Frieder Kuhnert
Beziehungen zwischen den Verfahren von Ritz und Bazley

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 15 (1974), No. 1-2, 79--[80]

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142330`

Beziehungen zwischen den Verfahren von Ritz und Bazley

F. KUHNERT
Technische Hochschule, Sektion Matematik, Karl-Marx-Stadt

It is given a characterisation of some RAYLEIGH-RITZ and BAZLEY-WEINSTEIN procedures for obtaining upper and lower bounds for eigenvalues of positive definite self-adjoint operators as realizations of a unique class of numerical procedures.

Es sei H ein separabler Hilbertraum, in dem ein positiv definiter selbstadjungierter Operator A mit in H dichtem Definitionsgebiet $D(A)$ gegeben sei. Der Operator A möge die Darstellung $A = A_0 + B$ besitzen, wobei A_0 ein positiv definiter selbstadjungierter Operator mit vollstetigem inversen Operator A_0^{-1} und $D(A_0) = = D(A)$ sei. Der Operator B sei ebenfalls positiv definit und symmetrisch mit $D(B) \supset D(A_0)$. Wir setzen voraus, daß die Eigenwerte

$$0 \leqq \lambda_1^0 \leqq \lambda_2^0 \leqq \ldots \to \infty$$

und ein orthonormiertes System von Eigenvektoren

$$v_1, v_2, \ldots, (v_k, v_j) = \delta_{kj} ,$$

des Operators A_0 bekannt seien.

Der inverse Operator A^{-1} ist unter diesen Voraussetzungen ebenfalls vollstetig und es können für die Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \to \infty$$

des Operators A durch Realisierungen der Verfahren von RITZ [3] und BAZLEY [1] obere und untere Schranken gewonnen werden, wenn man z. B. im Verfahren von RITZ die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ als Koordinatenvektoren und im Verfahren von BAZLEY die Vektoren

$$p_k = B^{-1/2} v_k, \; k = 1, \ldots, n,$$

verwendet.

Um diese beiden konkreten numerischen Verfahren als Realisierungen einer Klasse numerischer Prozeduren beschreiben zu können, betrachten wir die von einem reellen Parameter $\alpha \in [0,1]$ abhängige Operatorenschar

$$A_{n,\alpha} = A_0 + B^{1-\alpha} Q_n B^{\alpha} ,$$

wobei Q_n der Projektionsoperator in H auf den Unterraum span $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist. Die durch

$$0 < |\lambda_1^{n,\alpha}| \leqq |\lambda_2^{n,\alpha}| \leqq \ldots$$

geordneten Eigenwerte des Operators $A_{n,\alpha}$ erklären wir als Näherungswerte für die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ des Operators A. Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ erhalten wir Operatoren $A_{n,0}$ und $A_{n,1}$, zu deren Eigenwerte die RITZschen Näherungen gehören. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ geht die hier beschriebene allgemeine Prozedur in das oben skizzierte Verfahren von BAZLEY über.

Auf der Basis der allgemeinen Verfahrensklasse können Konvergenzaussagen und Fehlerabschätzungen für $|\lambda_k^{n,\alpha} - \lambda_k|$ gewonnen werden, die in den Spezialfällen $\alpha = 0, \frac{1}{2}, 1$ für die Verfahren von RITZ und BAZLEY Anwendung finden.

Eine detaillierte Darstellung dieser Problematik findet sich in der Arbeit [2] des Autors.

Literatur

[1] BAZLEY, N., FOX, D. W.: Truncations in the Method of Intermediate Problems for Lower Bounds to Eigenvalues. J. Res. Nat. Bur. Stds. 65 B, 105 (1961).

[2] KUHNERT, F.: Relations between RAYLEIGH-RITZ and BAZLEY-WEINSTEIN Methods. Mathem. Rep. No. 71, Battelle Advanced Studies Center, Geneva (1972).

[3] MICHLIN, S. G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin (1962).