Josef Král

Poznámka o lineární míře a délce cesty v metrickém prostoru

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 4 (1963), No. 1, 1--10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142152`

1963 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE — MATHEMATICA ET PHYSICA NO. 1, PAG. 1—10

POZNÁMKA O LINEÁRNÍ MÍŘE A DÉLCE CESTY V METRICKÉM PROSTORU

JOSEF KRÁL

Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy v Praze
(Došlo dne 11. července 1960)

V poznámce je vyšetřena souvislost mezi lineární Hausdorffovou mírou a délkou (nespojité) cesty v libovolném metrickém prostoru.

Nechť f je zobrazení intervalu $\langle a, b\rangle$ do metrického prostoru P. Je li $x \in P$, označme symbolem $N_f(x)$ $(0 \leqq N_f(x) \leqq \infty)$ počet bodů množiny $f^{-1}(x)$. Dále buď Λ lineární Hausdorffova míra v P. Je známo, že v případě spojitého zobrazení f je funkce N_f borelovsky měřitelná a platí vzorec

$$\int_P N_f(x) \, \mathrm{d}\Lambda(x) = Lf,$$

kde Lf značí délku cesty f. (Viz H. FEDERER [2], (4.3), L. C. YOUNG [9], (4.1), G. NÖBELING [7]. V pracích [7], [9] je vyšetřován případ, kdy P je euklidovský prostor. Důkaz, který je podán v [9], str. 280, platí však bez podstatné změny i pro libovolný metrický prostor.) Jestliže P splývá s reálnou osou E_1, redukuje se tato věta na známou BANACHOVU větu o variaci spojité funkce. Funkce N_f se v tomto případě nazývá Banachovou indikatricí funkce f (por. [6], kap. VIII, § 5). Souvislost mezi variací reálné funkce a integrálem její Banachovy indikatrice vyšetřovali pro nespojité reálné funkce S. M. LOZINSKIJ [4], [5], M. COTLAR a E. ROXIN [1] (posledně citovaný článek nebyl autoru dostupný; citace je převzata z Math. Rev. 1950, str. 336). V předkládané poznámce vyšetříme odpovídající otázku pro případ funkcí, jichž hodnoty leží v libovolném metrickém prostoru.

Označení. P je stále pevný metrický prostor s metrikou ϱ. Pro $A \subset P$ značí diam A průměr množiny A. Symbolem Λ značíme vnější lineární Hausdorffovu míru v P odvozenou z metriky ϱ. Dále bude f stále značit zobrazení intervalu $\langle a, b\rangle$ do prostoru P. Konečně buď

$$\omega_f(t) = \inf_U \operatorname{diam} f(U),$$

kde U probíhá všechna okolí bodu t v $\langle a, b\rangle$, a položme $C = f(\langle a, b\rangle)$.

Lemma 1. *Buď γ libovolné spočetné pokrytí množiny C. Potom*

$$\varrho(f(a), f(b)) \leqq \sum_{S \in \gamma} \operatorname{diam} S + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \omega_f(t).$$

Důkaz stačí provést za předpokladu, že součet na pravé straně (1) je konečný. Pak specielně množina D všech bodů nespojitosti zobrazení f je nejvýše spočetná. Zvolme $k \in E_1$ tak, aby

$$\sum_{S \in \gamma} \operatorname{diam} S + \sum_{t \in D} \omega_f(t) < k$$

a přiřaďme každé množině S okolí $G(S)$ v P a každému $t \in D$ okolí $U(t)$ v $\langle a, b\rangle$ tak, aby

$$\sum_{S \in \gamma} \operatorname{diam} G(S) + \sum_{t \in D} \operatorname{diam} f(U(t)) < k \cdot$$

Značí-li pro $M \subset \langle a, b\rangle$ symbol int M vnitřek množiny M vzhledem k $\langle a, b\rangle$, pak systém $\mathfrak{M}$ tvořený všemi množinami int $f^{-1}(G(S))$ $(S \in \gamma)$ a $U(t)$ $(t \in D)$ tvoří (otevřené) pokrytí intervalu $\langle a, b\rangle$. Skutečně, pro $t \in D$ je zřejmě $t \in U(t) \in \mathfrak{M}$; je-li na druhé straně $t \in \langle a, b\rangle - D$ a zvolíme-li $S \in \gamma$ tak, že $f(t) \in S$, pak z otevřenosti množiny $G(S)$ a ze spojitosti zobrazení f v bodě t plyne, že $t \in \operatorname{int} f^{-1}(G(S))$. Ze systému $\mathfrak{M}$ je tedy možno vybrat prostý konečný podsystém $M_1, \ldots, M_p$ tak, že $a \in M_1$, $M_h \cap M_{h+1} \neq 0$ $(1 \leqq h < p)$, $b \in M_p$. Potom platí

$$\varrho\big(f(a), f(b)\big) \leqq \sum_{h=1}^{p} \operatorname{diam} f(M_h) < k.$$

Vzhledem k tomu, že k bylo docela libovolné číslo splňující (2), je tím naše tvrzení dokázáno.

Lemma 2. $\varrho\big(f(a), f(b)\big) \leqq \Lambda C + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \omega_f(t).$

Důkaz plyne snadno z definice lineární Hausdorffovy míry a z lemmatu 1.

Poznámka 1. Nechť pro $x \in P$ a $I \subset \langle a, b\rangle$ značí $N_f(x; I)$ počet bodů množiny $f^{-1}(x) \cap I$. K tomu, aby pro každý interval $I \subset \langle a, b\rangle$ byla funkce $N_f(x; I)$ Λ — měřitelná, je nutno a stačí, aby pro každý interval $I \subset \langle a, b\rangle$ byla Λ — měřitelná množina $f(I)$.

Důkaz. Nutnost plyne ihned z rovnosti $f(I) = \{x; N_f(x; I) > 0\}$. Naopak, nechť pro každý interval $J \subset \langle a, b\rangle$ je množina $f(J)$ Λ — měřitelná a zvolme libovolně interval $I \subset \langle a, b\rangle$. Rozdělme pro každé n interval I na 2^n disjunktních intervalů $I_1^n \ldots I_{2^n}^n$ stejné délky tak, aby každý interval I_j^{n+1} byl částí některého $I_{k_j}^n$. Označíme-li symbolem φ_k^n charakteristickou funkci (na P) množiny $f(I_k^n)$, pak funkce $N^n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \varphi_k^n(x)$ tvoří neklesající posloupnost Λ — měřitelných funkcí s limitou $N_f(x; I)$. (Por. důkaz Banachovy věty v [6], kap. VIII, § 5.) Tedy také $N_f(x; I)$ je Λ — měřitelná funkce.

Poznámka 2. Symbol D bude v dalším vždy značit množinu všech bodů nespojitosti zobrazení f. Je-li množina D nejvýše spočetná, pak množina C (opatřená metrikou ϱ) je separabilním metrickým prostorem. Zvolíme-li totiž v $\langle a, b\rangle$ hustou podmnožinu H, pak množina $f(H) \cup f(D)$ je hustá v C.

Lemma 3. *Je-li množina D nejvýše spočetná, pak pro každý interval $I \subset \langle a, b\rangle$ je množina $f(I)$ analytická (a tedy Λ — měřitelná*[1]*).*

Důkaz. Z předchozí poznámky snadno plyne, že důkaz stačí provést za předpokladu, že prostor P je separabilní a úplný. Zvolme pevně interval $I \subset \langle a, b\rangle$; zřejmě možno hned předpokládat, že I je kompaktní. Pro $t \in I$ buď $K(t)$ množina všech bodů x tvaru $x = \lim\limits_n f(t_n)$, kde $t_n \in I$, $\lim\limits_n t_n = t$. Množina $K(t)$ je uzavřená v P a množina $H(t) = \{t\} \times (K(t) - \{f(t)\})$ má tedy typ F_σ v $I \times P = Q$. Označme symbolem $\tilde{C}$ množinu všech bodů $[t, f(t)] \in Q$, kde $t \in I$. Snadno lze zjistit, že množina

$$\tilde{C} \cup \bigcup_{t \in I} (\{t\} \times K(t)) = A$$

je uzavřená v Q. Množina $A - \bigcup\limits_{t \in D} H(t)$ má tedy typ G_δ a množina $f(I)$, jež vznikne projekcí $\tilde{C}$ na prostor P, je tedy analytická (viz [3], kap. III, § 35).

Definice 1. Budeme říkat, že f splňuje podmínku BC, když $\operatorname{diam} f(I_n) \to 0$ pro každou posloupnost intervalů $I_n \subset \langle a, b\rangle$ splňující vztahy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset, \quad I_n \supset I_{n+1} \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Věta 1. *Splňuje-li f podmínku BC, pak množina D všech bodů nespojitosti zobrazení f je nejvýše spočetná, množina $f(I)$ má typ G_δ pro každý interval $I \subset \langle a, b\rangle$ a funkce $N_f(x; I)$ je funkcí třetí třídy Baireovy klasifikace.*

Důkaz. Buď $D_n = \left\{t;\ t \in \langle a, b\rangle,\ \omega_f(t) \geqq \frac{1}{n}\right\}$. Vnořme P isometricky do úplného metrického prostoru P^*. Protože pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ existují limity $\lim\limits_{\tau \to t-} f(\tau) = f(t-)$, $\lim\limits_{\tau \to t+} f(\tau) = f(t+)$ (píšeme $f(a-) = f(a)$, $f(b+) = f(b)$), je množina D_n konečná. Množina $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ je tedy nejvýše spočetná. Množina

$$C \cup \bigcup_{t \in D} \{f(t+), f(t-)\}$$

je uzavřená v P^*, takže množina C má typ G_δ. Je patrno, že pro vůbec každý interval $J \subset \langle a, b\rangle$ je množina $f(J)$ typu G_δ. Definujeme-li funkce $N^n(x)$ stejně jako v poznámce 1, pak funkce $N^n(x)$ jsou tedy funkcemi druhé třídy (Baireovy klasifikace) a funkce $N(x; I) = \lim\limits_n N^n(x)$ je funkcí třetí třídy.

Věta 2. *Jestliže f nesplňuje podmínku BC, pak buď*

$$\sum_{t \in \langle a, b\rangle} \omega_f(t) = \infty \tag{4}$$

nebo

$$\int_P N_f(x) \, \mathrm{d}\Lambda(x) = \infty. \tag{5}$$

---

[1]) Viz [8], kap. II.

Důkaz. Předpokládejme, že f nesplňuje podmínku BC a že neplatí (4). Množina D je tedy spočetná a podle lemmatu 3 a poznámky 1 je každá funkce $N_f(x; I)$, kde I je interval obsažený v $\langle a, b\rangle$, Λ — měřitelná. Buď nyní $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost intervalů splňující (3), pro niž $\lim_n \operatorname{diam} f(I_n) = l > 0$. Možno hned předpokládat, že $I_1 = \langle a, b\rangle$. Z lemmatu 2 dostáváme odhad

$$\int_P N_f(x; I_n) \, d\Lambda(x) \geqq \Lambda f(I) \geqq \operatorname{diam} f(I_n) - \sum_{t \in I_n} \omega_f(t).$$

Protože $\lim_n \sum_{t \in I_n} \omega_f(t) = 0$, je

$$\lim_n \int_P N_f(x; I_n) \, d\Lambda(x) \geqq l > 0 \cdot$$

Avšak $\{N_f(x; I_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných funkcí taková, že

$$(x \in P, N_f(x) < \infty) \Rightarrow \lim_n N_f(x; I_n) = 0.$$

Odtud je patrno, že $\int_P N_f(x) \, d\Lambda(x) = \infty$.

Definice 2. Položme $\alpha_f(a-) = \alpha_f(b+) = \beta_f(a-) = \beta_f(b+) = 0$, $\alpha_f(t-) = \lim_{\tau \to t-} \operatorname{diam} f\big((\tau, t\rangle)\big)$, $\beta_f(t-) = \limsup_{\tau \to t-} \varrho\big(f(\tau), f(t)\big)$ pro $t \in (a, b\rangle$, $\alpha_f(t+) = \lim_{\tau \to t+} \operatorname{diam} f\big(\langle t, \tau)\big)$, $\beta_f(t+) = \limsup_{\tau \to t+} \varrho\big(f(\tau), f(t)\big)$ pro $t \in \langle a, b)$, $\alpha_f(t) = \alpha_f(t+) + \alpha_f(t-)$, $\beta_f(t) = \beta_f(t+) + \beta_f(t-)$ pro $t \in \langle a, b\rangle$.

Symbolem Lf označíme supremum všech součtů tvaru $\sum_{j=1}^{n} \varrho\big(f(t_j), f(t_{j-1})\big)$, kde $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ je libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Lemma 4. *Jestliže funkce N_f je Λ — měřitelná, pak*

$$Lf \leqq \int_P N_f(x) \, d\Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \alpha_f(t). \tag{6}$$

Důkaz. Vzhledem k větě 2 můžeme předpokládat, že f splňuje podmínku BC. Zvolme libovolně dělení

$$a = t_0 < \ldots < t_n = b. \tag{7}$$

Označíme-li symbolem f_j zobrazení, které vznikne omezením definičního oboru zobrazení f na interval $\langle t_{j-1}, t_j\rangle$, dostáváme podle lemmatu 2

$$\sum_{j=1}^{n} \varrho\big(f(t_j), f(t_{j-1})\big) \leqq \sum_{j=1}^{n} \Big[\Lambda f(\langle t_{j-1}, t_j\rangle) +$$

$$+ \sum_{t \in \langle t_{j-1}, t_j\rangle} \omega_{f_j}(t)\Big] \leqq \sum_{j=1}^{n} \Lambda f(\langle t_{j-1}, t_j\rangle) + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \alpha_f(t).$$

Jelikož dělení (7) bylo libovolně zvoleno a

$$\sum_{j=1}^{n} \Lambda f(\langle t_{j-1}, t_j\rangle) \leqq \int_P N_f(x) \,\mathrm{d}\, \Lambda(x),$$

plyne odtud (6).

Poznámka 3. Ve vzorci (6) je možno součet $\sum_{t \in \langle a, b\rangle} \alpha_f(t)$ zaměnit součtem $\sum_{t \in \langle a, b\rangle} \beta_f(t)$.

Důkaz. Ježto $\alpha_f(t) \leqq 2\, \beta_f(t)$, je nerovnost

$$L f \leqq \int_P N_f(x) \,\mathrm{d}\, \Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \beta_f(t) \tag{8}$$

správná vždy, když f nesplňuje podmínku BC (viz větu 2) — pokud ovšem N_f je Λ — měřitelná. Jestliže však f splňuje podmínku BC, pak $\alpha_f(t) = \beta_f(t)$ a (8) plyne z (6).

Lemma 5. *Buď R spočetný disjunktní systém intervalů obsažených v $\langle a, b\rangle$ a buď E spočetná množina splňující inklusi*

$$E \subset \langle a, b\rangle - \bigcup R.$$

Potom platí

$$\sum_{I \in R} \operatorname{diam} f(I) + \sum_{t \in E} \alpha_f(t) \leqq Lf.$$

Důkaz je možno přenechat čtenáři. Podotýkáme, že důkaz stačí provést za předpokladu, že $Lf < \infty$ a že systém R a množina E jsou konečné.

Lemma 6. *Jestliže $Lf < \infty$, pak f splňuje podmínku BC.*

Důkaz přenecháváme čtenáři. Poznamenejme jen, že z každé nerostoucí posloupnosti intervalů $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ o prázdném průniku je možno vybrat podposloupnost $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ o některé z následujících dvou vlastností (I), (II):

(I) Všechny intervaly J_n mají společný pravý krajní bod a jsou otevřené zprava.

(II) Všechny intervaly J_n mají společný levý krajní bod a jsou otevřené zleva.

Lemma 7. *Buď $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková posloupnost množin, že pro $m < n$ je buď $I_m \cap I_n = \emptyset$ nebo $I_m \supset I_n$. Jestliže z posloupnosti $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ nelze vybrat nekonečnou disjunktní podposloupnost, pak z ní lze vybrat podposloupnost $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $J_n \supset J_{n+1}$ pro všechna n.*

Důkaz. Řekneme, že m má vlastnost V, když existuje pouze konečně mnoho čísel $n > m$ tak, že $I_m \supset I_n$. Jestliže množina přirozených čísel s vlastností V je nekonečná, pak ze systému všech členů posloupnosti $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze vybrat nekonečný disjunktní podsystém. Jestliže přirozených čísel s vlastností V je pouze konečný počet, pak z $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze vybrat nerostoucí podposloupnost.

Lemma 8. *Buď dána posloupnost* $\{\Delta^n\}_{n=1}^{\infty}$ *dělení intervalu* $\langle a, b\rangle$, $\Delta^n = \{a = t_0^n < \ldots < t_{k_n}^n = b\}$, *a nechť*

$$\Delta^n \subset \Delta^{n+1}\ (n = 1, 2, \ldots),\ D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta^n,\ \lim_n \max_j\,(t_j^n - t_{j-1}^n) = 0. \tag{9}$$

Potom

$$\sum_{j=1}^{k_n} \varrho\left(f(t_j^n), f(t_{j-1}^n)\right) \nearrow Lf\ (n \to \infty). \tag{10}$$

Jestliže $Lf < +\infty$, *pak*

$$\lim_n \max_{1 \leqq j \leqq k_n} \operatorname{diam} f\left((t_{j-1}^n, t_j^n)\right) = 0. \tag{11}$$

Důkaz. Zvolme libovolně reálné číslo k tak, aby

$$k < Lf \tag{12}$$

a buď $a = u_0 < \ldots < u_p = b$ takové dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, že

$$\sum_{i=1}^{p} \varrho\left(f(u_{i-1}), f(u_i)\right) > k.$$

Nechť $u_{i_1}, \ldots u_{i_r}$ jsou právě všechny body množiny $\{u_1, \ldots, u_p\}$, v nichž je f spojité, a zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby

$$k + r\,\varepsilon < \sum_{i=1}^{p} \varrho\left(f(u_{i-1}), f(u_i)\right). \tag{13}$$

Zvolme dále $\delta > 0$ tak, aby

$$2\,\delta < \min_{1 \leqq i \leqq p} (u_i - u_{i-1})$$

a aby pro $s = 1, \ldots, r$ platily implikace

$$(u \in \langle a, b\rangle, |u - u_{i_s}| < \delta) \Rightarrow \varrho\left(f(u), f(u_{i_s})\right) < \frac{1}{2}\,\varepsilon\,.$$

Buď nyní n tak velké, že

$$\{u_1, \ldots, u_p\} - \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}\} \subset \Delta^n,$$

$$\max_{1 \leqq j \leqq k_n} (t_j^n - t_{j-1}^n) < \delta.$$

Přiřaďme každému u_{i_s} $(s = 1, \ldots, r)$ bod $\tau_{i_s} \in \Delta^n$ tak, že $|u_{i_s} - \tau_{i_s}| < \delta$, a pišme $\tau_i = u_i$ pro $i \neq i_1, \ldots, i_r$.

Pak $\{\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p\} \subset \Delta^n$ a $\sum_{i=1}^{p} \varrho\left(f(u_{i-1}), f(u_i)\right) < \sum_{i=1}^{p} \varrho\left(f(\tau_{i-1}), f(\tau_i)\right) +$

$$+\, r\,\varepsilon \leqq \sum_{j=1}^{k_n} \varrho\left(f(t_{j-1}^n), f(t_j^n)\right) + r\,\varepsilon.$$

Odtud a z (13) plyne $\sum_{j=1}^{k_n} \varrho\left(f(t_{j-1}^n), f(t_j^n)\right) > k$.

Protože k bylo libovolné číslo splňující (12) a posloupnost

$$\left\{\sum_{j=1}^{k_n} \varrho\left(f(t_{j-1}^n), f(t_j^n)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

je neklesající, je tím (10) dokázáno. Dejme tomu, že $Lf < +\infty$ a neplatí (11). Pak je možno určit intervaly $(t_{h_n-1}^n, t_{h_n}^n) = I_n$ tak, že

$$\liminf_{n \to \infty} \operatorname{diam} f(I_n) = l > 0. \tag{14}$$

Kdyby z množiny členů posloupnosti $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ bylo možno vybrat nekonečný disjunktní podsystém $\{J_n\}$, dostali bychom podle (14) a podle lemmatu 5 $Lf = \infty$, což je spor. Podle lemmatu 7 je tedy možno vybrat z posloupnosti $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ podposloupnost $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $J_n \supset J_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Jestliže $\bigcap_n J_n = \vartheta$, pak (14) dává spor s lemmatem 6. Jestliže $\bigcap_n J_n \neq \vartheta$, pak ovšem $\bigcap_n J_n = \{v\}$, kde v je vzhledem k (14) bodem nespojitosti f. To je však ve sporu s inklusemi

$$\bigcap_n J_n \subset \langle a, b\rangle - \bigcup_n \Delta^n \subset \langle a, b\rangle - D.$$

Lemma 9. $\Lambda C + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \alpha_f(t) \leqq Lf.$

Důkaz stačí provést za předpokladu $Lf < \infty$. Nechť $\{\Delta^n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s vlastnostmi z lemmatu 8 a položme

$$\varepsilon_n = \max_{1 \leq j \leq k_n} \operatorname{diam} f\left((t_{j-1}^n, t_j^n)\right) + \frac{1}{n}.$$

Podle lemmatu 5 platí pro každé n

$$\sum_{j=1}^{k_n} \operatorname{diam} f\left((t_{j-1}^n, t_j^n)\right) + \sum_{j=0}^{k_n} \alpha_f(t_j) \leqq Lf.$$

Buď $\Lambda^\varepsilon C$ infimum všech součtů tvaru $\sum_{A \in R} \operatorname{diam} A$, kde R probíhá všechny spočetné systémy množin $A \subset C$ takové, že $\bigcup R = C$ a $\operatorname{diam} A \leqq \varepsilon$ pro všechna $A \in R$ $(\varepsilon > 0)$. Za tohoto označení máme zřejmě

$$\Lambda^{\varepsilon_n} C + \sum_{j=0}^{k_n} \alpha_f(t_j) \leqq \sum_{j=1}^{k_n} \operatorname{diam} f\left((t_{j-1}^n, t_j^n)\right) + \sum_{j=0}^{k_n} \alpha_f(t_j) \leqq Lf. \tag{15}$$

Protože $\lim \varepsilon_n = 0$, je $\lim \Lambda^{\varepsilon_n} C = \Lambda C$ a z (15) dostáváme limitním přechodem $\Lambda C + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \alpha_f(t) \leqq Lf.$

Lemma 10. $\int_P N_f(x) \, d\Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \alpha_f(t) \leqq Lf$, *kdykoli N_f je Λ — měřitelná.*

Důkaz. Nechť $Lf < \infty$. Pišme $I = \langle a, b \rangle$ a utvořme intervaly I_k^n a funkce N^n stejně jako v poznámce 1. Označme symbolem J_k^n uzávěr intervalu I_k^n a buď f_k^n zobrazení, které vznikne zúžením oboru zobrazení f na interval J_k^n. Pak (viz poznámku 1)

$$\int_P N_f(x)\,\mathrm{d}\Lambda(x) = \lim \int_P N^n(x)\,\mathrm{d}\Lambda(x) = \tag{16}$$

$$= \lim_n \sum_k \Lambda f(I_k^n) = \lim_n \sum_k \Lambda f(J_k^n).$$

Podle lemmatu 9 (v němž zaměníme $\langle a, b \rangle$ a C za J_k^n a $f(J_k^n)$) je

$$\sum_k \Lambda f(J_k^n) + \sum_{t \in \langle a,b \rangle} \alpha_f(t) = \sum_k \left[\Lambda f(J_k^n) + \sum_{t \in J_k^n} \alpha_{f_k^n}(t)\right] \leqq$$

$$\leqq \sum_k Lf_k^n = Lf.$$

Odtud a z (16) ihned plyne

$$\int_P N_f(x)\,\mathrm{d}\Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a,b \rangle} \alpha_f(t) \leqq Lf. \tag{17}$$

Poznámka 4. V nerovnosti (17) je možno $\sum_{t \in \langle a,b \rangle} \alpha_f(t)$ zaměnit za $\sum_{t \in \langle a,b \rangle} \beta_f(t)$.

Věta 3. Jestliže funkce N_f je Λ — měřitelná, pak

$$\int_P N_f(x)\,\mathrm{d}\Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a,b \rangle} \alpha_f(t) = \int_P N_f(x)\,\mathrm{d}\Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a,b \rangle} \beta_f(t) = Lf.$$

Důkaz. Viz lemma 4, poznámku 3, lemma 10 a poznámku 4.

ЗАМЕТКА О ЛИНЕЙНОЙ МЕРЕ И ДЛИНЕ ПУТИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Резюме

Иосеф Крал (Josef Král), Прага

Пусть P — метрическое пространство с метрикой ϱ. Для $A \subset P$ обозначим соответственно через $\operatorname{diam} A$ и ΛA диаметр и внешнюю линейную меру Хаусдорфа множества A. Пусть, далее, f — отображение отрезка $\langle a, b \rangle$ в пространство P и положим

$$\alpha(a-) = \beta(a-) = \alpha(b+) = \beta(b+) = 0,$$

$$\alpha(t-) = \lim_{\tau \to t-} \operatorname{diam} f(\langle \tau, t \rangle) \text{ для } t \in (a, b\rangle,$$

$$\alpha(t+) = \lim_{\tau \to t+} \operatorname{diam} f(\langle t, \tau)) \text{ для } t \in \langle a, b),$$

$$\beta(t-) = \lim_{\tau \to t-} \sup \varrho(f(\tau), f(t)) \text{ для } t \in (a, b\rangle,$$

$$\beta(t+) = \lim_{\tau \to t+} \sup \varrho(f(\tau), f(t)) \text{ для } t \in \langle a, b),$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-) + \alpha(t+),\ \beta(t) = \beta(t-) + \beta(t+),\ t \in \langle a, b\rangle.$$

Если обозначить через $N_f(x)$ ($x \in P$) число точек множества $f^{-1}(x)$ и через Lf длину „пути" f, то формула

$$\int_P N_f(x)\,\mathrm{d}\,\Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \alpha(t) = \int_P N_f(x)\,\mathrm{d}\,\Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \beta(t) = Lf$$

справедлива всегда, когда N_f измерима относительно Λ. Функция N_f принадлежит к третьему классу Бэра, если отображение f удовлетворяет следующему условию BC:

$\lim \operatorname{diam} f(I_n) = 0$ для каждой последовательности интервалов $I_n \subset \langle a, b\rangle$, где $I_n \supset I_{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$), $\bigcap_n I_n = \emptyset$.

С другой стороны, если BC не имеет места, то или

$$\sum_{t \in \langle a, b\rangle} \alpha(t) = \sum_{t \in \langle a, b\rangle} \beta(t) = \infty = Lf,$$

или N_f измерима относительно Λ и

$$\int_P N_f(x)\,\mathrm{d}\,\Lambda(x) = \infty = Lf.$$

A NOTE ON LINEAR MEASURE AND PATH-LENGTH IN A METRICAL SPACE

Summary

Let P be a metrical space equipped with metric ϱ. Denote by Λ the Hausdorff linear measure (corresponding to ϱ) in P. Further, let f be a map of $\langle a, b\rangle$ into P and put

$$\alpha(a-) = \beta(a-) = \alpha(b+) = \beta(b+) = 0,$$

$$\alpha(t-) = \lim_{\tau \to t-} \operatorname{diameter} f((\tau, t\rangle) \text{ for } t \in (a, b\rangle,$$

$$\alpha(t+) = \lim_{\tau \to t+} \operatorname{diameter} f(\langle t, \tau)) \text{ for } t \in \langle a, b),$$

$$\beta(t-) = \lim_{\tau \to t-} \sup \varrho(f(\tau), f(t)) \text{ for } t \in (a, b\rangle,$$

$$\beta(t+) = \lim_{\tau \to t+} \sup \varrho(f(\tau), f(t)) \text{ for } t \in \langle a, b),$$

$$\alpha(t) = \alpha(t-) + \alpha(t+);\ \beta(t) = \beta(t-) + \beta(t+),\ t \in \langle a, b\rangle$$

If $N_f(x)$ ($x \in P$) denotes the number (possibly zero or infinite) of points in $f^{-1}(x)$ and if Lf stands for the length of f, then the formula

$$\int_P N_f(x) \, \mathrm{d} \Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a, b \rangle} \alpha(t) = \int_P N_f(x) \, \mathrm{d} \Lambda(x) + \sum_{t \in \langle a, b \rangle} \beta(t) = Lf$$

is valid whenever N_f is Λ — measurable.

N_f is of the third class of Baire if the following condition BC is fulfilled:
lim diameter $f(I_n) = 0$ for every descending sequence of intervals $I_n \subset \langle a, b \rangle$ with $\bigcap_n I_n = \theta$.

On the other hand, if the condition BC does not take place, then either

$$\sum_{t \in \langle a, b \rangle} \alpha(t) = \sum_{t \in \langle a, b \rangle} \beta(t) = \infty = Lf$$

or else N_f is Λ — measurable and

$$\int_P N_f(x) \, \mathrm{d} \Lambda(x) = \infty = Lf.$$

LITERATURA

[1] M. Cotlar — E. Roxin: On the variation of discontinuous and multivalued functions of a real variable. Revista Unión Mat. Argentina 14 (1949), 38—46 (citováno podle Math. Rev. 1950, str. 336).

[2] H. Federer: Surface area I, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 55 (1944), 420—456.

[3] C. Kuratowski: Topologie I, Wroclaw 1948.

[4] С. М. Лозинский: Об индикатрисе Банаха, ДАН СССР 60, 5, 1948, 765—767.

[5] С. М. Лозинский: Об индикатрисе Банаха, Вестник Лен. унив. сер. мат. мех. и астр., вып. 2, 1958, № 7, 70—87.

[6] I. P. Natanson: Theorie der Funktionen einer reelen Veränderlichen, Berlin 1954 (přel. z ruštiny).

[7] G. Nöbeling: Eine Bemerkung über die Länge einer stetigen Kurve, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., 1949, 41—45.

[8] S. Saks: Theory of the integral, New York.

[9] L. C. Young: On area and length, Fund. Math. XXXV, 1948, 275—302.