

Josef Čermák; R. Zezula

Ein Beitrag zur Theorie der zylindrischen Luftspalte in einem Reaktor

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 12 (1971), No. 1, 3--9

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/142255>

Terms of use:

© Univerzita Karlova v Praze, 1971

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Ein Beitrag zur Theorie der zylindrischen Luftspalte in einem Reaktor

J. ČERMÁK und R. ZEZULA

Kernforschungsinstitut der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften, Prag, und
Mathematisches Institut der Karls-Universität, Prag

Eingegangen am 9. Juli 1970

Die kritische Dimension eines Kernreaktors vergrößert sich, wenn die Neutronen durch einen Hohlraum oder einen Kanal, der durch den Reaktor geführt wird, strömen können. Von der Eingruppendiffusionsnäherung ausgehend, ist in dem Beitrag die Methode zur Berechnung dieses Effektes in einem zylindrischen Reaktor angegeben. Einige Resultate sind durch konkrete numerische Beispiele illustriert und mit den von verschiedenen anderen Autoren erzielten Ergebnissen verglichen worden.

Einleitung

Der Effekt der Hohlräume ist bereits vielfach von verschiedenen Autoren gründlich untersucht worden. Nichtsdestoweniger meinen wir, dass einzelne Resultate, die wir erhielten, geeignet sind, gewisses Interesse zu erwecken. Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie man an die Berechnung des durch einen Kanal verursachten Effektes herantreten kann. Eine von ihnen, die üblichste, beruht in der Einführung der sog. Extrapolationslänge λ , die in der zylindrischen Geometrie durch den Ausdruck

$$\lambda = \frac{\varrho(a, z)}{\left. \frac{\partial \varrho(r, z)}{\partial r} \right|_{r=a}}$$

definiert ist, wobei z die mit der Kanalachse parallel verlaufende Koordinate, a den Kanalradius und $\varrho(r, z)$ die Diffusionsnäherung der Neutronendichte bedeuten, λ muss auf Grund der Transporttheorie festgesetzt werden. Falls λ bekannt, so verläuft die weitere Berechnung ganz analog mit der Berechnung der Wirksamkeit eines zylindrischen Regelstabes, der vollständig in den Reaktor eingetaucht worden ist.

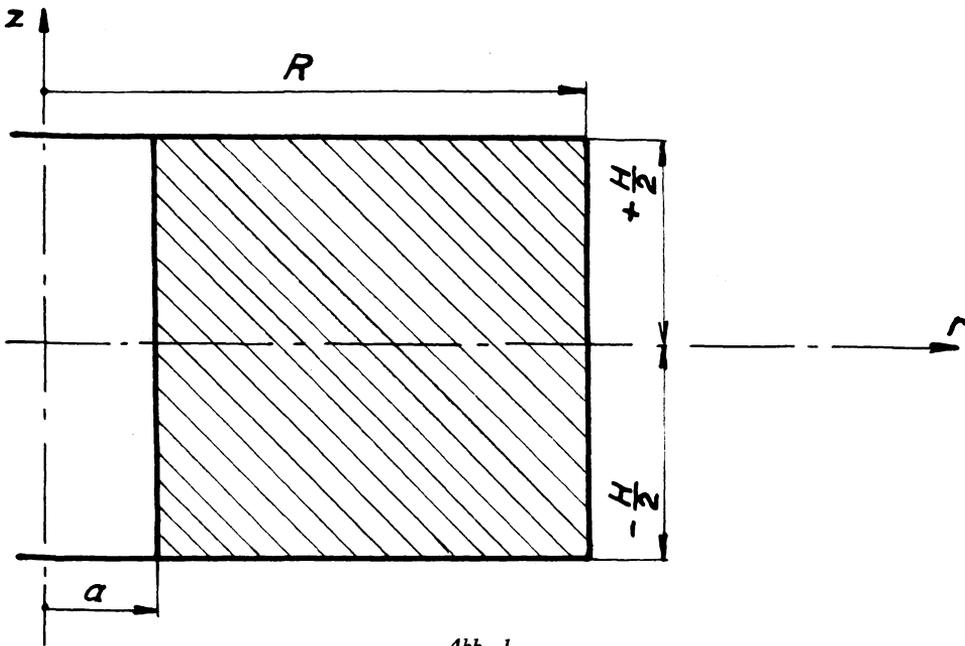
Man kann aber auch direkt von der Diffusionsnäherung ausgehen und den Hohlraumeffekt durch eine spezielle Randbedingung in Betracht nehmen, die die Neutronenbilanz auf der Hohlraumoberfläche ausdrückt, wie es z. B. in [1], [2] durchgeführt worden ist. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass es gleichzeitig eine Angabe über die Deformation der Neutronendichte in der Umgebung des Kanals

in der Richtung der Kanalachse liefert, wobei es noch ziemlich einfach im Vergleich zu der genaueren Methode ist, die gegebenenfalls auf der Transporttheorie basiert. Auf diese Weise werden wir auch in unseren Erwägungen fortfahren.

Formulierung und Lösung des Problems

Wir nehmen einen Reaktor an, der sich im kritischen Zustand befindet. In den Reaktor werden wir einen zentralen zylindrischen Hohlraum einführen und die Veränderung im geometrischen Parameter bestimmen, die gerade notwendig ist, um den Reaktor kritisch zu erhalten.

Um grundlegende Relationen zu erhalten, werden wir uns auf das in Abb. 1. dargestellte einfache Beispiel beschränken.



Im Zentrum eines homogenen Reaktors, dessen Höhe H und Radius R ist, befindet sich ein zylindrischer leerer Hohlraum, dessen Radius a ist (unter R und H verstehen wir den Extrapolationswert der zuständigen Grösse).

Die einfachste physikalische Beschreibung dieser Konfiguration erhalten wir mittels der Eingruppendiffusionsnäherung. Den Neutronenfluss $\varphi = \varphi(r, z)$ und den Wert des geometrischen Parameters B^2 erhalten wir dann durch die Lösung des folgenden Rand- und Eigenwertproblems:

$$\Delta \varphi(r, z) + B^2 \varphi(r, z) = 0 \quad (1)$$

wobei an der äusseren Extrapolationsgrenze des Reaktors gilt

$$\varphi(R, z) = \varphi\left(r, \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (2 \text{ a, b})$$

und auf der Oberfläche des Hohlraumes ($r = a$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -K \varphi \quad (3)$$

(auf der linken Seite von Gleichung (3) ist die Ableitung in Richtung der äusseren Normale zu nehmen). K ist ein linearer Operator, der für den zu lösenden Fall (leerer Hohlraum) nachstehend beschrieben werden kann

$$K\varphi = \frac{3\Sigma_s}{4} \varphi(a, z) - 3\Sigma_s \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz' T(|z - z'|) \varphi(a, z') \quad (4)$$

wobei

$$T(|z - z'|) = \int_0^{2\pi} d\omega \frac{a^3(1 - \cos \omega)^2}{4\pi r_s^4}$$

$$x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega, \quad z = z, \quad r_s = \{(z - z')^2 + 2a^2(1 - \cos \omega)\}^{\frac{1}{2}}$$

Bis jetzt sind wir ganz analog wie in den Arbeiten [1] und [2] fortgeschritten. Jetzt aber werden wir bei der Lösung des Problems die Rayleigh-Ritzsche Variationsmethode anwenden. Diese Methode hat im Vergleich zu den in [1] und [2] angewandten Methoden den wesentlichen Vorzug, dass sie mathematisch ganz rigoros ist. Der gesuchte geometrische Parameter B^2 ist das Minimum des Funktionals $(Au, u) = (-\Delta u, u)$ unter der Nebenbedingung $(u, u) = 1$, wobei das Skalarprodukt durch die Relation

$$(u, v) = 2\pi \int_a^R r dr \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz uv \quad (5)$$

$$(Au, v) = (-\Delta u, v) = 2\pi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_a^R \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} r dr dz + 2\pi a \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} u(a, z) K v dz \quad (6)$$

gegeben ist.

Nach der Rayleigh-Ritzschen Methode müssen wir jetzt die kleinste Wurzel μ_0 der nachstehenden algebraischen Gleichung

$$\begin{pmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \mu(\varphi_1, \varphi_1), (A\varphi_2, \varphi_1) - \mu(\varphi_2, \varphi_1), \dots, (A\varphi_n, \varphi_1) - \mu(\varphi_n, \varphi_1) \\ \vdots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \mu(\varphi_1, \varphi_n), \dots, (A\varphi_n, \varphi_n) - \mu(\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} = 0 \quad (6a)$$

finden.

φ_k sind sog. Koordinatenfunktionen, die wir in der Form annehmen

$$\varphi_k = N_k \mathcal{J}_0(\alpha_k r) \cos(\beta_k z), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

wo α_k die Wurzeln der Gleichung $\mathcal{J}_0(\alpha R) = 0$ sind,

$$\beta_k = (2k + 1) \frac{\pi}{H}$$

und N_k der Normierungsfaktor ist, den man aus der Bedingung

$$(\varphi_k, \varphi_k) = 1$$

berechnet. (φ_k sind somit die Eigenfunktionen des baren Reaktors ohne Hohlraum).

Nach [2] gilt, wenn wir $|z - z'| = x$ bezeichnen

$$T(x) = \int_0^{2\pi} d\omega \frac{a^3(1 - \cos \omega)^2}{4\pi r_s^4} = \frac{1}{8a} \left\{ 1 - \left| \frac{6 \frac{x}{a} + \frac{x^3}{a^3}}{\left(\frac{x^2}{a^2} + 4\right)^{\frac{3}{2}}} \right| \right\} \cong \quad (8)$$

$$\cong \begin{cases} \frac{0,99}{8a} e^{-\left|\frac{x}{a}\right|} & \text{für } \left|\frac{x}{a}\right| \leq 6 \\ \frac{1}{8a} \frac{6a^4}{x^4} & \text{für } \left|\frac{x}{a}\right| > 6 \end{cases} \quad (8)$$

In dieser Näherung kann man – wenn auch nach längeren Berechnungen – die Matrixelemente (6) in folgender Weise ausdrücken:

$$(A\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} [\mathcal{J}_1(i, j) + \mathcal{J}_2(i, j)] + \mathcal{J}_3(i, j) \quad (9)$$

wo

$$\mathcal{J}_1(i, i) = \alpha_i^2 \left\{ 1 + N_i^2 \pi H \frac{a}{\alpha_i} \mathcal{J}_0(\alpha_i a) \mathcal{J}_1(\alpha_i a) \right\} \quad (10)$$

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi H}{2} \{ R^2 [\mathcal{J}_1(\alpha_i R)]^2 - a^2 \{ [\mathcal{J}_0(\alpha_i a)]^2 + [\mathcal{J}_1(\alpha_i a)]^2 \}}} \quad (11)$$

$$\mathcal{J}_2(i, i) = \beta_i^2 \quad (12)$$

Für $\mathcal{J}_3(i, j)$ gilt die Relation

$$\mathcal{J}_3(i, j) = \delta_{ij} \cdot \mathcal{J}_3^*(i, j) - \mathcal{J}_3^{**}(i, j) \quad (13)$$

wo

$$\mathcal{J}_3^*(i, i) = 2\pi a \frac{3\Sigma_s}{4} N_i^2 [\mathcal{J}_0(\alpha_i a)]^2 \frac{H}{2} \quad (14)$$

$$\mathcal{F}_3^{**}(i, j) = K_{ij} \{ \delta_{ij} C_1(j) H + 2 \mathcal{F}_{31}^{**}(i, j) - W_{ij} \} \quad (15)$$

Die Werte K_{ij} und $C_1(j)$ sind durch folgende Relationen gegeben:

$$K_{ij} = 6\pi a \Sigma_i N_i N_j \mathcal{f}_0(\alpha_i a) \mathcal{f}_0(\alpha_j a) \quad (16)$$

$$C_1(j) = \frac{0,99}{8a} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \beta_j^2} \left\{ \frac{1}{a} [1 - e^{-6} \cdot \cos(6a\beta_j)] + \beta_j e^{-6} \sin(6a\beta_j) \right\} \quad (17)$$

Den Wert W_{ij} berechnen wir wie folgt

$$\begin{aligned} W_{ij} = W_{ji} = & (1 - \delta_{ij}) \left[\frac{0,99}{8a} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \beta_i^2} e^{-6} \right] \left\{ \left[\left(-\frac{1}{a}\right) \cos(6a\beta_j) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_j \sin(6a\beta_j) \right] \left[(-1)^{i+j+1} \frac{\sin(\beta_i + \beta_j) 6a}{\beta_i + \beta_j} + (-1)^{i-j} \frac{\sin(\beta_i - \beta_j) 6a}{\beta_i - \beta_j} \right] - \right. \\ & \left. - \left[\frac{1}{a} \sin(6a\beta_j) + \beta_j \cos(6a\beta_j) \right] \left[\frac{(-1)^{j-i}}{\beta_j - \beta_i} + \frac{(-1)^{j+i+1}}{\beta_j + \beta_i} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (-1)^{j-i} \frac{\cos(\beta_j - \beta_i) 6a}{\beta_j - \beta_i} - (-1)^{j+i+1} \frac{\cos(\beta_j + \beta_i) 6a}{\beta_j + \beta_i} \right] \right\} + \\ & + \delta_{ij} \left[\frac{0,99}{8a} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \beta_j^2} e^{-6} \right] \left\{ \left[\left(-\frac{1}{a}\right) \cos(6a\beta_j) + \beta_j \sin(6a\beta_j) \right] \frac{1}{2\beta_j} [12a\beta_j - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin(12a\beta_j)] - \left[\frac{1}{a} \sin(6a\beta_j) + \beta_j \cos(6a\beta_j) \right] \frac{1}{2\beta_j} [\cos(12a\beta_j) - 1] \right\} - \\ & - \frac{0,99}{8a} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \beta_i^2} \right] \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \beta_i^2} \right] (-1)^{i+j} 2\beta_j \left\{ \beta_i - e^{-6} \left[\frac{1}{a} \sin(6a\beta_i) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_i \cos(6a\beta_i) \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

Die Werte $\mathcal{F}_{31}^{**}(i, j)$ berechnet man aus der Relation

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{31}^{**}(i, j) = \mathcal{F}_{31}^{**}(j, i) = & -\frac{3}{4} \gamma_j^3 \left\{ D_1(j) \mathcal{F}_{311}^{**}(i, j) + D_2(j) \mathcal{F}_{312}^{**}(i, j) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} [(-1)^j \mathcal{F}_{314}^{**}(i, j) + \mathcal{F}_{316}^{**}(i, j)] \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

in der

$$\gamma_j = a\beta_j \quad (20)$$

$$D_1(j) = \frac{-\cos 6\gamma_j}{3(6\gamma_j)^3} + \frac{\sin 6\gamma_j}{6(6\gamma_j)^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{\cos 6\gamma_j}{6\gamma_j} + \sin 6\gamma_j \right) \quad (21)$$

$$D_2(j) = \frac{-\sin 6\gamma_j}{3(6\gamma_j)^3} - \frac{\cos 6\gamma_j}{6(6\gamma_j)^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{\sin 6\gamma_j}{6\gamma_j} - ci 6\gamma_j \right) \quad (22)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{311}^{**}(i, j) = \delta_{ij} \frac{H}{2} - \frac{H}{2\pi} \left\{ \frac{(-1)^{i+j+1} \sin \left[(i+j+1) 12a \frac{\pi}{H} \right]}{2(i+j+1)} + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{i-j} \sin \left[(i-j) 12a \frac{\pi}{H} \right]}{(i-j) 12a \frac{\pi}{H}} 6a \frac{\pi}{H} \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{312}^{**}(i, j) = (1 - \delta_{ij}) \frac{H}{2\pi} \left\{ \frac{(-1)^{j+i+1} \cos \left[(j+i+1) 12a \frac{\pi}{H} \right]}{2(j+i+1)} + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{j-i} \cos \left[(j-i) 12a \frac{\pi}{H} \right]}{2(j-i)} - \frac{(-1)^{j+i+1}}{2(j+i+1)} - \frac{(-1)^{j-i}}{2(j-i)} \right\} + \\ + \delta_{ij} \frac{1}{4\beta_i} [1 - \cos(12\gamma_i)] \quad (24) \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{314}^{**}(i, j) = (-1)^i \frac{1}{\beta_i} \left(\frac{\beta_i}{\beta_j} \right)^2 \left\{ ci(\beta_i H) - ci(6\gamma_i) + \frac{\sin 6\gamma_i}{6\gamma_i} \right\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 2 \mathcal{J}_{316}^{**}(i, j) = (-1)^{i+j+1} \frac{1}{\beta_i + \beta_j} \{ ci(\beta_j H) - ci(\beta_i H) - \sin[(\beta_i + \beta_j) 6a] si(6\gamma_j) + \\ + ci(6\gamma_i)[1 - \cos(\beta_i + \beta_j) 6a] \} + (1 - \delta_{ij}) (-1)^{i-j} \frac{1}{\beta_i - \beta_j} \{ -[ci(\beta_j H) - \\ - ci(\beta_i H)] - \sin[(\beta_i - \beta_j) 6a] si(6\gamma_j) - ci(6\gamma_i)[1 - \cos(\beta_i - \beta_j) 6a] \} + \\ + \delta_{ij} \frac{1}{\beta_j} \{ [\beta_j H \cdot si(\beta_j H) - 2] - [6\gamma_j si(6\gamma_j) + \cos(6\gamma_j) - 1] \} \quad (26) \end{aligned}$$

Zur Illustration haben wir nachstehendes numerisches Beispiel gewählt, das wir, zwecks Vergleich, der Arbeit [1] entnommen haben:

$$R = 155 \text{ cm}, \quad H = 256 \text{ cm}, \quad \frac{1}{3\Sigma_s} = 0,8 \text{ cm}, \quad a = 6,5 \text{ cm}$$

Der berechnete Wert B^2 wird in der nachstehenden Tabelle (Tab. 1) angegeben. Die erste Kolonne gibt die gewählte Zahl der Koordinatenfunktionen (7) resp. auch den Grad n der algebraischen Gleichung (6a) an

Tab. 1.

n	$B^2 \times 10^4$
1	3,996500
2	3,996490
3	3,996482

In der Arbeit [1] wurde ein anderes Verfahren verwendet, das aber zugleich Iterationscharakter hat. Bei der ersten Näherung ist nach [1] $B^2 = 3,9706 \times 10^{-4}$, bei der sechsten ist $B^2 = 3,9698 \times 10^{-4}$ und bei der zehnten ist $B^2 = 3,9701 \times 10^{-4}$.

(Vollständigkeitshalber wollen wir anführen, dass der geometrische Parameter des baren Reaktors für die angeführten Dimensionen ist $B_0^2 = 3,9135 \times 10^{-4}$). Es fällt auf den ersten Blick auf, dass die angeführten Resultate voneinander abweichen. Der Grund für diesen Unterschied kann in der allgemeinen Verschiedenheit der beiden Methoden liegen; nichtsdestoweniger – falls die in [1] verwendete Methode richtig ist – ist die Differenz im berechneten B^2 doch ziemlich gross. Ein weiterer Grund für die Verschiedenheit der Resultate dürfte sich wohl daraus ergeben, dass in der Arbeit [1] das Matrixelement

$$\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} u K v dz,$$

das dort in einem anderen Zusammenhang vorkommt, auf ganz verschiedene Art (siehe Formel (11) in [1] wo über unendliches Gebiet integriert wird) als dies bei uns der Fall ist, berechnet worden ist. Als wir aber aus [1] diesen Ausdruck – der, nebenbei gesagt, wesentlich einfacher ist, als der von uns in (13) berechnete Ausdruck – zur Berechnung des Funktional (6) übernahmen, so erhielten wir nach der Ritzschen Methode physikalisch sinnlose Resultate.

Mit Rücksicht darauf, dass die Ritzsche Methode mathematisch absolut rigoros ist, ist dies ein Fingerzeig, dass die Angabe des Matrixelements in [1] nicht ganz in Ordnung ist, sei es durch einen Druckfehler oder aus sonstigen Gründen. Auf diesen Umstand können wir jedoch an dieser Stelle nur aufmerksam machen, da es uns leider nicht gelungen ist, hiefür die genaue Ursache zu ermitteln.

Literaturverzeichnis

- [1] STUMMEL F., P/977 PI Conf. Gen. 1958, 13, 105
 [2] CRITOPH E., PEARCE R. M., Journ. of Nucl. Energy I, 4, 445 (1957)