1972 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE MATHEMATICA ET PHYSICA VOL. 13, NO. 2

Einige Bemerkungen zur Verzweigung des Punktes durch einen Komplex von Transformationen

K. STACH
Lehrstuhl für Mathematik und darstellende Geometrie, Montanistische Hochschule, Ostrava

Eingegangen 15. Dezember 1972

Ausgangspunkt dieser Untersuchung ist der, in der Theorie der geometrischen Konfigurationen vorkommende Begriff der Verzweigung des Punktes (siehe [1]).

Vereinbarung 1: In der ganzen Arbeit werden wir voraussetzen, daß es eine feste nicht leere Menge M gibt. Die Elemente dieser Menge werden Punkte genannt und mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Unter einer Transformation der Menge M werden wir jede bijektive, also schlichte (d. h. ein-eindeutige) Abbildung der Menge M auf sich verstehen und mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen.

Wie es allgemein bekannt ist, bildet das System von allen Transformationen der Menge M eine Gruppe. Dabei ist unter dem Produkt $\gamma = \alpha\beta$ von zwei Transformationen α und β die Zusammensetzung der Transformationen α und β zu verstehen, das heißt: für jedes $x \in M$ ist $\gamma(x) = \beta(\alpha(x))$. Die Gruppe von allen Transformationen der Menge M werden wir mit $\mathbf{M}$ bezeichnen. Die identische Transformation werden wir mit ε bezeichnen. Also $\varepsilon(x) = x$ für jedes $x \in M$. Die inverse Transformation zu einer Transformation α wird mit α^{-1} bezeichnet.

Zu Anfang dieser Arbeit habe ich auch manche Definitionen der bekannten Begriffe eingeführt. Diese Begriffe sind manchmal in nicht genau demselben Sinn gebraucht und deshalb habe ich gezeigt, in welchem Sinn ich sie anwende.

Definition 1: Jede nicht leere Teilmenge $\mathbf{A}$ der Menge $\mathbf{M}$ werden wir ein Komplex von Transformationen der Menge M oder kurz ein Komplex nennen. Die Komplexe werden wir mit großen fetten Buchstaben des lateinischen Alphabetes bezeichnen.

Definition 2: Es sei $\mathbf{A}$ ein Komplex und $x \in M$. Die Menge aller Bilder des Elementes x in allen Transformationen $\alpha \in \mathbf{A}$ (d.h. die Menge $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \{\alpha(x)\}$) werden wir mit $\mathbf{A}(x)$ bezeichnen und die Verzweigung des Punktes x durch den Komplex $\mathbf{A}$ nennen. Die Menge $\bigcup_{x \in M} \{\mathbf{A}(x)\}$ ist das System der Verzweigungen durch den Komplex $\mathbf{A}$.

Definition 3: Der Komplex $\mathbf{A}$ heißt eine Halbgruppe von Transformationen der Menge M oder kurz eine Halbgruppe, wenn für jede $\alpha \in \mathbf{A}$, $\beta \in \mathbf{A}$ auch $\alpha\beta \in \mathbf{A}$ ist. Der Komplex $\mathbf{A}$ heißt eine Gruppe, wenn

1. $\mathbf{A}$ eine Halbgruppe ist,
2. wenn $\alpha \in \mathbf{A}$ ist, ist auch $\alpha^{-1} \in \mathbf{A}$.

Bemerkung 1: Die Gruppe von Transformationen ist eine Gruppe im herkömmlichen Sinn, denn sie abgeschlossen in der Hinsicht zum Produkt ist, dieses Produkt ist assoziativ, zu jedem Element gibt es ein inverses Element und aus 1. und 2. folgt, daß $\varepsilon = \alpha\alpha^{-1} \in \mathbf{A}$ ist.

Definition 4: Es sei $\mathbf{A}$ ein Komplex und $x \in \mathbf{M}$. Die Verzweigung $\mathbf{A}(x)$ heißt semiautark, wenn für jedes $y \in \mathbf{A}(x)$ und $\alpha \in \mathbf{A}$ gilt: $\alpha(y) \in \mathbf{A}(x)$.

Bemerkung 2: Im Vortrag „Beitrag zur Punktkonfigurationen in der Ebene" [Ostrava, 6. Dezember 1967] hat K. Havlíček an dieser Stelle den Ausdruck „autarke" oder „selbstgenügsame Verzweigung" angewandt; hier benutzen wir den Terminus „autarke Verzweigung" für einen schärferen Begriff [siehe die Definition 6].

Satz 1: Es sei $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$, $x \in M$. Die Verzweigung $\mathbf{A}(x)$ ist genau dann semiautark, wenn für jedes $y \in \mathbf{A}(x)$ gilt $\mathbf{A}(y) \subset \mathbf{A}(x)$.

Beweis: I. Es sei $\mathbf{A}(x)$ semiautark. Wählen wir $y \in \mathbf{A}(x)$ und weiter $z \in \mathbf{A}(y)$. Dann existiert eine Transformation $\alpha \in \mathbf{A}$ so, daß $\alpha(y) = z$ ist. Da $\mathbf{A}(x)$ semiautark ist, ist $\alpha(y) \in \mathbf{A}(x)$, d. h. $z \in \mathbf{A}(x)$. Deshalb ist $\mathbf{A}(y) \subset \mathbf{A}(x)$.

II. Für jedes $y \in \mathbf{A}(x)$ sei $\mathbf{A}(y) \subset \mathbf{A}(x)$. Wählen wir $y \in \mathbf{A}(x)$ und $\alpha \in \mathbf{A}$. Dann ist $\alpha(y) \in \mathbf{A}(y)$ und deshalb $\alpha(y) \in \mathbf{A}(x)$. Die Verzweigung $\mathbf{A}(x)$ ist semiautark.

Beispiel 1: Es sei M die Menge aller reellen Zahlen und N die Menge aller natürlichen Zahlen. Zu jeder Zahl $n \in N$ sei die Transformation α_n zugeordnet. Es gelte

$$\alpha_n(x) = x + n \quad \text{für jedes} \quad x \in M.$$

Bezeichnen wir $\mathbf{A} = \{\alpha_n\}_{n+1}^{\infty}$. Dann ist für jedes $x \in M$

$$\mathbf{A}(x) = \{x + n\}_{n=1}^{\infty}$$

Evident gilt für jedes $y \in \mathbf{A}(x)$, daß $\mathbf{A}(y) \subset \mathbf{A}(x)$. Aus Satz 1 folgt, daß $\mathbf{A}(x)$ für jedes $x \in M$ semiautark ist.

Definition 5: Der Komplex $\mathbf{A}$ heißt semiautark, wenn für jedes $a \in M$ die Verzweigung $\mathbf{A}(a)$ semiautark ist.

Z. B. der Komplex $\mathbf{A}$ aus Beispiel 1 ist semiautark.

Satz 2: Jede Halbgruppe $\mathbf{A}$ ist semiautark.

Beweis: Wählen wir $x \in M$, $y \in \mathbf{A}(x)$ und $z \in \mathbf{A}(y)$. Dann existieren solche Transformationen $\alpha \in \mathbf{A}$, $\beta \in \mathbf{A}$, daß $\alpha(x) = y$, $\beta(y) = z$. Da $\mathbf{A}$ eine Halbgruppe ist, ist auch $\alpha\beta \in \mathbf{A}$. Da weiters $\alpha\beta(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(y) = z$, ist $z \in \mathbf{A}(x)$. Daraus folgt $\mathbf{A}(y) \subset \mathbf{A}(x)$ und nach dem Satz 1 und Definition 5 ist $\mathbf{A}$ semiautark.

Definition 6: Es sei $\mathbf{A}$ ein beliebiger Komplex und $x \in M$. Die Verzweigung $\mathbf{A}(x)$ heißt autark, wenn für jedes $y \in \mathbf{A}(x)$ gilt: $\mathbf{A}(y) = \mathbf{A}(x)$.

Definition 7: Der Komplex **A** heißt autark, wenn für jedes $x \in M$ die Verzweigung $\mathbf{A}(x)$ autark ist.

Z. B. der Komplex **A** im Beispiel 1 ist nicht autark. Wenn wir aber anstatt der Menge N die Menge G aller ganzen Zahlen nehmen, d. h. wenn wir den Komplex **B** aller Transformationen der Form

$$\alpha_n(x) = x + n \quad \text{für jedes} \quad x \in M,$$

wobei n die Menge G durchläuft [d. h. $\mathbf{B} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{\alpha_n\}$], nehmen, dann können wir leicht sehen, daß **B** autark ist.

Satz 3: Es sei $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$, $x \in M$. $\mathbf{A}(x)$ sei autark. Dann ist $\mathbf{A}(x)$ semiautark.

Beweis: folgt unmittelbar aus dem Satz 1 und der Definition 6. Daraus folgt weiter

Satz 4: Jeder autarke Komplex ist semiautark.

Satz 5: Der Komplex **A** sei autark. Dann gilt für jedes $x \in M$, daß $x \in \mathbf{A}(x)$ ist.

Beweis: Es sei $x \in M$, $\alpha \in \mathbf{A}$. Da α eine bijektive Abbilungd ist, existiert $y \in M$ so, daß $\alpha(y) = x$ ist. Deshalb ist $x \in \mathbf{A}(y)$. Aus der Autarkie des Komplexes folgt, daß $\mathbf{A}(y) = \mathbf{A}(x)$ ist. Also $x \in \mathbf{A}(x)$.

Bemerkung 3: Aus dem Beispiel 1 folgt, daß in semiautarken Komplexen die Relation $x \in \mathbf{A}(x)$ nicht gelten muß. Im Satz 5 konnten wir die Voraussetzung „der Komplex **A** sei autark" durch eine schwächere Voraussetzung „die Verzweigung $\mathbf{A}(x)$ sei autark" nicht ersetzen, was das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 2: Es sei M die Menge aller ganzen und N die Menge aller natürlichen Zahlen. Für jedes $n \in N$ bezeichnen wir $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Reihen wir alle Transformationen (d. h. alle Permutationen) der Menge N_n in eine schlichte Folge $\{\beta_{n,k}\}_{k=0}^{n!-1}$ aneinander. Wählen wir jetzt eine beliebige natürliche Zahl n und eine ganze Zahl k so, daß $0 \leqq k \leqq (n! - 1)$ und konstruiren wir die Abbildung $\alpha_{n,k}$ folgenderweise:

$$\alpha_{n,k}(x) = \begin{cases} n+1 & \text{für } x = 0 \\ \beta_{n,k}(x) & \text{für } x \in N_n \\ x+1 & \text{für } x \in (M - N_n) - \{0\}. \end{cases}$$

Offenbar ist $\alpha_{n,k}$ eine Abbildung der Menge M auf sich. Die Mengen $\{n + 1\}$, N_n, $(M - N_n) - \{n + 1\}$ sind paarweise Punktfremd und die partielle Abbildungen $\beta_{n,k}(x)$ für $x \in N_n$ und $x + 1$ für $x \in (M - N_n) - \{0\}$ sind schlicht. Deshalb ist auch $\alpha_{n,k}(x)$ (für $x \in M$) schlicht. Also $\alpha_{n,k}$ ist eine schlichte Abbildung der Menge M auf sich. d. h. es ist eine Transformation der Menge M. Definieren wir noch

$$\alpha_{0,0}(x) = x + 1 \quad \text{für jedes} \quad x \in M.$$

Setzen wir

$$\mathbf{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n!-1} \{\alpha_{n,k}\}.$$

A ist also ein Komplex und es gilt:

1. $\mathbf{A}(0) = N$, denn
   a) für alle ganzen, nicht negativen Zahlen n, k ist $\alpha_{n,k}(0) = n + 1 \in N$, demnach $\mathbf{A}(0) \subset N$.
   b) für $m \in N$ ist $\alpha_{m-1,0}(0) = m$, demnach $N \subset \mathbf{A}(0)$.
2. Für jedes $m \in N$ ist $\mathbf{A}(m) = N$, denn
   a) für alle ganzen nicht negativen Zahlen n, k ist $\alpha_{n,k}(m)$ entweder $m + 1$ oder $\beta_{n,k}(m)$, was aber immer eine natürliche Zahl ist. Deshalb ist $\mathbf{A}(m) \subset N$.
   b) Es sei $p \in N$. Setzen wir $n = \max(m, p)$. Dann existiert mindestens eine Permutation $\beta_{m,k}$ der Menge N_n, für welche $\beta_{n,k}(m) = p$ ist. Der Definition der Abbildung $\alpha_{n,k}$ zufolge ist $\alpha_{n,k}(m) = p$, woraus folgt $N \subset \mathbf{A}(m)$.

Aus 1. und 2. folgt, daß $\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}(m)$ ist, und die Verzweigung $\mathbf{A}(0)$ ist autark, aber es ist $0 \bar{\in} \mathbf{A}(0)$.

Satz 6: Jede Gruppe $\mathbf{A}$ ist autark.

Beweis: Es sei $x \in M$, $y \in \mathbf{A}(x)$. Dann existiert eine Transformation $\alpha \in \mathbf{A}$ so, daß $\alpha(x) = y$. Da $\mathbf{A}$ eine Gruppe ist, ist sie auch eine Halbgruppe. Den Sätzen 2. und 1. zufolge ist $\mathbf{A}(y) \subset \mathbf{A}(x)$. Da $\mathbf{A}$ eine Gruppe ist, ist auch $\alpha^{-1} \in \mathbf{A}$. Aus $\alpha^{-1}(y) = x$ folgt, daß $x \in \mathbf{A}(y)$ ist. Wieder nach den Sätzen 2. und 1. ist $\mathbf{A}(x) \subset \mathbf{A}(y)$. Es gilt also $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}(y)$ für jedes $x \in M$ und $y \in \mathbf{A}(x)$, woraus folgt, daß $\mathbf{A}$ autark ist.

Satz 7: Es seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ zwei Komplexe und $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Dann ist für jedes $x \in M$: $\mathbf{A}(x) \subset \mathbf{B}(x)$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition der Mengen $\mathbf{A}(x)$ und $\mathbf{B}(x)$.

Satz 8: Es sei I nichtleere Indexmenge. Zu jedem $i \in I$ existiere ein Komplex $\mathbf{A}_i$. Bezeichnen wir $\mathbf{S} = \bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i$ und $\mathbf{P} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i$. Es sei $x \in M$. Dann ist $\mathbf{S}(x) = \bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i(x)$ und wenn $\mathbf{P} \neq 0$ ist, ist auch $\mathbf{P}(x) = \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i(x)$. Wenn $\mathbf{P} = \emptyset$, ist $\bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i(x) = \emptyset$.

Beweis: Wählen wir $x \in M$.

I. Es sei $y \in \mathbf{S}(x)$. Dann existiert $\alpha \in \mathbf{S}$ so, daß $\alpha(x) = y$ ist. Da $\alpha \in \mathbf{S}$ ist, existiert $i \in I$ so, daß $\alpha \in \mathbf{A}_i$ ist und deshalb $y = \alpha(x) \in \mathbf{A}_i(x) \subset \bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i(x)$. Daraus folgt: $\mathbf{S}(x) \subset \bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i(x)$.

II. Es sei $y \in \bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i(x)$. Dann existiert ein Index $i \in I$ so, daß $y \in \mathbf{A}_i(x)$ ist. Deshalb existiert eine Transformation $\alpha \in \mathbf{A}_i$ so, daß $y = \alpha(x)$ ist. Aber aus $\alpha \in \mathbf{A}_i$ folgt $\alpha \in \mathbf{S}$, und deshalb $\alpha(x) \in \mathbf{S}(x)$. Daraus: $\bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i(x) \subset \mathbf{S}(x)$.

Aus I. und II. folgt $\mathbf{S}(x) = \bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i(x)$.

Ähnlich erhalten wir auch den zweiten Teil unserer Behauptung.

Satz 9: Es sei I eine beliebige Indexmenge. Zu jedem $i \in I$ existiere ein Komplex A_i. Alle Komplexe $\mathbf{A}_i$ seien Halbgruppen. Bezeichnen wir $\mathbf{P} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i$. Es ist entweder $\mathbf{P} = \emptyset$ oder ist $\mathbf{P}$ eine Halbgruppe. Eine ähnliche Behauptung gilt auch für den Fall, daß $\mathbf{A}_i$ Gruppen sind. Aber in diesem Fall ist immer $\mathbf{P} \neq \emptyset$.

Beweis: Es seien $\mathbf{A}_i$ Halbgruppen und $\mathbf{P} \neq \emptyset$. Wählen wir $\alpha \in \mathbf{P}$, $\beta \in \mathbf{P}$. Dann ist für jedes $i \in I$: $\alpha \in \mathbf{A}_i$, $\beta \in \mathbf{A}_i$, woraus folgt, daß $\alpha\beta \in \mathbf{A}_i$ ist. Also es ist auch $\alpha\beta \in \mathbf{P}$ und $\mathbf{P}$ ist eine Halbgruppe. Wenn $\mathbf{A}_i$ Gruppen sind, und $\alpha \in \mathbf{P}$. dann ist für jedes $i \in I$ $\alpha \in \mathbf{A}_i$ und deshalb $\alpha^{-1} \in \mathbf{A}_i$. Also es ist $\alpha^{-1} \in \mathbf{P}$ und $\mathbf{P}$ ist eine Gruppe. Da jede Gruppe das Element ε besitzt, ist $\varepsilon \in \mathbf{P}$ und $\mathbf{P} \neq \emptyset$.

Satz 10: ξs sei $\mathbf{A}$ ein Komplex. Dann existiert eine Halbgruppe $H\mathbf{A}$ und eine Gruppe $G\mathbf{A}$ so, daß

1. $\mathbf{A} \subset H\mathbf{A} \subset G\mathbf{A}$.
2. Wenn $\mathbf{G}$ eine beliebige Halbgruppe (Gruppe) ist, für die $\mathbf{A} \subset \mathbf{G}$ gilt, so ist $H\mathbf{A} \subset \mathbf{G}$ ($G\mathbf{A} \subset \mathbf{G}$).

Beweis: Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{N}$) die Menge aller solchen Halbgruppen (resp. Gruppen) $\mathbf{G} \subset \mathbf{M}$, für die $\mathbf{G} \supset \mathbf{A}$ ist. Die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ sind nicht leer, denn $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ und $\mathbf{M} \in \mathfrak{N}$. Bezeichnen wir $H\mathbf{A} = \bigcap\limits_{\mathbf{G}\in\mathfrak{M}} \mathbf{G}$ und $G\mathbf{A} = \bigcap\limits_{\mathbf{G}\in\mathfrak{N}} \mathbf{G}$. Dem Satz 9 zufolge ist $H\mathbf{A}$ eine Halbgruppe und $G\mathbf{A}$ eine Gruppe. Die Eigenschaften 1. und 2. sind offensichtlich erfüllt.

Definition 8: Die Menge $H\mathbf{A}$ aus dem Satz 10 heißt die Halbgruppenhülle und die Menge $G\mathbf{A}$ heißt die Gruppenhülle des Komplexes $\mathbf{A}$.

Satz 11: Es sei $\mathbf{A}$ ein beliebiger Komplex. Seine Halbgruppenhülle $H\mathbf{A}$ ist durch alle Transformationen der Form

$$\alpha = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \tag{1}$$

gebildet. Dabei durchläuft n die Menge aller natürlichen Zahlen und $\alpha_i \in \mathbf{A}$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$.

Beweis: Bezeichnen wir mit $H\mathbf{A}$ die Halbgruppenhülle des Komplexes $\mathbf{A}$ und mit $\overline{\mathbf{A}}$ den Komplex aller Transformationen der Form (1).

a) $\mathbf{A} \subset \overline{\mathbf{A}}$, denn für jedes $\alpha \in \mathbf{A}$ gilt $\alpha = \prod\limits_{i=1}^{1} \alpha$.

b) Es sei $\alpha \in \overline{\mathbf{A}}$, $\beta \in \overline{\mathbf{A}}$. Dann existieren natürliche Zahlen m, n so, daß $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m$, $\beta = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$, wobei $\alpha_i \in \mathbf{A}$, $\beta_j \in \mathbf{A}$. Daraus folgt, daß $\alpha\beta = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$ ist, und deshalb $\alpha\beta \in \overline{\mathbf{A}}$. Deshalb ist $\overline{\mathbf{A}}$ eine Halbgruppe. Aus a) und aus der Definition 8 folgt $H\mathbf{A} \subset \overline{\mathbf{A}}$.

c) Es sei $\alpha \in \overline{\mathbf{A}}$. Dann existiert eine natürliche Zahl n so, daß $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, wobei $\alpha_i \in \mathbf{A}$. Da $\mathbf{A} \subset H\mathbf{A}$, gilt auch $\alpha_i \in H\mathbf{A}$. Da $H\mathbf{A}$ eine Halbgruppe ist, ist auch $\alpha \in H\mathbf{A}$. Also $\overline{\mathbf{A}} \subset H\mathbf{A}$.

d) Aus b) und c) folgt $\overline{\mathbf{A}} = H\mathbf{A}$.

Satz 12: Es sei $\mathbf{A}$ ein Komplex. Für seine Gruppenhülle $G\mathbf{A}$ gilt: $G\mathbf{A} = H\mathbf{A}^+$, wobei $\mathbf{A}^+$ der Komplex ist, der aus allen Transformationen des Komplexes $\mathbf{A}$ und allen zu diesen Transformationen inversen Transformationen besteht.

Beweis: Es sei $\alpha \in H\mathbf{A}^+$. Nach dem Satz 11 existiert eine natürliche Zahl n so, daß $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ ($\alpha_i \in \mathbf{A}^+$). Aus der Gruppentheorie ist bekannt, daß $\alpha^{-1} = (\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1}\alpha_{n-1}^{-1} \ldots \alpha_1^{-1}$ ist. Aus der Definition des Komplexes $\mathbf{A}^+$

folgt, daß $\alpha_i^{-1} \in \mathbf{A}^+ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Wieder dem Satz 11 zufolge ist $\alpha^{-1} \in H\mathbf{A}^+$. Nach der Definition 3 ist $H\mathbf{A}^+$ eine Gruppe, für die die Inklusion $H\mathbf{A}^+ \supset \mathbf{A}$ gilt. Deshalb ist $H\mathbf{A}^+ \supset G\mathbf{A}$. Ähnlicherweise wie im Satz 11 können wir zeigen, daß $H\mathbf{A}^+ \subset G\mathbf{A}$ ist. Deshalb ist $H\mathbf{A}^+ = G\mathbf{A}$, womit unser Satz bewiesen ist.

Satz 13: Es sei $\mathbf{A}$ ein semiautarker Komplex und $H\mathbf{A}$ seine Halbgruppenhülle. Dann gilt für jedes $x \in M$: $\mathbf{A}(x) = H\mathbf{A}(x)$.

Beweis: a) Nach dem Satz 7 und der Definition 8 ist $\mathbf{A}(x) \subset H\mathbf{A}(x)$.

b) Es sei $y \in H\mathbf{A}(x)$. Dann existiert eine Transformation $\alpha \in H\mathbf{A}$ so, daß $y = \alpha(x)$. Dem Satz 11 zufolge ist $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, wobei $\alpha_i \in \mathbf{A}(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Bezeichnen wir

$$\alpha_1(x) = x_1,\ \alpha_2(x_1) = x_2, \ldots,\ \alpha_n(x_{n-1}) = x_n. \tag{2}$$

Aus (2) folgt

$$x_1 \in \mathbf{A}(x),\ x_2 \in \mathbf{A}(x_1), \ldots,\ x_n \in \mathbf{A}(x_{n-1}). \tag{3}$$

Mit Hinsicht, daß $\mathbf{A}$ semiautark ist, folgt aus dem Satz 1

$$\mathbf{A}(x_1) \subset \mathbf{A}(x),\ \mathbf{A}(x_2) \subset \mathbf{A}(x_1), \ldots,\ \mathbf{A}(x_{n-1}) \subset \mathbf{A}(x_{n-2}).$$

Also

$$\mathbf{A}(x_{n-1}) \subset \mathbf{A}(x). \tag{4}$$

Aus (2) folgt, daß $x_n = y$ ist. Aus der letzten Relation in (3) folgt, daß $y \in \mathbf{A}(x_{n-1})$. Nach (4) ist also $y \in \mathbf{A}(x)$. Deshalb $H\mathbf{A}(x) \subset \mathbf{A}(x)$.

c) Aus a) und b) folgt unsere Behauptung.

Satz 14: Es sei $\mathbf{A}$ ein autarker Komplex. Bezeichnen wir wieder mit $\mathbf{A}^+$ den Komplex $\mathbf{A} \cup \mathbf{A}^{-1}$, wobei $\mathbf{A}^{-1}$ der Komplex ist, der mit allen inversen Transformationen zu den Transformationen des Komplexes $\mathbf{A}$ gebildet wird. Dann gilt für jedes $x \in M$: $\mathbf{A}^+(x) = \mathbf{A}(x)$.

Beweis: a) Aus $\mathbf{A}^+ \supset \mathbf{A}$ folgt $\mathbf{A}^+(x) \supset \mathbf{A}(x)$ (Satz 7).

b) Wählen wir $y \in \mathbf{A}^+(x)$. Dann existiert eine Transformation $\alpha \in \mathbf{A}^+$ so, daß $\alpha(x) = y$. Aus $\alpha \in \mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cup \mathbf{A}^{-1}$ folgt entweder $\alpha \in \mathbf{A}$ oder $\alpha \in \mathbf{A}^{-1}$. Im ersten Fall ist $y \in \mathbf{A}(x)$. Im zweiten Fall ist $\alpha^{-1} \in \mathbf{A}$. Es gilt $x = \alpha^{-1}(y)\cdot$ Deshalb ist $x \in \mathbf{A}(y)$. Der Komplex $\mathbf{A}$ ist autark und deshalb:

$$\mathbf{A}(y) = \mathbf{A}(x). \tag{5}$$

Dem Satz 5 zufolge ist $y \in \mathbf{A}(y)$. Aus (5) folgt $y \in \mathbf{A}(x)$. Auf jeden Fall ist $y \in \mathbf{A}(x)$ und deshalb $\mathbf{A}^+(x) \subset \mathbf{A}(x)$.

c) Aus a) und b) folgt unsere Behauptung.

Satz 15: Es sei $\mathbf{A}$ ein autarker Komplex und $G\mathbf{A}$ seine Gruppenhülle. Dann gilt für jedes $x \in M$: $\mathbf{A}(x) = G\mathbf{A}(x)$.

Beweis: $\mathbf{A}^+$ habe denselben Sinn wie im Satz 14. Dem Satz 12 zufolge ist

$$G\mathbf{A} = H\mathbf{A}^+ \tag{6}$$

Nach dem Satz 14 ist

$$\mathbf{A}^+(x) = \mathbf{A}(x). \tag{7}$$

Daraus folgt, daß auch $\mathbf{A}^+$ ein autarker und deshalb auch ein semiautarker Komplex ist. Aus dem Satz 13 folgt:

$$H\mathbf{A}^+(x) = \mathbf{A}^+(x).$$

Daraus und aus (6) und (7) folgt unsere Behauptung.

Wenn wir die Kenntnisse aus den Sätzen 2, 6, 13 und 15 zusammenfassen, können wir den folgenden Satz anführen:

Satz 16: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dazu, daß der Komplex $\mathbf{A}$ semiautark bzw. autark ist, ist: Es existiert eine Halbgruppe bzw. Gruppe $\mathbf{G}$, die dasselbe System der Verzweigung wie der Komplex $\mathbf{A}$ hat (d. h. für jedes $x \in M$ gilt: $\mathbf{A}(x) = \mathbf{G}(x)$).

Zum Abschluß zeigen wir, daß es Komplexe gibt, die weder Gruppen noch Halbgruppen sind und die autark sind.

Beispiel 3: Es sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbf{A} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, wobei α, β, γ folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{array}{llll} \alpha(1) = 1, & \alpha(2) = 3, & \alpha(3) = 2, & \alpha(4) = 4; \\ \beta(1) = 2, & \beta(2) = 1, & \beta(3) = 3, & \beta(4) = 4; \\ \gamma(1) = 3, & \gamma(2) = 2, & \gamma(3) = 1, & \gamma(4) = 4. \end{array}$$

Für die Transformation $\delta = \beta\alpha$ gilt:

$$\delta(1) = 3, \quad \delta(2) = 1, \quad \delta(3) = 2, \quad \delta(4) = 4.$$

Also $\delta \bar{\in} \mathbf{A}$. Deshalb ist $\mathbf{A}$ keine Halbgruppe (und desto weniger keine Gruppe). Aber $\mathbf{A}(1) = \mathbf{A}(2) = \mathbf{A}(3) = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{A}(4) = \{4\}$. Deshalb ist $\mathbf{A}$ autark. Bemerken wir noch, daß hier $G\mathbf{A} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \varepsilon\}$ ist, wo $\delta = \beta\alpha$, $\zeta = \alpha\beta$ und ε die identische Transformation ist.

Literaturverzeichniss

[1] K. Havlíček: Zur Geometrie der Punktkonfigurationen. Nachrichten der Österreichischen Math. Gesellschaft, Nr. 91, Jänner 1970, S. 66 — Sonderheft mit Bericht über den VII. Österreich. Mathematikerkongress — Linz (1968).