Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Petr Vodstrčil; Jiří Bouchala

Drobná překvapení spojená s numerickou integrací

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 4, 278–287

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141970`

Drobná překvapení spojená s numerickou integrací

Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala, Ostrava

Výuka matematiky je hezká. Jedním z důvodů je i skutečnost, že věci občas nejsou takové, jaké se jeví. Například v řadě textů o numerické integraci hladkých funkcí se píše o těchto metodách: obdélníkové pravidlo, lichoběžníkové pravidlo, Simpsonovo pravidlo … , přičemž se (přinejmenším implicitně) očekává, že uvedené metody jsou seřazeny i podle (stále se zvyšující) přesnosti. Je tomu skutečně tak? Často uváděné odhady chyb (1) obsahují „překvapivý“ fakt, že odhad chyby obdélníkového pravidla (s hodnotami počítanými vždy ve středech dělících intervalů) je dvakrát menší než odhad chyby lichoběžníkového pravidla. Jaký je ovšem skutečný poměr chyb uvedených metod (ne pouze jejich odhadů)? To si ukážeme v tomto článku. Zajímavé a překvapivé nejsou jenom získané výsledky, ale i skutečnost, že si při jejich důkazech vystačíme s poměrně elementárními znalostmi. I proto mohou následující řádky posloužit jako zpestření výuky prvního semestru matematické analýzy nebo numerické matematiky.

Nejdříve se domluvme na následujících pojmech a značení. Předpokládejme, že funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a uvažujme pro každé přirozené číslo n ekvidistantní dělení $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Obdélníkovým pravidlem (s hodnotami počítanými ve středech dělících intervalů) rozumíme kvadraturu tvaru

$$O(n) := \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i), \quad \text{kde } c_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{b-a}{2n},$$

s chybou

$$o(n) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - O(n).$$

Podobně budeme značit lichoběžníkové pravidlo a jeho chybu:

$$L(n) := \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}, \quad l(n) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - L(n).$$

Připomeňme si známé odhady týkající se chyb zmíněných kvadraturních formulí (viz např. [1]).

Mgr. Petr Vodstrčil, Ph. D., a doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph. D., Katedra aplikované matematiky, FEI VŠB-TU Ostrava, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba, e-mail: `petr.vodstrcil@vsb.cz, jiri.bouchala@vsb.cz`

Věta 1. *Nechť $f \in C^2(\langle a,b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak platí*

$$|o(n)| \leqq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|, \quad |l(n)| \leqq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|. \tag{1}$$

Nyní přistoupíme k výpočtu skutečných chyb a podíváme se, jak se chová podíl $\dfrac{o(n)}{l(n)}$ pro velká n.

1. Porovnání chyb obdélníkového a lichoběžníkového pravidla

Lemma 1. *Nechť $f \in C^2(\langle a,b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak*

i) existují body $\eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takové, že

$$o(n) = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i), \tag{2}$$

ii) existují body $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takové, že

$$l(n) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i). \tag{3}$$

Důkaz:
Ad i) Nejdříve vyjádřeme počítanou chybu $o(n)$ užitím funkcí

$$G_i(x) := \int_{c_i-x}^{c_i+x} f(t)\,\mathrm{d}t - 2xf(c_i),$$

tj.

$$o(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(c_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} G_i\left(\frac{b-a}{2n}\right). \tag{4}$$

Nyní se pokusíme vyjádřit $G_i\left(\frac{b-a}{2n}\right)$ pomocí druhých derivací funkce f. Metoda je jednoduchá: funkce G_i nejdříve dvakrát zderivujeme, získané druhé derivace odhadneme prostřednictvím čísel

$$m_i := \min_{t\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f''(t), \quad M_i := \max_{t\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f''(t),$$

a potom tyto odhady dvakrát zintegrujeme. Protože

$$G_i'(x) = f(c_i+x) + f(c_i-x) - 2f(c_i),$$

$$G_i''(x) = f'(c_i+x) - f'(c_i-x),$$

existují díky Lagrangeově větě o střední hodnotě ke každému $x \in \left(0, \frac{b-a}{2n}\right\rangle$ čísla $\eta_{x,i} \in (c_i - x, c_i + x)$ taková, že

$$G_i''(x) = 2xf''(\eta_{x,i}).$$

Odtud dostaneme, že pro každé $x \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2n}\right\rangle$ je

$$2m_i x \leqq G_i''(x) \leqq 2M_i x.$$

A nyní tyto nerovnosti dvakrát zintegrujme, a to nejdříve přes interval $\langle 0, x\rangle$:

$$m_i x^2 = \int_0^x 2m_i t \,\mathrm{d}t \leqq \int_0^x G_i''(t) \,\mathrm{d}t = G_i'(x) - G_i'(0) = G_i'(x) \leqq$$

$$\leqq \int_0^x 2M_i t \,\mathrm{d}t = M_i x^2,$$

a potom přes interval $\left\langle 0, \frac{b-a}{2n}\right\rangle$:

$$\frac{m_i \left(\frac{b-a}{2n}\right)^3}{3} = \int_0^{\frac{b-a}{2n}} m_i x^2 \,\mathrm{d}x \leqq \int_0^{\frac{b-a}{2n}} G_i'(x) \,\mathrm{d}x =$$

$$= G_i\left(\frac{b-a}{2n}\right) - G_i(0) = G_i\left(\frac{b-a}{2n}\right) \leqq \int_0^{\frac{b-a}{2n}} M_i x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{M_i \left(\frac{b-a}{2n}\right)^3}{3}.$$

Odkud získáme nerovnosti

$$m_i \leqq \frac{24\, G_i\left(\frac{b-a}{2n}\right)}{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3} \leqq M_i.$$

Ze spojitosti f'' na intervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ plyne existence čísel $\eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ splňujících vztahy

$$f''(\eta_i) = \frac{24\, G_i\left(\frac{b-a}{2n}\right)}{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}.$$

A k dokončení důkazu i) stačí dosadit

$$G_i\left(\frac{b-a}{2n}\right) = \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\eta_i)$$

do (4).

Ad ii) Budeme postupovat podobně jako při důkazu tvrzení i). Definujme funkce

$$F_i(x) = \int_{c_i-x}^{c_i+x} f(t) \,\mathrm{d}t - \big(f(c_i - x) + f(c_i + x)\big)x.$$

Pak

$$l(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{b-a}{n}\cdot\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)=\sum_{i=1}^{n}F_i\left(\frac{b-a}{2n}\right), \tag{5}$$

a protože pro každé $x\in\big(0,\frac{b-a}{2n}\big\rangle$ je

$$F_i'(x)=-\big(f'(c_i+x)-f'(c_i-x)\big)x,$$

$$F_i''(x)=-\left(\frac{f''(c_i+x)+f''(c_i-x)}{2}\right)2x-\big(f'(c_i+x)-f'(c_i-x)\big),$$

existují (opět využíváme spojitosti f'' a Lagrangeovy věty) body $s_{x,i},t_{x,i}$ a $k_{x,i}$ v intervalech $\langle c_i-x,c_i+x\rangle\subset\langle x_{i-1},x_i\rangle$ takové, že

$$F_i''(x)=-f''(s_{x,i})2x-f''(t_{x,i})2x=-f''(k_{x,i})4x,$$

a proto

$$-4M_ix\leqq F_i''(x)\leqq -4m_ix.$$

A opět tyto odhady zintegrujme přes interval $\langle 0,x\rangle$:

$$-2M_ix^2\leqq F_i'(x)-F_i'(0)=F_i'(x)\leqq -2m_ix^2,$$

a pak přes interval $\big\langle 0,\frac{b-a}{2n}\big\rangle$:

$$-\frac{2M_i\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3}{3}\leqq F_i\left(\frac{b-a}{2n}\right)-F_i(0)=F_i\left(\frac{b-a}{2n}\right)\leqq-\frac{2m_i\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3}{3}.$$

Odtud plyne, že

$$m_i\leqq\frac{-12\,F_i\big(\frac{b-a}{2n}\big)}{\big(\frac{b-a}{n}\big)^3}\leqq M_i,$$

a proto (viz spojitost f'' a (5)) existují body $\xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$ takové, že

$$l(n)=\sum_{i=1}^{n}F_i\left(\frac{b-a}{2n}\right)=\sum_{i=1}^{n}-\frac{(b-a)^3}{12n^3}f''(\xi_i).$$

□

Pozorování. Všimněme si, že odhady (1) jsou snadným důsledkem rovností (2) a (3). Navíc z uvedených rovností vyplývá i tvrzení následující věty obsahující – za dodatečného a zde `nezbytného` předpokladu $f'(a)\neq f'(b)$ – informaci, že obdélníkové pravidlo je pro velká n zhruba `dvakrát lepší` než pravidlo lichoběžníkové.

Věta 2. *Nechť $f\in C^2(\langle a,b\rangle)$ a nechť $f'(a)\neq f'(b)$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o(n)}{l(n)}=-\frac{1}{2}. \tag{6}$$

Důkaz. Uvědomíme-li si, že předpoklad $f'(a) \neq f'(b)$ vlastně znamená, že

$$\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x \neq 0,$$

můžeme díky (2) a (3) a známému tvrzení o konvergenci integrálních součtů

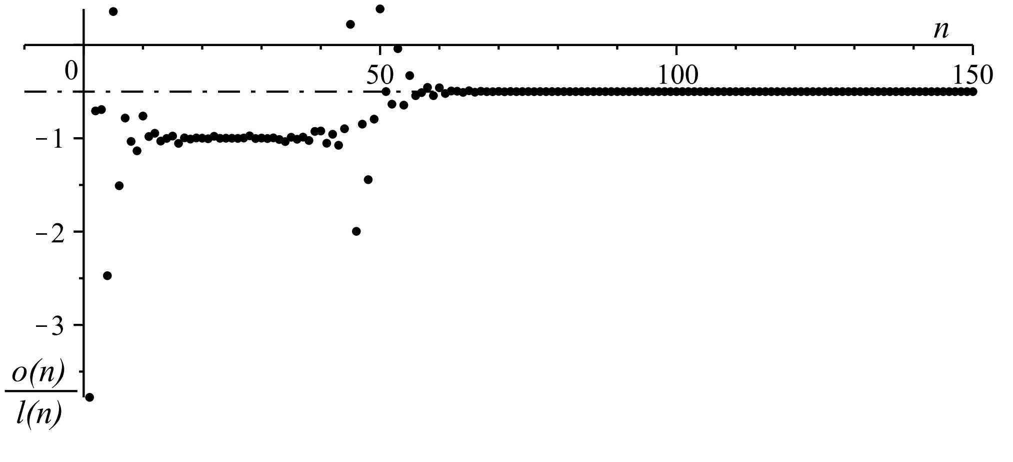
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x$$

větu dokázat přímým výpočtem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(n)}{l(n)} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f''(\eta_i)}{\frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f''(\xi_i)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}.$$

□

Ilustrujme si tvrzení (6) výše uvedené věty obrázkem. Uvažujme $\int_{-5}^{5} \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$ a prohlédněme si, jak se mění podíl $\frac{o(n)}{l(n)}$, zvětšujeme-li n. (Už víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{o(n)}{l(n)} = -\frac{1}{2}$.)



Otázkou zůstává, co lze říci o podílu chyb v případě, že $f'(a) = f'(b)$. Částečnou a dosti překvapivou odpověď poskytuje následující věta.

Věta 3. *Nechť $f \in C^4(\langle a,b\rangle)$, $f'(a) = f'(b)$ a nechť $f'''(a) \neq f'''(b)$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(n)}{l(n)} = -\frac{7}{8}.$$

Důkaz. Podobně jako při důkazu lemmatu 1 lze dokázat (funkce G_i a F_i je ovšem třeba derivovat a následně integrovat čtyřikrát), že

i) existují body $\tau_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ takové, že

$$o(n) = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i) + \frac{(b-a)^5}{60 \cdot 32n^5} \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\tau_i),$$

ii) existují body $\sigma_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ takové, že

$$l(n) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i) - \frac{(b-a)^5}{15 \cdot 32n^5} \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\sigma_i).$$

Než se pustíme do výpočtu příslušné limity, všimněme si, že z tvrzení (2) (aplikovaného na funkci f'') a z předpokladu $f'(a) = f'(b)$ plyne

$$-\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = \underbrace{\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\eta_i),$$

a proto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{24} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\eta_i) = -\frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

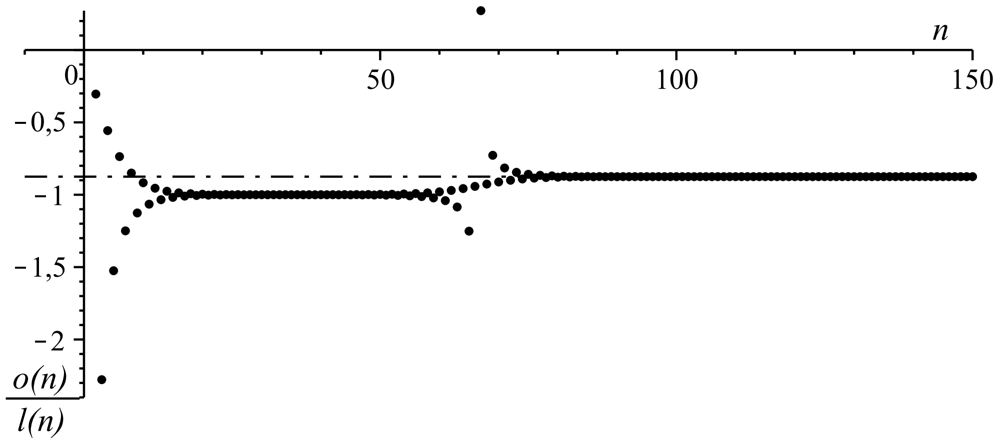
A zbývající část důkazu už je jen snadným technickým cvičením

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(n)}{l(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(b-a)^3}{24n^3} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) + \dfrac{(b-a)^5}{60 \cdot 32n^5} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\tau_i)}{-\dfrac{(b-a)^3}{12n^3} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) - \dfrac{(b-a)^5}{15 \cdot 32n^5} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\sigma_i)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(b-a)^4}{24n^4} \left[\dfrac{n}{b-a} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f''(c_i)\right] + \dfrac{(b-a)^4}{60 \cdot 32n^4} \left[\dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\tau_i)\right]}{-\dfrac{(b-a)^4}{12n^4} \left[\dfrac{n}{b-a} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f''(c_i)\right] - \dfrac{(b-a)^4}{15 \cdot 32n^4} \left[\dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\sigma_i)\right]} =$$

$$= \frac{\left(-\dfrac{1}{24 \cdot 24} + \dfrac{1}{60 \cdot 32}\right) \displaystyle\int_a^b f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x}{\left(\dfrac{1}{12 \cdot 24} - \dfrac{1}{15 \cdot 32}\right) \displaystyle\int_a^b f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x} = -\frac{7}{8}.$$

□



Situaci z právě dokázané věty si ilustrujme pomocí integrálu

$$\int_{-10}^{10} \left(\frac{1}{x^2+1} + \left(\frac{x}{101} \right)^2 \right) \mathrm{d}x.$$

Opět si můžeme prohlédnout závislost $\dfrac{o(n)}{l(n)}$ na n a porovnat příslušné podíly s jejich limitou $-\frac{7}{8}$.

Dá se tušit, že získané výsledky lze dále rozšiřovat. Za jistých předpokladů týkajících se i vyšších derivací příslušné integrované funkce je možné dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{o(n)}{l(n)}$ může nabývat i mnoha dalších hodnot, např. $-\frac{31}{32}$, $-\frac{127}{128}$, ...

Ukázali jsme si, že v řadě případů obdélníkové pravidlo – s hodnotami počítanými ve středech dělících intervalů – předčí pravidlo lichoběžníkové. V následující kapitole uvidíme, že často lze i samotné obdélníkové pravidlo vylepšit. Budeme uvažovat „zobecněná“ obdélníková pravidla, kdy hodnoty funkce f nepočítáme ve středech c_i, ale (pro dané $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$) v bodech

$$c_{\lambda,i} := x_{i-1} + \lambda(x_i - x_{i-1}) = x_{i-1} + \lambda \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Tzn. zabývejme se kvadraturou tvaru

$$O_\lambda(n) := \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(c_{\lambda,i})$$

s chybou

$$o_\lambda(n) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - O_\lambda(n).$$

Závislost chyby zobecněného obdélníkového pravidla na volbě λ

I zde závisí naše výsledky na dodatečných předpokladech týkajících se vzájemného vztahu hodnot funkce f (případně jejích derivací) v krajních bodech a a b. V dalším budeme porovnávat chyby $o_\lambda(n)$ s chybami standardních obdélníkových pravidel, tj. s $o(n) = o_{\frac{1}{2}}(n)$ a $o_0(n)$.

Věta 4. *Nechť $f \in C^1(\langle a, b\rangle)$, $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ a nechť $f(a) \neq f(b)$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_\lambda(n)}{o_0(n)} = 1 - 2\lambda.$$

Důsledek. *Je-li navíc $\lambda \neq \frac{1}{2}$, platí též*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_{\frac{1}{2}}(n)}{o_\lambda(n)} = 0.$$

Nepřehlédněme tuto interpretaci tvrzení věty a jejího důsledku: za uvedených předpokladů je obdélníkové pravidlo nejlepší, počítáme-li s hodnotami ve středech intervalů dělení ($\lambda = \frac{1}{2}$) a nejhorší, volíme-li krajní body ($\lambda = 0$ nebo $\lambda = 1$).

Situaci ilustrujme tabulkou chyb, kterých se dopustíme při numerickém výpočtu integrálu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x$.

	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 100$
$o_0(n)$	$8,06 \cdot 10^{-2}$	$5,33 \cdot 10^{-2}$	$3,98 \cdot 10^{-2}$	$7,87 \cdot 10^{-3}$
$o_{\frac{1}{2}}(n)$	$-1,03 \cdot 10^{-3}$	$-4,57 \cdot 10^{-4}$	$-2,57 \cdot 10^{-4}$	$-1,03 \cdot 10^{-5}$
$o_{\frac{1}{5}}(n)$	$4,72 \cdot 10^{-2}$	$3,15 \cdot 10^{-2}$	$2,36 \cdot 10^{-2}$	$4,71 \cdot 10^{-3}$

Důkaz věty 4. Tentokrát si vyjádřeme zkoumanou chybu ve tvaru

$$o_\lambda(n) = \sum_{i=1}^{n} H_i\left(\frac{b-a}{n}\right), \tag{7}$$

kde

$$H_i(x) := \int_{c_{\lambda,i}-\lambda x}^{c_{\lambda,i}+(1-\lambda)x} f(t)\,\mathrm{d}t - x f(c_{\lambda,i}).$$

Protože

$$H_i'(x) = (1-\lambda) f\big(c_{\lambda,i} + (1-\lambda)x\big) + \lambda f(c_{\lambda,i} - \lambda x) - f(c_{\lambda,i}),$$
$$H_i''(x) = (1-\lambda)^2 f'\big(c_{\lambda,i} + (1-\lambda)x\big) - \lambda^2 f'(c_{\lambda,i} - \lambda x)$$

a protože z Taylorovy věty vyplývá, že existují body $\xi_i \in \left\langle 0, \frac{b-a}{n} \right\rangle$ takové, že

$$H_i\left(\frac{b-a}{n}\right) = \underbrace{H_i(0)}_{=0} + \underbrace{H_i'(0)}_{=0} \frac{b-a}{n} + \frac{H_i''(\xi_i)}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2, \tag{8}$$

je (viz (7) a (8))

$$o_\lambda(n) = \frac{(b-a)^2}{2n^2} \cdot \left[(1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_{2,i}) - \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_{1,i})\right],$$

kde

$$\xi_{1,i} := c_{\lambda,i} - \lambda\xi_i, \quad \xi_{2,i} := c_{\lambda,i} + (1-\lambda)\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle.$$

A jelikož analogicky lze odvodit, že existují body $\eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takové, že

$$o_0(n) = \frac{(b-a)^2}{2n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i),$$

je zbývající část důkazu snadná:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_\lambda(n)}{o_0(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(b-a)^2}{2n^2} \cdot \left[(1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_{2,i}) - \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_{1,i})\right]}{\frac{(b-a)^2}{2n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\lambda)^2 \left[\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_{2,i})\right] - \lambda^2 \left[\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_{1,i})\right]}{\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i)} =$$

$$= \frac{(1-2\lambda) \displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x} = 1 - 2\lambda.$$

$\square$

Na závěr si ještě ukažme, co lze říci o limitě $\lim_{n\to\infty} \frac{o_\lambda(n)}{o_0(n)}$, je-li $f(a) = f(b)$ (tzn. $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$). Už nás jistě nepřekvapí dodatečný předpoklad týkající se hodnot derivace funkce f v krajních bodech a a b.

Věta 5. *Nechť $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$, $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, $f(a) = f(b)$ a nechť $f'(a) \neq f'(b)$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_\lambda(n)}{o_0(n)} = 6\lambda^2 - 6\lambda + 1.$$

Důkaz. Tentokrát budeme stručnější a uvedeme pouze základní myšlenky. Nejdříve se ukáže, že z předpokladu $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$ vyplývá

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f'(c_{\lambda,i}) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x,$$

a že (podobně jako v předcházejícím důkazu) z Taylorovy věty vyplývá existence bodů $\xi_{1,i},\ \xi_{2,i} \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takových, že

$$o_\lambda(n) = -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} f'(c_{\lambda,i}) + \\ + \frac{(b-a)^3}{6n^3} \cdot \left[\lambda^3 \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_{1,i}) + (1-\lambda)^3 \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_{2,i})\right].$$

A je jenom technickým cvičením ukázat, že z těchto vztahů plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_\lambda(n)}{o_0(n)} = \frac{\left[-\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\lambda^3 + (1-\lambda)^3\right)\right] \cdot \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x}{\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right] \cdot \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x} = 6\lambda^2 - 6\lambda + 1.$$

□

Všimněme si tohoto důsledku právě dokázané věty. Za uvedených předpokladů bude zobecněné obdélníkové pravidlo nejlepší, zvolíme-li za λ některý z kořenů polynomu $6\lambda^2 - 6\lambda + 1$, tzn.

$$\lambda = \lambda_* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,21 \quad \text{nebo} \quad \lambda = \lambda^* = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,79.$$

Následující tabulka ukazuje chyby při numerické integraci $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$.

	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 100$
$o_0(n)$	$1,65 \cdot 10^{-2}$	$7,32 \cdot 10^{-3}$	$4,11 \cdot 10^{-3}$	$1,64 \cdot 10^{-4}$
$o_{\frac{1}{2}}(n)$	$-8,25 \cdot 10^{-3}$	$-3,66 \cdot 10^{-3}$	$-2,06 \cdot 10^{-3}$	$-8,22 \cdot 10^{-5}$
$o_{\frac{1}{5}}(n)$	$6,64 \cdot 10^{-4}$	$2,94 \cdot 10^{-4}$	$1,65 \cdot 10^{-4}$	$6,58 \cdot 10^{-6}$
$o_{\lambda_*}(n)$	$4,52 \cdot 10^{-6}$	$8,92 \cdot 10^{-7}$	$2,82 \cdot 10^{-7}$	$4,51 \cdot 10^{-10}$

Poděkování. Tato práce byla podpořena grantem MŠMT MSM6198910027.

L i t e r a t u r a

[1] Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F.: *Numerical Mathematics.* Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[2] Jarník, V.: *Integrální počet (I).* Academia, Praha, 1984.