Jiří Gregor

Zur geometrischen Bedeutung der Gruppen der automorphen Kollineationen einer harmonischen und äquianharmonischen kubischen Kurve

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 17 (1976), No. 1, 73--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142381

1976 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE – MATHEMATICA ET PHYSICA VOL. 17, NO. 1, Pag. 73–80

Zur geometrischen Bedeutung der Gruppen der automorphen Kollineationen einer harmonischen und äquianharmonischen kubischen Kurve

J. GREGOR

Seminar für kombinatorische Geometrie, Mathematisch-Physikalische Fakultät, Karls-Universität, Prag und Oberschule für Maschinenbau, Žďár nad Sázavou*

Eingegangen 20. Juni 1974

Die Bahn des Punktes bezüglich einer endlichen Transformationgruppe G_n der Ordnung n in der komplexen projektiven Ebene bildet oft einige Konfigurationen der Punkte und Kegelschnitte. In dieser Weise konstruiert der Verf. die Konfiguration $(36_{12}, 72_6)$ [bzw. $(54_{12}, 108_6)$] der 36 Punkte und 72 Kegelschnitte (bzw. der 54 Punkte und 108 Kegelschnitte) aus der Automorphismengruppe G_{36} (bzw. G_{54}) einer harmonischen (bzw. äquianharmonischen) kubischen Kurve.

Příspěvek ke geometrickému významu grupy automorfních kolineací harmonické a ekvianharmonické kubické křivky. Orbit bodu v konečné grupě transformací G_n řádu n v komplexní projektivní rovině tvoří často konfiguraci bodů a kuželoseček. Tímto způsobem sestrojuje autor konfiguraci $(36_{12}, 72_6)$ [příp. $(54_{12}, 108_6)$] 36 bodů a 72 kuželoseček (příp. 54 bodů a 108 kuželoseček) z grupy automorfních kolineací G_{36} (příp. G_{54}) harmonické (příp. ekvianharmonické) kubické křivky.

Об одном геометрическом значении группы автоморфизмов гармонической и еквигармонической кривой третьего порядка. Орбита точки в конечной группе грансформаций G_n порядка n в проективной плоскости над полем комплексных чисел создаёт частью конфигурацию точек и конических сечений. Таким способом конструирует автор конгигурацию $(36_{12}, 72_6)$ (или $54_{12}, 108_6$) 36-ти точек и 72 конических сечений (или 54 точек и 108 конических сечений) с помощью группы автоморфизмов G_{36} (или G_{54}) гармонической (или еквигармонической) кривой третьего порядка.

I. Einleitung

Die Konfiguration, von der wir sprechen werden, steht in engsten Zusammenhang mit den Gruppen der automorphen Kollineationen einer harmonischen und äquianharmonischen kubischen Kurve in der komplexen projektiven Ebene.

Die Konfiguration der Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Gruppe der automorphen Kollineationen einer allgemeinen elliptischen Kubik in der komplexen projektiven Ebene hat schon B. Bydžovský [2] und später

* Marxova 919/34, 591 00 Žďár n. Sáz. III., Czechoslovakia

K. Havliček [3] studiert. Diese automorphen Kollineationen bilden einen beliebigen, aber festen Punkt y (mit homogenen Koordinaten y_1, y_2, y_3) in 18 Punkte ab. Diese Konfiguration von 18 Punkten enthält unter anderem verschiedene Untermengen von 6 Punkten, die jeweils auf einem Kegelschnitt liegen. B. Bydžovský hat 12 solche Konfigurationskegelschnitte entdeckt. Als Konfigurationskegelschnitt versteht man hier einen Kegelschnitt, der mit 6 Punkten dieser Konfiguration inzident ist. Je sechs dieser einen Konfigurationskegelschnitt bestimmenden Punkte entsprechen einer Untergruppe $\mathbf{F}_6$ von 6. Ordnung der Gruppe $\mathbf{F}_{18}$ der automorphen Kollineationen der allgemeinen elliptischen Kubik. K. Havlíček hat gezeigt, daß sogar 36 Konfigurationskegelschnitte in dieser Konfiguration sind.

Der Zusammenhang dieser Konfigurationskegelschnitte mit der Gruppentheorie ist sehr anschaulich: In der Gruppe $\mathbf{F}_{18}$ waren schon früher 12 Untergruppen $\mathbf{F}_6$ gefunden worden. Jede diese Untergruppe $\mathbf{F}_6$ bildet den Punkt y in 6 Punkte ab, die immer auf einem Konfigurationskegelschnitte liegen. Auf diese Weise bekommen wir 12 Konfigurationskegelschnitte, die B. Bydžovský gefunden hat. Weitere Konfigurationskegelschnitte in der Arbeit von K. Havlíček entsprechen in ähnlicher Weise den Restklassen, die zu jeder Untergruppe $\mathbf{F}_6$ in $\mathbf{F}_{18}$ gehören. Es ist noch nötig die Voraussetzung anzugeben, unter der alle 36 Konfigurationskegelschnitte regulär und verschieden sind; es genügt, den Punkt y so zu wählen, daß er mit den Inflexionsachsen der Kurve und mit den Verbindungsgeraden der Ecken aller Wendedreiseiten nicht inzidiert. Diese Voraussetzung werden wir auch in dieser Arbeit behalten.

Diese Punkte und Kegelschnitte bilden die Konfiguration $(18_{12}, 36_6)$, wo (n_p, m_q) das Symbol solcher Konfigurationen mit n Punkte und m Kegelschnitte ist, wobei p die Anzahl der Kegelschnitte durch jeden Punkt und q die Anzahl der Punkte auf jedem Kegelschnitt bedeutet und $np = mq$ die Anzahl aller dieser Inzidenzen ist.

2. Zur geometrischen Bedeutung der Gruppe der automorphen Kollineationen einer harmonischen Kubik

Die elliptische Kubik besitzt bekanntlich 9 Wendepunkte, die mit 12 Inflexionsachsen inzident sind und die berühmte Hessesche Konfiguration $(9_4, 12_3)$ bilden. Diese Hessesche Konfiguration zerfällt in 4 Wendedreiseite. (Vgl. B. Bydžovský [1], 432—438.)

Macht man ein Wendedreiseit zum Koordinatendreieck, so erscheint die Gleichung der harmonischen Kubik in der kanonischen Form (B. Bydžovský [1], 442)

$$(1 + \sqrt{3})(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6x_1x_2x_3 = 0\,. \tag{1}$$

In diesem Falle gibt es genau 36 Kollineationen, die die Gleichung (1) der harmonischen Kubik reproduzieren (B. Bydžovský [1], 449).

Die Gleichungen von 18 dieser Kollineationen in dem oben gewählten Koordinatensystem sind

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_i\,, & x_2' &= x_j\,, & x_3' &= x_k \\
x_1' &= x_i\,, & x_2' &= ax_j\,, & x_3' &= a^2x_k \\
x_1' &= x_i\,, & x_2' &= a^2x_j\,, & x_3' &= ax_k\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Dabei ist i, j, k eine willkürliche Permutation der Elemente 1, 2, 3 und $a = 1/2.$

$(-1 + i\sqrt{3})$ eine dritte Wurzel von 1, $i = \sqrt{-1}$.

Die Gleichungen der weiteren 18 Kollineationen bekommen wir, wenn die Kollineation mit den Gleichungen

$$x_1' = x_1 + x_2 + x_3\,; \qquad x_2' = x_1 + ax_2 + a^2x_3\,; \qquad x_3' = x_1 + a^2x_2 + ax_3$$

mit Kollineationen (2) zusammengestellt werden.

Diese 36 Kollineationen bilden eine Gruppe, die wir mit $\mathbf{G}_{36}$ bezeichnen.

Nun wählen wir einen beliebigen, aber festen Punkt y (mit den Koordinaten y_1, y_2, y_3). Die automorphen Kollineationen der harmonischen Kubik bilden diesen Punkt in die 36 Punkte mit folgenden Koordinaten ab:

1	$y_1\ \ y_2\ \ y_3$	7	$y_1\ \ ay_2\ \ a^2y_3$	13	$y_1\ \ a^2y_2\ \ ay_3$
2	$y_1\ \ y_3\ \ y_2$	8	$y_1\ \ ay_3\ \ a^2y_2$	14	$y_1\ \ a^2y_3\ \ ay_2$
3	$y_2\ \ y_1\ \ y_3$	9	$y_2\ \ ay_1\ \ a^2y_3$	15	$y_2\ \ a^2y_1\ \ ay_3$
4	$y_2\ \ y_3\ \ y_1$	10	$y_2\ \ ay_3\ \ a^2y_1$	16	$y_2\ \ a^2y_3\ \ ay_1$
5	$y_3\ \ y_1\ \ y_2$	11	$y_3\ \ ay_1\ \ a^2y_2$	17	$y_3\ \ a^2y_1\ \ ay_2$
6	$y_3\ \ y_2\ \ y_1$	12	$y_3\ \ ay_2\ \ a^2y_1$	18	$y_3\ \ a^2y_2\ \ ay_1$

(3)

19	$y_1'\ \ y_2'\ \ y_3'$	25	$y_1'\ \ ay_2'\ \ a^2y_3'$	31	$y_1'\ \ a^2y_2'\ \ ay_3'$
20	$y_1'\ \ y_3'\ \ y_2'$	26	$y_1'\ \ ay_3'\ \ a^2y_2'$	32	$y_1'\ \ a^2y_3'\ \ ay_2'$
21	$y_2'\ \ y_1'\ \ y_3'$	27	$y_2'\ \ ay_1'\ \ a^2y_3'$	33	$y_2'\ \ a^2y_1'\ \ ay_3'$
22	$y_2'\ \ y_3'\ \ y_1'$	28	$y_2'\ \ ay_3'\ \ a^2y_1'$	34	$y_2'\ \ a^2y_3'\ \ ay_1'$
23	$y_3'\ \ y_1'\ \ y_2'$	29	$y_3'\ \ ay_1'\ \ a^2y_2'$	35	$y_3'\ \ a^2y_1'\ \ ay_2'$
24	$y_3'\ \ y_2'\ \ y_1'$	30	$y_3'\ \ ay_2'\ \ a^2y_1'$	36	$y_3'\ \ a^2y_2'\ \ ay_1'$

(4)

Dabei ist

$$y_1' = y_1 + y_2 + y_3\,, \quad y_2' = y_1 + ay_2 + a^2y_3\,, \quad y_3' = y_1 + a^2y_2 + ay_3\,.$$

Bezeichnen wir mit $\mathbf{G}_{18}^{(0)} \subset \mathbf{G}_{36}$ die Untergruppe der automorphen Kollineationen der harmonischen Kubik, welche den Punkt y in Punkte der Tabelle (3) überträgt und ähnlich bezeichnen wir mit $\mathbf{G}_{18}^{(1)} \subset \mathbf{G}_{36}$ die Restklasse der automorphen Kollineationen der harmonischen Kubik, welche den Punkt y in Punkte der Tabelle (4) überträgt.

Wir werden jetzt die Eigenschaften der Untergruppe $\mathbf{G}_{18}^{(0)}$ der automorphen Kollineationen der harmonischen Kubik studieren. Diese Untergruppe ist isomorph mit der Gruppe $\mathbf{F}_{18}$ der automorphen Kollineationen der allgemeinen elliptischen Kubik. Die Eigenschaften dieser Gruppe hat schon B. Bydžovský [2] studiert. K. Havlíček [3] hat gezeigt, daß 36 Kegelschnitte existieren, wobei jeder Kegelschnitt mit 6 Punkten aus der Tabelle (3) inzident ist und jeder Punkt mit 12 Kegelschnitten inzident ist, d. h. diese Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Gruppe $\mathbf{F}_{18}$ bilden die Konfiguration $(18_{12}, 36_6)$. Ähnlich wie im Falle der allgemeinen elliptischen Kubik bilden die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Untergruppe $\mathbf{G}_{18}^{(0)}$ der automorphen Kollineationen der harmonischen Kubik dieselbe Konfiguration $(18_{12}, 36_6)$.

Wir werden jetzt die Eigenschaften der Restklasse $\mathbf{G}_{18}^{(1)}$ der automorphen Kollineationen der harmonischen Kubik studieren. In ähnlicher Weise wie im Falle der Untergruppe $\mathbf{G}_{18}^{(0)}$ werden wir zeigen, daß 36 solche Kegelschnitte existieren, wobei jeder Kegelschnitt mit 6 Punkten aus der Tabelle (4) inzident ist und jeder Punkt mit 12 Kegelschnitten inzident ist. Der Beweis erfolgt durch mechanische Rechnung. Es ist leicht zu bestätigen, daß die 9 Kegelschnitte mit den Gleichungen

$$k_{pi}^{(1)} = y_p'^2\, x_j x_k - y_q' y_r' x_i^2 = 0 \tag{5}$$

Konfigurationskegelschnitte sind.

Die Substitution der Koordinaten aus der Tabelle (4) in die Gleichungen (5) liefert folgende Ergebnisse:

$k_{11}^{(1)}$ ist mit den Punkten 19, 20, 25, 26, 31, 32 inzident
$k_{12}^{(1)}$ ist mit den Punkten 21, 23, 27, 29, 33, 35 inzident
$k_{13}^{(1)}$ ist mit den Punkten 22, 24, 28, 30, 34, 36 inzident
$k_{21}^{(1)}$ ist mit den Punkten 21, 22, 27, 28, 33, 34 inzident
$k_{22}^{(1)}$ ist mit den Punkten 19, 24, 25, 30, 31, 36 inzident
$k_{23}^{(1)}$ ist mit den Punkten 20, 23, 26, 29, 32, 35 inzident
$k_{31}^{(1)}$ ist mit den Punkten 23, 24, 29, 30, 35, 36 inzident
$k_{32}^{(1)}$ ist mit den Punkten 20, 22, 26, 28, 32, 34 inzident
$k_{33}^{(1)}$ ist mit den Punkten 19, 21, 25, 27, 31, 33 inzident.

Je zwei Kegelschnitte $k_{pi}^{(1)}$, welche einen gemeinsamen Index haben, sind disjunkt (d. h. sie schneiden sich in keinem Konfigurationspunkt), je zwei andere haben genau 3 gemeinsame Konfigurationspunkte.

Die Kegelschnitte $k_{pi}^{(1)}$ sind natürlich mit dem ersten Wendedreiseit (Koordinatensystem) verbunden. Wir können aber unsere Überlegung auch für die übrigen Wendedreiseite wiederholen. Weil die harmonische Kubik 4 verschiedene Wendedreiseite hat, bekommen wir im ganzen $4 \,.\, 9 = 36$ Konfigurationskegelschnitte in dieser Konfiguration. Die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Restklasse $\mathbf{G}_{18}^{(1)} \subset \mathbf{G}_{36}$ der automorphen Kollineationen einer harmonischen Kubik in der komplexen projektiven Ebene bilden also auch die Konfiguration $(18_{12}, 36_6)$.

Aus Vorergebnissen ist es ersichtlich, daß 72 solche Kegelschnitte existieren, wobei jeder Kegelschnitt mit 6 Punkten aus der Tabelle (3) oder (4) inzident ist und jeder Punkt mit 12 Kegelschnitten inzident ist.

Die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Gruppe $\mathbf{G}_{36}$ der automorphen Kollineationen einer harmonischen kubischen Kurve in der komplexen projektiven Ebene bilden also die Konfiguration $(36_{12}, 72_6)$.

3. Zur geometrischen Bedeutung der Gruppe der automorphen Kollineationen einer äquianharmonischen Kubik

Endlich werden wir über eine Konfiguration sprechen, die in engstem Zusammenhang mit der Gruppe der automorphen Kollineationen einer äquianharmonischen kubischen Kurve in der komplexen projektiven Ebene ist.

Macht man ein Wendedreiseit dieser Kubik zum Koordinatiendreieck, so erscheint die Gleichung der äquianharmonischen Kubik in kanonischer Form (B. Bydžovský [1], 440)

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\,. \tag{6}$$

In diesem Falle gibt es genau 54 Kollineationen, die die Gleichung (6) der äquianharmonischen Kubik reproduzieren (B. Bydžovský [1], 447). Die Gleichungen dieser 54 Kollineationen in dem oben gewählten Koordinatensystem sind

$$x_1' = x_i\,, \quad x_2' = a^s x_j\,, \quad x_3' = a^r x_k\,; \tag{7}$$

dabei ist i, j, k eine willkürliche Permutation der Elemente 1, 2, 3 und $r, s = 0, 1, 2$ und $a = 1/2\,.\,(-1 + i\sqrt{3})$ wieder eine dritte Wurzel von 1, $i = \sqrt{-1}$.

Diese 54 Kollineationen bilden eine Gruppe, die wir mit $\mathbf{Q}_{54}$ bezeichnen.

Nun wählen wir einen beliebigen, aber festen Punkt y (mit Koordinaten y_1, y_2, y_3). Die automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik bilden diesen Punkt in die 54 Punkte ab, deren Koordinaten sind:

1	$y_1\ y_2\ y_3$	7	$y_1\ ay_2\ a^2y_3$	13	$y_1\ a^2y_2\ ay_3$	(8)
2	$y_1\ y_3\ y_2$	8	$y_1\ ay_3\ a^2y_2$	14	$y_1\ a^2y_3\ ay_2$	
3	$y_2\ y_1\ y_3$	9	$y_2\ ay_1\ a^2y_3$	15	$y_2\ a^2y_1\ ay_3$	
4	$y_2\ y_3\ y_1$	10	$y_2\ ay_3\ a^2y_1$	16	$y_2\ a^2y_3\ ay_1$	
5	$y_3\ y_1\ y_2$	11	$y_3\ ay_1\ a^2y_2$	17	$y_3\ a^2y_1\ ay_2$	
6	$y_3\ y_2\ y_1$	12	$y_3\ ay_2\ a^2y_1$	18	$y_3\ a^2y_2\ ay_1$	

19	$y_1\ y_2\ ay_3$	25	$y_1\ ay_2\ y_3$	31	$y_1\ a^2y_2\ a^2y_3$	(9)
20	$y_1\ y_3\ ay_2$	26	$y_1\ ay_3\ y_2$	32	$y_1\ a^2y_3\ a^2y_2$	
21	$y_2\ y_1\ ay_3$	27	$y_2\ ay_1\ y_3$	33	$y_2\ a^2y_1\ a^2y_3$	
22	$y_2\ y_3\ ay_1$	28	$y_2\ ay_3\ y_1$	34	$y_2\ a^2y_3\ a^2y_1$	
23	$y_3\ y_1\ ay_2$	29	$y_3\ ay_1\ y_2$	35	$y_3\ a^2y_1\ a^2y_2$	
24	$y_3\ y_2\ ay_1$	30	$y_3\ ay_2\ y_1$	36	$y_3\ a^2y_2\ a^2y_1$	

37	$y_1\ y_2\ a^2y_3$	43	$y_1\ ay_2\ ay_3$	49	$y_1\ a^2y_2\ y_3$	(10)
38	$y_1\ y_3\ a^2y_2$	44	$y_1\ ay_3\ ay_2$	50	$y_1\ a^2y_3\ y_2$	
39	$y_2\ y_1\ a^2y_3$	45	$y_2\ ay_1\ ay_3$	51	$y_2\ a^2y_1\ y_3$	
40	$y_2\ y_3\ a^2y_1$	46	$y_2\ ay_3\ ay_1$	52	$y_2\ a^2y_3\ y_1$	
41	$y_3\ y_1\ a^2y_2$	47	$y_3\ ay_1\ ay_2$	53	$y_3\ a^2y_1\ y_2$	
42	$y_3\ y_2\ a^2y_1$	48	$y_3\ ay_2\ ay_1$	54	$y_3\ a^2y_2\ y_1$	

Bezeichnen wir mit $\mathbf{Q}_{18}^{(0)} \subset \mathbf{Q}_{54}$ die Untergruppe der automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik, die den Punkt y in die Punkte der Tabelle (8) überträgt (die Tabelle (8) ist übrigens identisch mit der Tabelle (3)); ähnlich bezeichnen wir mit $\mathbf{Q}_{18}^{(1)} \subset \mathbf{Q}_{54}$ die Restklasse der automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik, die den Punkt y in die Punkte der Tabelle (9) überträgt und endlich bezeichnen wir mit $\mathbf{Q}_{18}^{(2)} \subset \mathbf{Q}_{54}$ die Restklasse der automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik, die den Punkt y in die Punkte der Tabelle (10) überträgt.

Wir werden jetzt die Eigenschaften der Untergruppe $\mathbf{Q}_{18}^{(0)}$ der automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik studieren. Diese Untergruppe ist isomorph mit der Gruppe $\mathbf{F}_{18}$ der automorphen Kollineationen der allgemeinen elliptischen Kubik. In ähnlicher Weise wie im Falle der Gruppe $\mathbf{F}_{18}$ bekommen wir folgendes Ergebniss:

Es existieren 36 Kegelschnitte, wobei jeder Kegelschnitt mit 6 Punkten aus der Tabelle (8) inzident ist und jeder Punkt mit 12 Kegelschnitten inzident ist, d.h. die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Gruppe $\mathbf{Q}_{18}^{(0)}$ der automorphen Kollineationen einer äquianharmonischen Kubik in der komplexen projektiven Ebene bilden die Konfiguration $(18_{12}, 36_6)$.

Wir werden jetzt die Eigenschaften der Restklasse $\mathbf{Q}_{18}^{(1)}$ der automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik studieren. Ähnlich wie im Falle der Untergruppe $\mathbf{Q}_{18}^{(0)}$ werden wir zeigen, daß 36 Kegelschnitte existieren, wobei jeder Kegelschnitt mit 6 Punkten aus der Tabelle (9) inzident ist und jeder Punkt mit 12 Kegelschnitten inzident ist. Der Beweis erfolgt durch mechanische Rechnung. Es ist leicht zu bestätigen, daß 9 Kegelschnitte mit den Gleichungen

$$m_{pi}^{(1)} = y_p^2 x_j x_k - a y_q y_r x_i^2 = 0 \,. \tag{11}$$

Konfigurationskegelschnitte sind.

Die Substitution der Koordinaten aus der Tabelle (9) in die Gleichungen (11) liefert folgende Ergebnisse:

$m_{11}^{(1)}$ ist mit den Punkten 19, 20, 25, 26, 31, 32 inzident
$m_{12}^{(1)}$ ist mit den Punkten 21, 23, 27, 29, 33, 35 inzident
$m_{13}^{(1)}$ ist mit den Punkten 22, 24, 28, 30, 34, 36 inzident
$m_{21}^{(1)}$ ist mit den Punkten 21, 22, 27, 28, 33, 34 inzident
$m_{22}^{(1)}$ ist mit den Punkten 19, 24, 25, 30, 31, 36 inzident
$m_{23}^{(1)}$ ist mit den Punkten 20, 23, 26, 29, 32, 35 inzident
$m_{31}^{(1)}$ ist mit den Punkten 23, 24, 29, 30, 35, 36 inzident
$m_{32}^{(1)}$ ist mit den Punkten 20, 22, 26, 28, 32, 34 inzident
$m_{33}^{(1)}$ ist mit den Punkten 19, 21, 25, 27, 31, 33 inzident .

Je zwei Kegelschnitte, die einen gemeinsamen Index haben, sind disjunkt (d. h. sie schneiden sich in keinem Konfigurationspunkt), je zwei andere Kegelschnitte haben genau 3 gemainsame Konfigurationspunkte.

Die Kegelschnitte $m_{pi}^{(1)}$ sind natürlich mit dem ersten Wendedreiseit (Koordinatensystem) verbunden. Wir können unsere Überlegung auch für die übrigen Wndedreiseite wiederholen. Weil die äquianharmonischen Kubik vier verschiedene Wendedreiseite hat, bekommen wir im ganzen $4 \cdot 9 = 36$ Konfigurationskegelschnitte in dieser Konfiguration.

Die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Restklasse $\mathbf{Q}_{18}^{(1)}$ der automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik in der komplexen projektiven Ebene bilden die Konfiguration $(18_{12}, 36_6)$.

Wir werden endlich die Eigenschaften der Restklasse $\mathbf{Q}_{18}^{(2)}$ der automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik in der projektiven Ebene studieren. Ähnlich wie in 2 oben erwähnten Fallen werden wir zeigen, daß 36 Kegelschnitte existieren, wobei jeder Kegelschnitt mit 6 Punkten aus Tabelle (10) inzident ist und jeder Punkt aus Tabelle (10) mit 12 Kegelschnitten inzident ist.

Der Beweis erfolgt durch mechanische Rechnung. Es ist leicht zu bestätigen, daß 9 Kegelschnitte mit den Gleichungen

$$m_{pi}^{(2)} = y_p^2 x_j x_k - a^2 y_q y_r x_i^2 = 0 \tag{12}$$

Konfigurationskegelschnitte sind.

Die Substitution der Koordinaten aus der Tabelle (10) in die Gleichungen (12) liefert folgende Ergebnisse:

$m_{11}^{(2)}$ ist mit den Punkten 37, 38, 43, 44, 49, 50 inzident
$m_{12}^{(2)}$ ist mit den Punkten 39, 41, 45, 47, 51, 53 inzident
$m_{13}^{(2)}$ ist mit den Punkten 40, 42, 46, 48, 52, 54 inzident
$m_{21}^{(2)}$ ist mit den Punkten 39, 40, 45, 46, 51, 52 inzident
$m_{22}^{(2)}$ ist mit den Punkten 37, 42, 43, 48, 49, 54 inzident
$m_{23}^{(2)}$ ist mit den Punkten 38, 41, 44, 47, 50, 53 inzident
$m_{31}^{(2)}$ ist mit den Punkten 41, 42, 47, 48, 53, 54 inzident
$m_{32}^{(2)}$ ist mit den Punkten 38, 40, 44, 46, 50, 52 inzident
$m_{33}^{(2)}$ ist mit den Punkten 37, 39, 43, 45, 49, 51 inzident.

Je zwei Kegelschnitte $m_{pi}^{(2)}$, die einen gemeinsamen Index haben, sind disjunkt je zwei andere Kegelschnitte haben genau 3 gemeinsame Punkte in dieser Konfiguration.

Die Kegelschnitte $m_{pi}^{(2)}$ sind natürlich mit dem ersten Wendedreiseit (Koordinatensystem) verbunden. Wir können aber unsere Überlegung auch für die übrigen Wendedreiseite wiederholen. Weil die äquianharmonische Kubik vier verschiedene Wendedreiseite hat, bekommen wir im ganzen $4 \cdot 9 = 36$ Konfigurationskegelschnitten in dieser Konfiguration.

Die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Restklasse $\mathbf{Q}_{18}^{(2)}$ der automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik in der komplexen projektiven Ebene bilden die Konfiguration $(18_{12}, 36_6)$.

Aus Vorergebnissen ist es ersichtlich, daß 108 solche Kegelschnitte existieren, wobei jeder Kegelschnitt mit 6 Punkten aus Tabellen (8), (9), (10) inzident ist und jeder Punkt aus Tabellen (8), (9), (10) mit 12 Kegelschnitten inzident ist, d. h. die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Gruppe $\mathbf{Q}_{54}$ der automorphen Kollineationen einer äquianharmonischen Kubik in der komplexen projektiven Ebene bilden die Konfiguration $(54_{12}, 108_6)$.

4. Zusammenfassung

Die Eigenschaften der Gruppe $\mathbf{F}_{18}$ der automorphen Kollineationen der allgemeinen elliptischen Kubik in der komplexen projektiven Ebene hat B. Bydžovský [2] studiert. K. Havlíček [3] hat gezeigt, daß die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit dieser Gruppe $\mathbf{F}_{18}$ die Konfiguration $(18_{12}, 36_6)$ bilden.

In dem Kapitel 2 dieser Arbeit hat man gezeigt, daß die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Gruppe $\mathbf{G}_{36}$ der automorphen Kollineationen der harmonischen Kubik in der komplexen projektiven Ebene die Konfiguration $(36_{12}, 72_6)$ bilden.

Endlich hat man in dem Kapitel 3 dieser Arbeit gezeigt, daß die Punkte und Kegelschnitte im Zusammenhang mit der Gruppe $\mathbf{Q}_{54}$ der automorphen Kollineationen der äquianharmonischen Kubik in der komplexen projektiven Ebene die Konfiguration $(54_{12}, 108_6)$ bilden.

Literaturverzeichnis

[1] BYDŽOVSKÝ, B.: Úvod do algebraické geometrie, Praha 1948.

[2] BYDŽOVSKÝ, B.: O jisté grupě rovinných kolineací, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky *38* (1909), 25—32, 150—164.

[3] HAVLÍČEK, K.: Über eine Konfiguration der Punkte und Kegelschnitte in der projektiven Ebene, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technische Universität Dresden, *13* (1964), von 725 bis 726.