnou parabolu v bodech $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$. V bodech $A = P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ sestrojíme tečny k parabole. Průsečík tečny v bodě P_{i-1} s kolmicí X_iP_i, $i = 1, \ldots, n-1$, označíme T_i. Na polopřímce AB určíme bod K tak, aby platilo $BK = CD$.

Sestrojíme nyní parabolu s osou AK, vrcholem K a parametrem KL, tedy $X_iK \cdot KL = X_iQ_i^2$. Kolmice k základně v dělících bodech X_i, $i = 1, \ldots, n-1$, protnou tuto parabolu v bodech Q_i. Podle (7) máme

$$\frac{P_iT_{i+1}^2}{X_iX_{i+1}^2} = \frac{X_iK}{BK} = \frac{X_iK}{BK} \cdot \frac{KL}{KL} = \frac{X_iQ_i^2}{KL^2}, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{8}$$

tedy $P_iT_{i+1} : X_iX_{i+1} = X_iQ_i : KL$, neboli $P_iT_{i+1} \cdot KL = X_iQ_i \cdot X_iX_{i+1}$. Sečtením dostaneme

$$KL \cdot \sum_{i=1}^{n} P_iT_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} X_iQ_i \cdot X_iX_{i+1}. \tag{9}$$

Pravá strana poslední rovnice vyjadřuje přibližně obsah obrazce ohraničeného druhou parabolou, součet na levé straně délku oblouku první křivky. Obsah parabolického segmentu ABQ_nM lze určit Archimédovou metodou kvadratury. Rovnost mezi součinem $KL \cdot \overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ a obsahem ABQ_nM dokazuje Fermat pomocí *reductio ad absurdum* s využitím obou výše uvedených čar opsaných první parabole. Ukazuje zároveň, že lze utvořit nekonečně mnoho jiných vzájemně se lišících, avšak rektifikovatelných křivek.

Fermatovo pojednání bylo publikováno (bez autorova souhlasu) jako příloha k Lalouvèrovu spisu *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris* (1660). Předností jeho pojetí rektifikace ve srovnání s postupy jeho předchůdců je obecnost závěrů a rovněž logická stavba důkazů. Znalec Fermatova díla Michael Sean Mahoney ve své monografii [10, s. 268] poznamenává, že Fermat sice zvolil klasický geometrický styl, ale jeho pojednání o rektifikaci je v zásadě stejně algebraické jako jeho spis o kvadratuře, který vznikl přibližně ve stejné době.

Spory o prvenství

Jako mnoho jiných objevů v 17. století, stala se i rektifikace semikubické paraboly předmětem sporů o prvenství. Fermatův spis se prostřednictvím Kenelma Digbyho, diplomata a přírodovědce, který jako představitel anglických katolických kruhů pobýval dlouhodobě ve Francii, dostal již v polovině roku 1660 k Wallisovi. Ten neprodleně odpověděl [1, s. 22–23], že stejnou křivku rektifikoval Neil roku 1657 a on sám, Wallis, o jeho objevu informoval v *Tractatus duo* z roku 1659; kromě toho zde byla van Heuräetova práce, která rovněž předcházela Fermatův traktát.

V roce 1668 v dopise Johnu Collinsovi znovu Wallis opakuje [1, s. 430], že první rektifikaci křivky provedl Neil a po něm i Wren a Brouncker, a to dlouho před van Heuräetem; všechny výsledky kolem rektifikace jsou navíc postaveny na obecných základech vyložených ve Wallisově knize *Arithmetica infinitorum*.

Celou záležitost později znovu rozvířil Christiaan Huygens, jenž v roce 1673 zaslal Henrymu Oldenburgovi, tajemníkovi Královské společnosti, dvacet čerstvých výtisků svého díla *Horologium oscillatorium*, které byly určeny nejvýznamnějším učencům Anglie, mimo jiné i Wallisovi [2, s. 191]. Huygens ve své knize píše, že Neil při rektifikaci neuspěl a prvenství náleží van Heuräetovi [6, s. 208–212]. To přimělo Wallise znovu vystoupit na obranu svého žáka. Učinil tak v dopise Oldenburgovi, kde navíc uvádí, že po Neilovi i další Angličané, Brouncker a Wren, provedli rektifikaci; oba jmenovaní to potvrdili Oldenburgovi a celá korespondence vyšla ve *Philosophical Transactions* [14, s. 6146–6150].

Až do konce 19. století se věřilo, že semikubická parabola byla (po kružnici) vůbec první rektifikovanou křivkou. Gino Loria ale při studiu Torricelliho rukopisů zjistil, že Torricelli se zabýval vlastnostmi logaritmické spirály a provedl i její rektifikaci a kvadraturu [9]. Protože Torricelli zemřel v roce 1647, byla logaritmická spirála rektifikována určitě ještě před semikubickou parabolou. Ani Torricellimu však prvenství nezůstalo; Jon V. Pepper totiž nalezl doklady o tom, že logaritmickou spirálou se zabýval již na konci 16. století Thomas Harriot, který se pokusil i o stanovení její délky [13]. I jeho výsledky však zůstaly pouze v rukopise a na rozdíl od prací věnovaných rektifikaci semikubické paraboly neměly vliv na další vývoj matematiky.

L i t e r a t u r a

[1] Beeley, P., Scriba, C. J. (ed.): *The Correspondence of John Wallis – Volume II (1660 – 1668).* Oxford Univ. Press, Oxford 2005.

[2] Boas Hall, M.: *Henry Oldenburg. Shaping The Royal Society.* Oxford Univ. Press, Oxford 2002.

[3] Descartes, R.: *Geometria, a Renato des Cartes anno 1637 gallica edita.* Apud Ludovicum et Danielem Elzevirios, Amstelodami 1659.

[4] Descartes, R.: *Œuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery.* Sv. 6, L. Cerf, Paris 1897.

[5] Fermat, P.: *Œuvres de Fermat publiées par Paul Tannery et Charles Henry.* Sv. 1, Gauthier-Villars, Paris 1891.

[6] Huygens, C.: *Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences.* Sv. 18, Martinus Nijhoff, La Haye 1934.

[7] Jahnke, H. N. (ed.): *A History of Analysis.* Amer. Math. Soc., Providence 2003.

[8] Koyré, A.: *Metaphysics and Measurement.* Chapman & Hall, London 1968.

[9] Loria, G.: *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva.* Atti della Reale Accademia dei Lincei *6* (1897), 318–323.

[10] Mahoney, M. S.: *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601 – 1665).* Princeton Univ. Press, New Jersey 1994.

[11] Mancosu, P.: *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.* Oxford Univ. Press, New York 1996.

[12] Pascal, B.: *Œuvres de Blaise Pascal publiées par L. Brunschvicg, P. Boutroux, F. Gazier.* Sv. 8, Hachette, Paris 1914.

[13] Pepper, J. V.: *Harriot's Calculation of the Meridional Parts as Logarithmic Tangents.* Archive for History of Exact Sciences *4* (1968), 359–413.

[14] *Philosophical Transactions.* Sv. 8, The Royal Society, London 1673.

[15] Wallis, J.: *Tractatus duo, prior, de cycloide et corporibus inde gentis: posterior, epistolaris in qua agitur de cissoide, et corporibus inde gentis. . . .* Typis Academicis Lichfeldianis, Oxoniæ 1659.