Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Kuřina
Hilbert nebo Hadamard?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 57 (2012), No. 3, 239–253

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/143205`

vyučování

HILBERT NEBO HADAMARD?

František Kuřina, Hradec Králové

1. Úvod

Článek je věnován problematice vyučování geometrii, a to především na střední škole. Východiskem mých úvah je poznání charakteru elementární geometrie ve dvacátém století. Geometrie byla, jak známo, v podstatě deduktivně zpracována řeckým matematikem Eukleidem z Alexandrie (cca 365–300 před n. l.) v díle *Základy*, které vyšlo v překladu *Františka Servíta* v r. 1907 [16], nově pak vyšel tento překlad s komentáři *Petra Vopěnky* v letech 2007 (knihy I–IV) a 2009 (knihy V–VII) ([14], [15]).

V roce 1899 vyšly u příležitosti slavnostního odhalení Gaussova pomníku v Göttingen *Základy geometrie* německého matematika *Davida Hilberta* (1862–1943), které na úrovni matematiky dvacátého století zpracovávají tématiku Eukleidových Základů. Je to kniha, v níž Hilbert položit základy matematického formalismu. Geometrické pojmy mají pouze ten obsah, který vyplývá z explicitně formulovaných axiomů. Cílem Hilbertova pojetí bylo studovat nezávislost a bezespornost axiomatického systému.

Rok před tím, v roce 1898, vydává francouzský matematik *Jaques Hadamard* (1865–1963) obsáhlé dílo *Přednášky z geometrie*, v němž poutavým a přirozeným způsobem vykládá elementární geometrii. Autor si vědomě klade vzdělávací cíle a o kvalitě jeho díla mluví nejen řada vydání ve Francii, ale i v dalších zemích. V posledním americkém vydání z r. 2008 píše překladatel *Mark Saul*: „Hadamardova vize geometrie je i po stu letech pozoruhodně svěží. Klasické přístupy jsou citlivě vyváženy s moderními postupy“ ([19], s. ix).

Bernard Bolzano napsal ve svém životopise: „… povím, jak se stal jednou slavný matematik Eukleides mým lékařem. Bylo to právě o jedněch prázdninách, které jsem jako obyčejně trávil v Praze, když mě přepadla churavost, jakou jsem ještě nikdy nepocítil, a která se projevila mrazením a malátností všech údů. Abych se co možno vzchopil, pustil jsem se do Eukleidových Základů a četl jsem nyní poprvé nauku o vztazích, kterou jsem zde našel zpracovanou způsobem pro mne ještě docela novým. Duchaplnost eukleidovského podání působila mi tak živou radost, že jsem se okamžitě cítil opět zdráv“ ([6], s. 30).

Já jsem pocítil podobnou radost a uspokojení nad Hadamardovou geometrií, když jsem ji jako student učitelství četl na Matematicko-fyzikální fakultě v Praze. Tato četba se stala zárodkem mé lásky ke geometrii.

Ačkoliv Hilbertovy záměry nebyly patrně pedagogické, ovlivnily jeho Základy, podobně jako Základy Eukleidovy vyučování geometrie v mnoha zemích. A to je také důvod, proč se o Hilbertových Základech zmiňuji. Patrně v menší míře ovlivňoval geometrické vzdělávání přístup Hadamardův. Podle mého názoru – na škodu věci. Ačkoliv Hadamard všechny věty dokazuje, není jeho kniha koncipována,

---

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc., Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Kralové, Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové, e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz

na rozdíl od Hilberta, axiomaticky. Pro další výklad nazvu koncepci Eukleides – Hilbert koncepcí logickou, Hadamardův přístup budu stručně nazývat přístupem přirozeným nebo psychologickým.

Jak učit geometrii na střední škole a jak ve vzdělávání učitelů? Podle Hilberta nebo podle Hadamarda? Zamyšlení nad touto otázkou je hlavní cíl mého příspěvku. Klíčem k porozumění nějakému jevu je poznání souvislostí, poznání struktury jevu. Všimněme si tedy nejdříve pojmu struktura.

2. Co je struktura?

Němečtí autoři *Christoph J. Scriba* a *Peter Schreiber* napsali v knize *5 000 let geometrie – Historie, kultura a lidé*: „Dávno předtím, než se vyvinulo písmo, patrně člověk vnímal a systematicky využíval geometrické struktury. Příroda nabízela zraku nejen linie křivé, ale i čáry přímé, např. na stéblech trávy a kmenech stromů, na jejich průřezech i kružnice. Při tkaní a pletení vznikaly jednoduché dvojdimenzionální vzory, které byly záměrně modifikovány a napodobovány jako ozdoby na hliněných nádobách. Takovéto geometrické ornamenty jsou prokazatelné již v době 40 000 let před začátkem našeho letopočtu“ ([45], s. 6).

Slovo struktura se užívá v mnoha souvislostech, např. struktura knihy, struktura učiva, struktura jazyka, struktura sociální, struktura psychická, struktura matematická, ...

Pojem struktura nelze patrně v přesném smyslu definovat. Pro naše účely stačí toto vymezení: „Struktura je souhrn vztahů, které existují mezi částmi uspořádaného celku, propůjčují mu stabilitu a zaručují jeho funkci“ ([40], s. 524). O strukturách existuje dnes mnoho literatury. Připomeňme namátkou knihy: *Struktura vědeckých revolucí* amerického fyzika *Thomase S. Kuhna* z r. 1962 [29], *Struktura a vhled nizozemského matematika* Pierre M. Van Hieleho z r. 1986 [51] nebo *Struktura a celek* francouzského filozofa *Patricka Seriota* z r. 1999 [48].

O kořenech strukturalismu v souvislosti s matematikou píše působivě *Amir D. Aczel*. „Myšlenky strukturalismu klíčily v seminářích ve francouzské metropoli, které koncem čtyřicátých let navštěvoval *Alexandre Grothendieck*. Jejich tvůrci byli ve skutečnosti všichni profesoři, které v Paříži potkal: *Cartan*, *Weil*, *Chevalley* a další. Pařížský kavárenský život neovládali jen filosofové, spisovatelé a umělci, ale také matematici. A patrně poprvé v moderní historii matematika hrála klíčovou roli v běžné kultuře – způsobem, jaký měl obdoby pouze ve velmi vzdálené minulosti v antickém Řecku“ ([1], s. 54).

V lingvistice se poprvé objevil pojem struktury, který na matematickém základu zpřesnil *Bourbaki*. Pod tímto pseudonymem publikovala, jak známo, skupina mladých matematiků, kteří si dali cíl koncipovat v jednotném pojetí celou matematiku. A právě „matematika se stala zejména v Bourbakiho díle oblastí, v níž strukturalistické myšlenkové hnutí dvacátého století rozvinulo svou sílu a význam. Základním předpokladem strukturalismu je, že veškeré lidské chování vychází z vrozené schopnosti uspořádávat a třídit. Tato schopnost utajená v lidském mozku, dává vzniknout jazyku. Tytéž struktury skryté uvnitř mozku jsou však také zdrojem mýtů, tvořivosti a různých sociálních modelů .... Strukturalismus se zabývá vztahy mezi celky a jejich součástmi. Celek je logicky nadřazen nad jednotlivými částmi a důležitější než samotné objekty jsou vztahy mezi nimi. Skrytá struktura má tedy mnohem větší význam než to, co je v dané situaci zřetelné nebo nápadné .... Strukturalismus je interdisciplinární a multidisciplinární, ovlivnil jak matematiku, tak lingvistiku, antropologii a literární kritiku. Příchod strukturalismu způsobil myšlenkovou revoluci" ([1], s. 113, 114).

„Bourbakisté zdůrazňovali matematické struktury na úkor aplikací a příkladů. V jejich knihách nebyly žádné obrázky – jako by matematickou intuici svázali axiomatickou svěrací kazajkou" ([4], s. 261). „Většina matematiků tuto svěrací kazajku odmítala a obrázků plně využívala, protože v nich viděli intuitivního průvodce logikou a zkratku, která jim pomáhala zahlédnout cestu k důkazu nebo najít fatální protipříklady" ([4], s. 236).

Přesto však i Aczel zdůrazňuje: „Bourbaki a jeho příspěvky byly přímým produktem kulturního kvasu, který probíhal v prvních desetiletích dvacátého století. Čistá matematika se může jevit jako abstraktní obor lidského zkoumání bez přímé návaznosti na reálný svět. Ve skutečnosti je úzce provázána s obecnou kulturou. Skoro žádní matematici, dokonce ani ti, kteří se zabývají nejabstraktnější a nejtajemnější matematikou, nejsou zcela odloučeni od skutečností běžné kultury, která je obklopuje. Velký pokrok v matematice proto často následuje za důležitými trendy ve všeobecné kultuře; a naopak, vývoj v matematice působí jako zvěstovatel změn v kultuře vůbec" ([1], s. 61).

Do české didaktiky zavedl matematický pojem struktura *Jaroslav Šedivý* v knize příznačně nazvané *O modernizaci školské matematiky.* V ní jsou v bourbakistickém duchu vyloženy pojmy *množina, relace, binární operace* a *algebraické struktury grupoid, pologrupa, grupa, okruh a těleso* ([50], s. 209). Matematická struktura se obvykle chápe jako soubor množin a relací s explicitně formulovaným systémem jejich vlastností (to jsou tzv. axiomy struktury). Podle Šedivého „Obsahem moderní matematiky je cílevědomé studium různých matematických struktur" ([50], s. 17).

Struktury se vyskytují v přírodě i ve společnosti. Jako příklady můžeme uvést armádu určitého státu, mraveniště, živočišnou či rostlinnou říši, ale např. i rodinu nebo zvolené místo. Město jako souhrn jeho obyvatel s jejich organizacemi, vztahy obyvatel k organizacím, vztahy mezi organizacemi a vztahy mezi lidmi je ovšem zcela jiná struktura než totéž město jako souhrn jeho domů s příslušnými ulicemi, dopravou, kanalizací atp. Strukturou je např. český jazyk s příslušnou slovní zásobou a zákonitostmi tvorby vět a gramatikou, zcela jinou strukturu tvoří všechny jazyky světa, ... Tyto struktury odrážejí způsoby uspořádání příslušných celků.

Objektivně existující struktury přírody a společnosti člověk vnímá, vytváří si o nich představy, získává s nimi zkušenosti.

Systematickým studiem struktur přírody a společnosti se stávají struktury složkou vědy a kultury. Podle *Romana Osipoviče Jakobsona* (1896–1982) „každý soubor jevů, kterým se současná věda zabývá, není pojímán jako mechanické seskupení, ale jako strukturní jednotka, jako systém. Hlavním úkolem je odhalit její vnitřní zákony, statické i dynamické. V centru zájmu současného vědce nejsou vnější podněty, ale vnitřní podmínky vývoje, nikoli mechanický aspekt vývoje, ale jeho fungování ([48], s. 282). Přitom je zajímavé, že podle původní koncepce *F. de Saussera* (1857–1913) je systém konstrukcí, která je závislá na úhlu pohledu, kdežto podle *Jakobsona* a *Trubeckého* je realita systematická sama o sobě" ([48], s. 283).

Činnost pražského lingvistického kroužku, jehož výsledky jsme zde připomněli, hodnotí *Jiří Fiala* „jako nejvyšší přínos české vědy a kultury dvacátého století kultuře světové" ([17], s. 84).

Aniž bychom se zabývali těmito hlubokými a do značné míry diskutabilními filozofickými otázkami, připomeňme, že matematika je konstruovaná realita, množiny, relace a přijaté axiomy jsou součástí definic příslušných struktur. Protože, jak ukážeme v dalším, je možné např. prostor strukturovat různě, je konstrukce závislá na úhlu pohledu budovatele teorie. Naše středoškolská matematika odráží ideu, které se patrně pod nepřímým vlivem bourbakismu nebylo možné ve druhé polovině 20. století vyhnout, že základem matematiky jsou matematické struktury a cílem vyučování je seznámit studenty s těmito strukturami. Tak vznikly např. v oblasti geometrie učebnice [43], [44] a [26]. Vzdělání orientované na základní struktury i na nižších stupních škol se realizovalo v mnohých státech světa, u nás např. zavedením tzv. množinové matematiky ve školské reformě z roku 1976; bylo však neúspěšné. Idea významného amerického psychologa *Jerome S. Brunera*, že „učební osnovy určitého předmětu mají být určovány nejzákladnějším porozuměním, jehož lze dosáhnout na základě nejobecnějších principů, které tvoří strukturu tohoto předmětu“ ([8], s. 38), se ukázala jako mylná.

3. Geometrické struktury

Je téměř neuvěřitelné, že objevitelé neeukleidovské geometrie (ruský matematik *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij* (1793–1856), maďarský matematik *Jánoš Bolyai* (1802–1860) a německý génius *Karl Friedrich Gauss* (1777–1855)) vytvářeli svá díla v době, kdy nebyla známa axiomatická metoda. Je to spíše tak, že k jejímu vzniku bádáním o neeukleidovské geometrii přispěli. Za tvůrce moderní axiomaticky lze pokládat, jak jsem se už zmínil, *Davida Hilberta.* Jeho axiomatika je založena na struktuře

$$H = (B, P, i, m, s_1, s_2)\,,$$

kde B je množina bodů, P je množina přímek, i je binární relace incidence bodů a přímek, m je ternární relace „mezi“ na množině bodů přímky, s_1 je binární relace shodnosti úseček, s_2 je binární relace shodnosti úhlů. Tato struktura je popsána, jak známo, axiomy incidence, uspořádání, shodnosti, spojitosti a rovnoběžnosti. V téže době vypracoval základy elementární geometrie i italský matematik *Mario Pieri* (1860–1913). Primitivním pojmem jeho axiomatiky je pojem pohybu. Kromě toho vytvořil axiomatickou geometrii založenou na pojmu vzdálenost ruský autor *Venjamin Fedorovič Kagan* (1869–1953). Hilbertovy Základy [22] zastínily práce Pieriho [41] i Kagana [25], ačkoliv nelze říci, že by Hilbertovo pojetí bylo nejvhodnější (to je nejen názor můj, v podobném duchu se vyslovil i ruský matematik *Isaak Moisevič Jaglom* ([38], s. 598 ruského překladu). V roce 1918 publikuje v knize *Prostor, čas, hmota* [56] americký matematik německého původu *Herrman Weyl* (1885–1955) axiomatiku elementární geometrie založenou na struktuře

$$W = (B, V, s, n_1, n_2, v)\,,$$

kde B je množina bodů, V je množina vektorů, s je algebraická operace sčítání vektorů, n_1 je násobení vektoru reálným číslem, n_2 je skalární násobení vektorů a v je zobrazení, které libovolným dvěma bodům přiřazuje vektor. Je zajímavé, že tato axiomatika vzešla z popisu reálného prostoru ve spolupráci s *Albertem Einsteinem* (1879–1955) při tvorbě teorie relativity.

S trochou nadsázky lze říci, že dvacáté století nic zásadně nového v axiomatice elementární geometrie nepřineslo; k primitivním pojmům bod, přímka, rovina, incidence, uspořádání se přidává buď shodnost úseček a úhlů, nebo míra úsečky, nebo pohyb, nebo pojem vektoru.
Uveďme nyní několik příkladů.

Jan Vyšín (1908–1983), jedna z vůdčích osobností naší didaktiky matematiky po roce 1945, napsal pro vzdělávání učitelů v hilbertovském duchu učebnici *Elementární geometrie*. Je to poctivá kniha. Na samém začátku autor varuje: „Čtenář si musí být vědom toho, že solidní studium základů geometrie, byť se mu zdálo nezábavným, protože zdánlivě nepřináší nové poznatky, je pro něho jako pro učitele geometrie nezbytně nutné, má-li této disciplině vyučovati na vědeckém podkladě“ ([54], s. 4). Kniha tedy začíná varováním: Věda je nuda.

Axiomy incidence a uspořádání jsou „silné“ a vměstnají se na jednu stranu. Mezi nimi je i axiom o dělení roviny přímkou na poloroviny. O obrázcích autor zdůrazňuje: „Veškeré obrazy, kterými je výklad této učebnice doprovázen, slouží jen k tomu, aby si čtenář snáze zapamatoval danou situaci a orientoval se při dokazování ([54], s. 6). Trojúhelník je definován „množinově“: *Trojúhelník ABC se skládá ze všech bodů úseček AX, kde bod X probíhá stranu BC.* ([54], s. 19). Dokazuje se např. věta: *Budiž ABC trojúhelník, P bod jeho vnitřku, PX libovolná polopřímka s počátkem P. Pak polopřímka PX obsahuje právě jeden bod obvodu trojúhelníku ABC*“ ([54], s. 20).

Axiomy shodnosti úseček a úhlů jsou čtyři. Tradiční věta (sss) o shodnosti trojúhelníků je zde definicí, věty (sus), (usu), (suu) a (Ssu) se dokazují. Studují se shodná zobrazení v přímce a v rovině, včetně vět o rozkladu shodnosti na osové souměrnosti. Spojitost se zavádí „dedekindovským“ axiomem, jako věta se dokazuje tradiční Archimédův axiom. Dosti podrobně se studují vlastnosti kružnice a eukleidovské konstrukce.

Axiom rovnoběžnosti se uvádí v obvyklé formě (daným bodem k dané přímce existuje nejvýše jedna přímka rovnoběžná). Teprve na s. 149 se zavádí délka úsečky a poctivě se dokazuje její existence a další věty. Podobně podrobně se studuje velikost úhlů. Následují kapitoly o podobnosti, mnohoúhelnících a obsahu na základě shodné rozložitelnosti. Na 265 stránkách je soustředěn skutečně bohatý obsah. Odhaduji, že snad na žádné české univerzitě se dnes takto důkladně planimetrie nestuduje.

Zofia Krygowská (1904–1988), výrazná postava světového modernizačního hnutí, se ve své knize [28] od Hilberta velmi výrazně odchyluje. Po výkladu o pojmu množina a uspořádání přechází autorka k „silným“ axiomům geometrie roviny. V prvním axiomu požaduje existenci nekonečně mnoha bodů roviny a nekonečně přímek roviny procházejících daným bodem. Druhý axiom je tradiční: Dvěma různými body prochází právě jedna přímka, následuje axiom rovnoběžnosti. Dále se zavádí vzdálenost jako číslo přiřazené libovolným dvěma bodům a na každé přímce se požadují dvě uspořádání bodů. Následuje axiom o nanášení úsečky dané délky na polopřímku. Po zavedení příslušných pomocných pojmů je formulován pozoruhodný „topologický“ axiom: Úsečka, jejíž jeden krajní bod je vnitřním, druhý vnějším bodem útvaru, má body společné s hranicí útvaru. Další axiom vyjadřuje názorný fakt, že přímka dělí rovinu na dvě konvexní neomezené oblasti. Devátý axiom se týká shodnosti. K libovolným dvěma bodům roviny existuje její shodné zobrazení, pro něž jsou tyto body samodružné.

Gustav Choquet, významný francouzský matematik a čestný doktor Univerzity Karlovy, napsal učebnici [23], v níž je axiomatika s primitivními pojmy bod, přímka, rovina, incidence, rovnoběžnost, kolmost a vzdálenost úvodem ke studiu lineární algebry. Lineární algebra je, v naprostém odklonu od Eukleida a Hilberta, základem elementární geometrie v pojetí Jeana Dieudonného, jednoho ze zakladatelů skupiny *Nicolas Bourbaki* [12].

V druhé polovině dvacátého století vznikla celá řada dalších axiomatik elementární geometrie. Připomeňme např. publikace americké [38], [57], ruské [5], [42], německé [7], [35], [3] a francouzskou [13].

Názor, že „současná axiomatika geometrie se většinou opírá o knihu Davida Hilberta Základy geometrie" ([46], s. 218) je patrně poněkud zkreslující.

Axiomaticky koncipované učebnice vycházejí programově z předpokladu, že čtenář nemá žádné předběžné znalosti o studované oblasti. Ta je totiž plně definována příslušnými axiomy a jakékoli představy o pojmech studiu spíše škodí než pomáhají. Připomeňme v té souvislosti často citovaný Hilbertův výrok, že v axiomech a matematických větách lze nahradit slova „bod", „přímka", „rovina" např. slovy „stůl", „židle", „tácek". Takovýto přístup je pochopitelný z hlediska studia axiomatiky, těžko však bude akceptovatelný např. pro technika a je zcela nevhodný i z hlediska pedagogického a psychologického. Poznávací proces není procesem „lineárním", vyslovením definice se nemusí pojem dostat do myšlenkového světa studenta. Teprve „pracovním" kontaktem si student pojem osvojuje. Významnou roli přitom hrají zkušenosti, představy, předběžné znalosti, ale např. i ambice studenta a řada dalších souvislostí.

4. Přirozený přístup ke geometrii

Vraťme se k monografii 5 000 let geometrie, jíž autoři recenze v PMFA [37] hodnotí jako „v každém směru excelentní knihu". Na rozdíl od řady prací z historie matematiky zasazují Scriba a Schreiber vývoj matematiky do společenských souvislostí. Každá epocha, které se věnují, je uvedena tabulkou „významných historických událostí" a uzavřena přehledem „podstatných geometrických jevů" příslušného období. Je to v souladu s názorem amerického matematika *P. A. Griffitha*, který charakterizuje matematiku jako „hledání struktur a vzorů (patterns), které do našeho vesmíru vnášejí pořádek a jednoduchost" ([18], s. 206). Protože je podle mého názoru takovýto přístup poučný i pro koncipování vzdělávání, uvedu zde stručně pohled Scriby a Schreibera na geometrii 20. století.

Na pozadí vývoje vědy a techniky (Einsteinova teorie relativity, počítače, ...), ale i umění (architektura, výtvarné umění, ...), v prostředí významných společenských událostí se ve 20. století podle Schreibra a Scriby vyvíjela geometrie v těchto směrech:

Základy geometrie: axiomatické založení geometrie, David Hilbert, metodologická a logická bádání.

Abstrakce: nekonečnědimenzionální prostory, přenos geometrických pojmů do dalších oblastí.

Užití v přírodních vědách: teorie relativity, Minkowského geometrie, kvantová fyzika, fyzika pevných látek, aperiodická parketáž.

Užití v technice: kinematika, konstrukce robotů, diferenciální geometrie ploch, stochastická geometrie, kombinatorická topologie, dopravní sítě.

Užití v informatice: grafický popis objektů, rozpoznávání obrazů.

Geometrie v umění: nereálná zobrazení, parketáž, ornamenty (Escher, Vasarely, Bill, Dali).

Řešení problému čtyř barev.

Jestliže přírodní vědy, technika a umění ovlivňovaly geometrii ve 20. století, jak přesvědčivě dokládají Schreiber a Scriba, měly by tím spíše ovlivňovat zkušenosti žáků a podněty z přírody, techniky a umění vyučování, speciálně vyučování geometrie. Ve středoškolských lavicích sedí snad několik matematiků, jsou tam však ve větší míře budoucí lékaři, přírodovědci a technici, vyskytují se tam i budoucí filozofové a umělci.

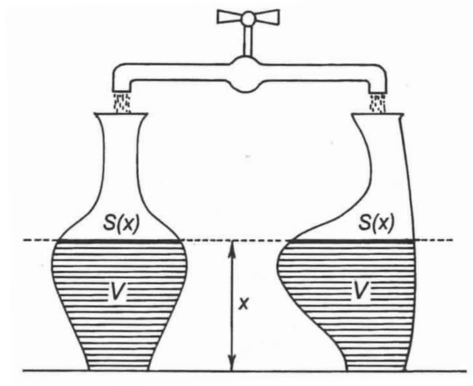
Všimněme si proto některých možností, které by vyučování geometrie mělo využívat.

Náš světově proslulý malíř *František Kupka* (1871–1957) napsal: „Architektura – umění, jež vzešlo z potřeby přístřeší – zakládá se zcela na řešení dělení prostoru. Pro ni otázka objemu tkví v tom, že jedna nebo několik částí prostoru je uzavřeno .... Utváření objemu vyplývá tu zcela z užitkové podmíněnosti“ ([27], s. 137). Vystihl tak princip dělení a vyplňování prostoru, který považuji za základní pro koncepci školské geometrie. Příroda rozdělila povrch Země na pevniny a moře, historie rozdělila kontinenty na státy. Dělení a vyplňování prostoru je spjato s praktickými problémy života starých civilizací a se vznikem prvních geometrických poznatků. Měření délek se zakládá na *Archimedově axiomu*

$$\forall a, b, \in R^+ \; \exists n \in N \; [na > b] ,$$

tzv. *Cavalieriho princip* formuloval Archimédes téměř 2 000 let před Cavalierim „fyzikálně“:

Jestliže do dvou nádob přitéká voda tak, že v každém okamžiku má hladina vody týž plošný obsah, pak je v obou nádobách v každém okamžiku týž objem vody (obr. 1).



Obr. 1.

Dělení roviny čtvercovou sítí jako geometrické vyjádření starého hesla *Divide et impera, rozděl a zvládni* uvádí *František Kadeřávek* v souvislosti s jeho rolí „transformační“, přenášecí, při zvětšování obrazů ([24], s. 57), je to ovšem i základ *Jordanovy teorie míry*. Problémy spjaté s dělením roviny jsou živé i dnes. Vyřešení tzv. problému čtyř barev uvádějí Schreiber a Scriba jako jeden z významných výsledků matematiky 20. století, pozoruhodné příklady vyplňování roviny nebo její části jsou známy z umění (např. *Maurits Escher*) i z matematiky (*Johannes Kepler*, *Roger Penrose* aj.). Řadu ukázek lze najít v knize [47] nebo v článku [11].

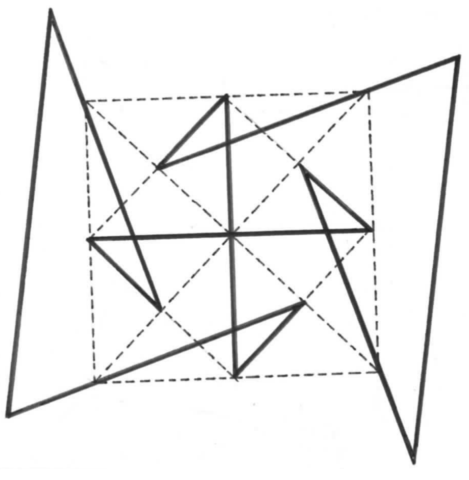
Ačkoliv se pojem prostoru dostává do matematiky až v 17. století, dere se do školské matematiky z přírody, techniky a umění. I proto připomínám některé ideje Kupkovy, Archimedovy a Cavalieriho.

Matematika souvisí tedy nejen s řešením praktických otázek života ve společnosti, ale i s uměním. Všimněme si proto souvislosti geometrie a umění podrobněji.

Pohybem ruky *Mikuláše Alše* vznikla kresba reprodukovaná na obr. 2. Je to kresba pro autora netypická, skoro se chce říci čmáranice, přesto však tento obrázek vyvolává iluzi trojdimenzionálního výjevu. Takovýto „zázrak“ morfismu mezi dvojrozměrným obrázkem a trojrozměrnou realitou je základem deskriptivní geometrie, disciplíny významné např. pro aplikace geometrie na techniku. Je ovšem i základem části výtvarné tvorby. Užitá výtvarná tvorba se může realizovat dvěma směry: výtvarné dílo je obrazem existující reality nebo je základem konstrukce nové skutečnosti (plán stavby či stroje, návrh kostýmu či divadelní scény).

Umělecká výtvarná tvorba nemusí mít

Obr. 2.



Obr. 3.

přirozeně charakter zobrazení např. objektů přírody, může být i konstrukcí vyjadřující „pouze“ estetické hodnoty. Na obr. 3 uvádím jako příklad geometrickou konstrukci švýcarského výtvarníka *Paula Kleea.*

Dětská kresba (tužkou či pastelkou) má již od raného věku ráz zobrazo-

Obr. 4.

vání prostorových předmětů, přitom nemusí jít nutně o zobrazování v geometrickém smyslu. Doložme to obrázkem 4, který správně zachycuje skutečnost, že hrnek má jistý objem a že lze do něj nalít shora tekutinu, vidět však hrnek takto nemůžeme. Kresba je tedy svým způsobem abstrakcí. Skutečnost, že příroda mluví jazykem geometrie můžeme ilustrovat obrázkem korálových útvarů (obr. 5) z *Haeckelovy* monografie [20]. Po teoretické stránce se této problematice věnuje článek *Univerzální přírodní tvary* [52].

Dalším rysem přirozeného přístupu ke školní geometrii je dimenzionální pohled. Půdorys budovy je její dvojrozměrný obraz, průnikem koule a roviny je kruh, průnikem dvou různoběžných rovin je přímka, ...

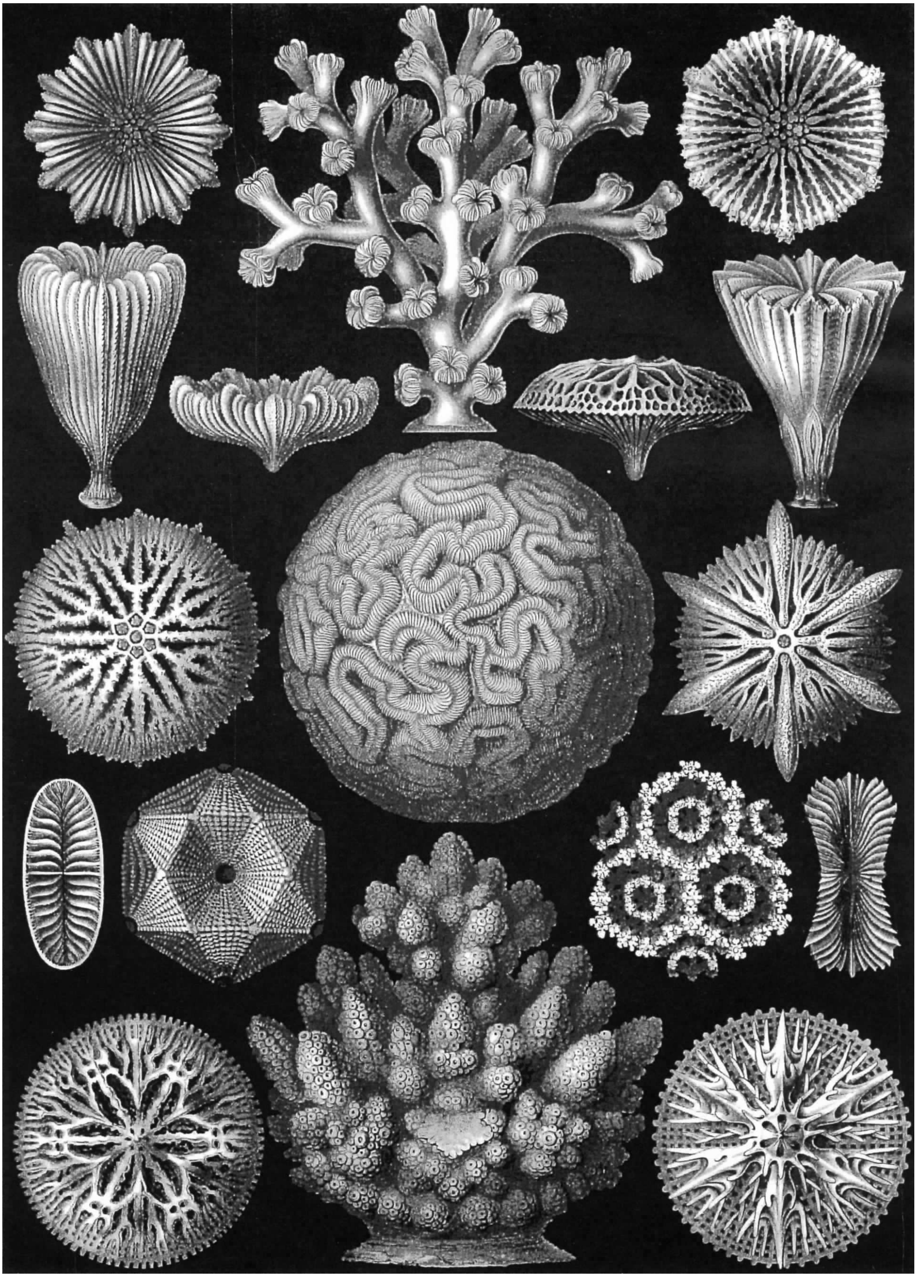
Přirozený přístup ke geometrii se opírá o tyto skutečnosti [30]:

1. Prostor lze dělit na části.
2. Části prostoru lze vyplňovat.
3. V prostoru se lze pohybovat.
4. V prostoru existují útvary trojdimenzionální, dvojdimenzionální a jednodimenzionální.

Přitom tento přístup:

1. Lze rozvíjet od útlého mládí dítěte.
2. Ukazuje souvislost matematiky s realitou a kulturou.
3. Je spjat s tvorbou řady matematických pojmů a řešením různorodých úloh.

Doložme tyto myšlenky konkrétněji.



Obr. 5.

Dítě poznává dělení prostoru „od kolébky“, v níž je uloženo, k ohrádce, v níž si hraje, v pokoji, v němž se batolí, v bytě, v němž žije, v autě, v němž se vozí, v hřišti, na němž si hraje, ... Při mnohých činnostech se seznamuje i s vyplňováním prostoru (skládání kostek do krabičky, lití čaje do hrnku, ukládání knih do poličky, ...). Pohyb je rovněž s dítětem „všudypřítomný“: pohyb vlastní ručičkou, batolení se, chůze, jízda autem, výtahem, ... Dimenzionální stránku může dítě pozorovat např. na těchto jevech: míč a jeho stín, botička a její stopa, maminka a její fotografie, ...

Základní poznatek o dělení roviny je jak známo vyjádřen větou *Jordanovou*, kterou si zde připomeneme v tomto znění: *Rovinná křivka, která sama sebe neprotíná a je uzavřená, dělí rovinu na dvě oblasti, z nichž jedna je omezená.* Její modifikací je věta: *Uzavřená lomená čára, která sama sebe neprotíná, dělí rovinu na dvě oblasti.* Omezená z těchto oblastí je *mnohoúhelník*. Přímka dělí rovinu na dvě *poloroviny*, dvě různoběžné přímky dělí rovinu na čtyři úhly, ... Otáčením kružnice kolem přímky procházející jejím středem vznikne *kulová plocha*, otáčením přímky kolem přímky s ní různoběžné vznikne *rotační kuželová plocha*, ... Na myšlence o dělení a vyplňování prostoru je založeno učivo o velikostech geometrických útvarů (délka úsečky, velikost úhlu, obsah obrazce a objem tělesa).

Považuji za důležité, aby studenti pochopili, že geometrie, vlastně celá matematika, není jakýsi zjednodušený odštěpek matematiky – vědy, ale významná součást lidské kultury spjatá se životem společnosti, s ostatními vědními disciplínami, s technikou i s uměním.

V souvislosti s diskutovaným přirozeným přístupem k geometrii vyvstává opět otázka tzv. transformačního pojetí, o němž jsem psal v článku [33].

Když jsem si nyní, po šedesáti létech od prvního studia Hadamarda v ruském překladu, pročetl úvod vydání amerického, s překvapením jsem zjistil, že Hadamardův přístup odpovídá přirozenému přístupu ke geometrii, jak jsem ho níže popsal. Na rozdíl od Hilberta Hadamard využívá zkušeností studentů s prostorem, v němž žijí. Píše např.: Čára je vytvářena pohybem bodu. Těleso je ohraničená část prostoru. Útvary jsou shodné, lze-li jeden přemístit do druhého tak, že se ve všech částech kryjí .... Hadamard pracuje s nedefinovanými pojmy běžného života, které umožňují utvářet si správné geometrické představy a připravit si půdu pro solidní matematický výklad. Jeho krásná kniha uvádí 422 netriviálních úloh, americké vydání má 330 stránek, ruský překlad [2] obsahuje řešení všech úloh od *Dmitrije Ivanoviče Perepjelkina* a má rozsah 608 stránek.

V duchu Hadamardova přístupu jsou psány např. geometrie kanadského matematika *Herolda Scott Macdonald Coxetera* [10], německého didaktika *Ericha Wittmana* [55], amerického učitele *Michala Serry* [47] a našich didaktiků *Nadi Stehlíkové*, *Milana Hejného* a *Dariny Jirotkové* [49]. Vřele tyto publikace doporučuji ke studiu.

Přirozený přístup ke geometrickému vzdělávání se nutně musí odrazit i na problematice argumentování a dokazování. Dělat důkazy všech, i zcela zřejmých tvrzení, jak je to charakteristické pro deduktivní pojetí disciplíny, která vychází z axiomů, patrně není psychologicky přijatelné. Neznamená to ovšem, že přirozeně pojímaná geometrie je geometrie bez důkazů. Je totiž dost situací, v nichž se jeví argumentace a dokazování jako přirozené a potřebné.

Odvodit vzorec pro obsah trojúhelníku lze několika způsoby, jak to však bude se vzorcem pro objem jehlanu? Tento objem bude jistě záviset na obsahu podstavy a výšce jehlanu, jaká však bude tato závislost? Vzorec

$$V = abc = Sv$$

pro objem kvádru lze pomocí Cavalieriho principu přenést na vzorec pro objem hranolu, otázka odvození vzorce

$$S = \frac{1}{3}Sv$$

pro objem jehlanu (nebo kužele) by se mělo jevit studentu střední školy jako aktuální. Řešení je ovšem známé: nejjednodušší patrně je opět aplikace Cavalieriho principu rozkladem trojbokého hranolu na tři jehlany stejného objemu. Je překvapivé, že v učebnici [44] není tento důkaz zcela korektní.

Odvození vzorců „pouhou“ algebraickou kalkulací je poučné a neměli bychom je zanedbávat. Zde mám na mysli např. důkaz vzorce pro objem komolého jehlanu, Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku nebo odvození vlastností Apollóniovy kružnice. O významu algebraických kalkulů v tomto smyslu jsem psal v článku [34].

Student by nikdy neměl mít dojem: „dnes jsme dokazovali, že shodné trojúhelníky jsou shodné“. Spíše bychom ho měli provokovat úlohami toto typu:

1. Je možné, aby ze dvou shodných geometrických útvarů byl jeden částí druhého, ale druhý nebyl částí prvního?
2. Je možné, aby geometrický útvar měl dva různé středy souměrnosti?
3. Je možné rozdělit čtverec na 2012 čtverců?
4. Je možné, aby osa některého ostrého úhlu nebyla množinou všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost od jednoho jeho ramene jako od druhého?
5. Je možné, aby středy čtyř kružnic opsaných trojúhelníkovým stěnám některého čtyřstěnu ležely v jedné rovině?
6. Je možné, aby dva mnohoúhelníky, které nejsou shodné, měly po řadě shodné a rovnoběžné strany?
7. Je možné, aby v některém mnohoúhelníku nebyla vidět z některého bodu jeho vnitřku žádná strana celá?
8. Je možné, aby u některého mnohoúhelníku nebyla vidět z některého bodu jeho vnějšku žádná strana celá?
9. Je možné, aby sítí nebyl mnohostěn určen?
10. Je možné z daného rovnostranného trojúhelníku sestrojit sítě dvou různých těles?

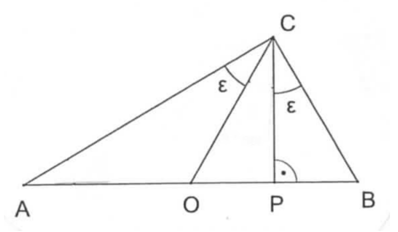
Svá stanoviska k těmto úlohám by měli studenti zdůvodňovat. Zde úlohy řešit nebudeme, jen prozradím, že ve všech případech je odpověď kladná. Studentské přístupy k většině těchto úloh jsem popsal v knize [31].

Proč byla geometrie jako první v historii zpracována deduktivně? Patrně proto, že v ní logické úvahy jsou vedeny geometrickou intuicí. Geometrickou intuici a představivost bychom se měli snažit systematicky pěstovat. O některých aspektech této otázky jsem publikoval článek [32].

Tradiční vyučování spočívá v přenosu části hotové matematiky z učebnic, případně monografií, do myslí studentů. Děje se tak výkladem učitele, který bývá obvykle doprovázen transmisí příslušných poznatků do sešitů žáků. Při takovém postupu se přirozeně velmi často zanedbává porozumění, které je pro skutečné poznání základní a nezastupitelné. Zdůrazňuje to např. i biolog a filozof *Zdeněk Neubauer*: „Každé poznání je intuitivní povahy, nejen šťastný nápad, náhlý objev či nečekané řešení. Vnitřní náhled je podmínkou pochopení a porozumění, jež jsou podstatou a cílem poznání. Veškeré poznání v tomto smyslu vychází ze setkání vhledu a vzhledu“ [39].

Ve středoškolském vyučování matematiky by nemělo jít prioritně o didaktické zpracování některé z matematických struktur, ale spíše o hledání struktur v různých situacích. Utváření struktur souvisí s vhledem do problematiky. Doložme to aspoň jednou úlohou:

V trojúhelníku ABC ($|AC| \neq |BC|$) označme CO těžnici a CP výšku z vrcholu C. Jsou-li úhly ACO a PCB shodné a je-li výška CP částí vnitřku úhlu ACB, je ACB pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB (obr. 6). Dokažte.

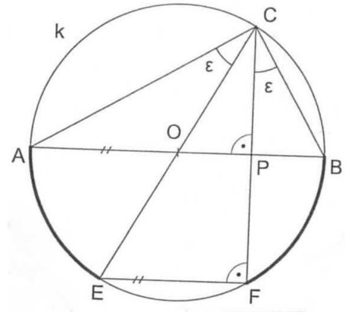


Obr. 6.

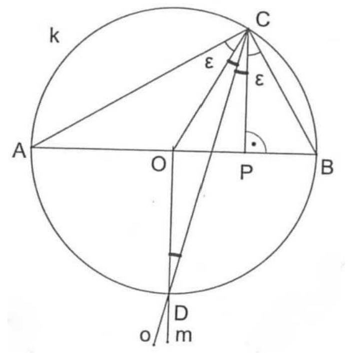
Doporučuji, aby si nyní čtenář úlohu vyřešil. Zde naznačím pouze pěti obrázky různé „strukturalizace“ problému.

Já jsem viděl strukturu nakreslenou na obr. 7, *Karel Horák* si nakreslil obr. 8, *Jaroslav Švrček* obr. 9, *Aart Goddjin* postupoval podle obr. 10, *Milan Hejný* využil osovou a středovou souměrnost podle obr. 11. Podrobné řešení úlohy spolu s dalšími čtyřmi odlišnými přístupy uvádím v knize [31].

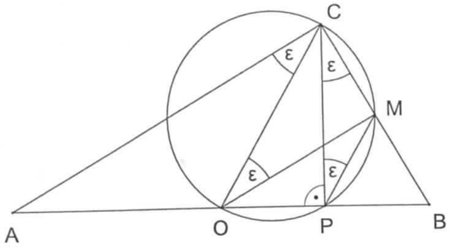
To je zcela jiné využití ilustrací v matematice, než o kterém se zmiňuji v odstavci Geometrické struktury.



Obr. 7.



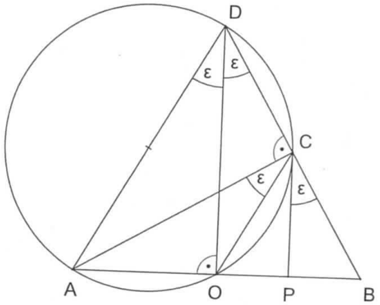
Obr. 8.



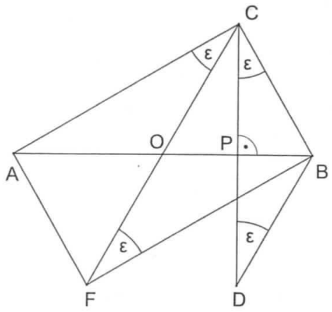
Obr. 9.

5. Závěry

Hilbertovy Základy geometrie jsou bezesporu důležité dílo matematiky počátku dvacátého století. Cílem mého příspěvku nebylo jeho význam nějakým způsobem hodnotit, či dokonce snižovat. Můj pohled je veden záměry didaktickými.



Obr. 10.



Obr. 11.

V citovaných Geometriích Hadamarda a Hilberta se setkala dvě pojetí axiomů. U Hadamarda jsou axiomy pravdivé výpovědi o prostoru, u Hilberta jsou axiomy za pravdivé přijaté složky definice struktury. Nemýlím-li se, není tento dvojí přístup k axiomům v české literatuře explicitně vysvětlen.

Středoškolská geometrie by měla být koncipována v Hadamardově duchu. Budoucí učitelé by ovšem měli být dobře poučeni o axiomatické výstavbě teorií (nemusí to však být nutně relativně složitá geometrie). Hilbertovský přístup ke geometrii pokládám pro střední školu za nevhodný. Podle mého názoru může být vážným nedostatkem v geometrickém vzdělávání, odnese-li si student dojem, že geometrie je dokazování samozřejmostí. Snaha po jakémsi vědeckém přístupu může vyústit k formálním poznatkům vhodným k reprodukci, ne však k produkci. Ve vzdělávání bychom se měli snažit posilovat pracovní, řemeslnou stránku. „V řemesle je často více tvůrčí činnosti než ve vědě, neboť tvoření je jeho hlavním úkolem“, napsal *Petr Vopěnka* ([53], s. 39). Měli bychom zasvěcovat zvídavé studenty i do přirozeného intuitivního myšlení. Už proto, že „věda vděčí za své úspěchy a průlomy, za svá nejskvělejší řešení nikoliv nějaké všemocné metodě, nýbrž právě geniálním intuicím .... Přirozené, intuitivní poznání je ... především dobrodružství – drama alternativních možností, příležitostí, nadějí, které však přináší i nebezpečí pádu a zmarnění. To ale rovněž náleží k lidskému údělu“ ([39], s. 162). I k tomu dává geometrie příležitost.

Obr. 12. David Hilbert (1862–1943)

Bohumil Bydžovský (1880–1969) formuloval v „závěrečném slovu“ své knihy *Naše středoškolská reforma* požadavek, aby „budoucně reforma školy byla spojitá, aby se nedála za prudkých otřesů, nýbrž nenáhle a organicky. K tomu je nezbytně třeba, aby se reformního snažení účastnili co nejvíce učitelé sami, aby konali hojně pedagogických pokusů a tak připravovali drobné kroky, jimiž by škola vytrvale kráčela ke svému zdokonalování“ ([9], s. 314). Domnívám se, že jedna z možností jak prohlubovat práci školy, tkví v přiblížení školní matematiky životu a zájmům žáků. Jsem přesvědčen, že to je možné hledáním a nalézáním přirozeného přístupu k poznatkům. Některé podněty k tomu jsem se snažil v tomto článku naznačit. Souvisí to samozřejmě s celkovou koncepcí matematiky. I zde bych připomněl Bydžovského radu: „U středoškolské matematiky je důležitá psychologická stránka – ne ta logická.“

Překotné školské reformy, které postihují periodicky naši školu, svědčí o tom, že společnost Bydžovského požadavek o plynulém zlepšování práce školy vůbec nerespektuje. Naše středoškolské učebnice dokazují, že ani zřetel k psychologické stránce matematického vzdělávání není české didaktice vlastní.

Poděkování. Autor děkuje doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za pomoc a věcné připomínky a Haně Bílkové za technickou pomoc s obrázky.

L i t e r a t u r a

[1] Aczel, A. D.: *Umělec a matematik.* Academia, Praha 2008.

[2] Adamar, Ž.: *Elementarnaja geometrija.* Učpedgiz, Moskva 1948.

[3] Bachmann, F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* Ruský překlad, Moskva 1969.

[4] Barrow, J. D.: *Vesmírná odysea.* Dokořán, Praha 2011.

[5] Boltjanskij, V. G.: *Elementarnaja geometrija.* Prosvěščenije, Moskva 1985.

[6] Bolzano, B.: *Vlastní životopis.* Odeon, Praha 1981.

[7] Böhm, J. a kol.: *Geometrie.* DVW, Berlin 1976.

[8] Bruner, J. S.: *Vzdělávací proces.* SPN, Praha 1965.

[9] Bydžovský, B.: *Naše středoškolská reforma.* Profesorské nakladatelství, Praha 1936.

[10] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to geometry.* J. Wiley, New York 1961.

[11] Csachová, L.: *Escher ako učiteľ.* PMFA *55* (2010), 184–190.

[12] Dieudonné, J.: *Algèbre linéaire et géometrie élémentaire.* Paris 1968.

[13] Doneddy, A.: *Géométrie Euclidienne Plane.* Dunod, Paris 1965.

[14] Eukleides: *Základy.* Knihy I–IV, OPS, Nymburk 2007.

[15] Eukleides: *Základy.* Knihy V-VI, OPS, Nymburk 2009.

[16] *Eukleidovy základy.* JČM, Praha 1907.

[17] Fiala, J.: *Pražský meziválečný strukturalismus.* In: Geometrie života, Doporučená četba, Praha 1991.

[18] Griffith, P. A.: *Matematika na přelomu tisíciletí.* PMFA *46* (2001), 205–218.

[19] Hadamard, J.: *Lessons in geometry.* AMS, Providence 2008.

[20] Haeckel, E.: *Kunstformen der Natur.* Prestel, München 2004.

[21] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika.* Portál, Praha 2009.

[22] Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie.* Göttingen 1899.

[23] Choquet, G.: *Lénseignement de la géometrie.* Hermann, Paris 1964.

[24] Kadeřávek, F.: *Geometrie a umění v dobách minulých.* Šterc, Praha 1935.

[25] Kagan, V. F.: *Osnovanija geometriji.* Zapiski Novorosijskovo Un-teta, Odessa 1904.

[26] Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie.* Prometheus, Praha 1995.

[27] Kupka, F.: *Tvoření v umění výtvarném.* Brody, Praha 1999.

[28] Krygowska, Z.: *Geometria.* WSP, Warszawa 1975.

[29] Kuhn, T. S.: *Struktura vědeckých revolucí.* Oikoymenh, Praha 1997.

[30] Kuřina, F.: *Didactical structure of geometry.* In: IMCI- Study: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century Universita of Catania 1995.

[31] Kuřina, F.: *Matematika a řešení úloh.* JU, České Budějovice 2011.

[32] Kuřina, F.: *Vizuální gramotnost jako složka kultury.* Matematika – fyzika – informatika *19* (2009), 1–15.

[33] Kuřina, F.: *Transformační pojetí školské geometrie a konstrukční přístupy k vyučování matematice.* PMFA *44* (1999), 75–83.

[34] Kuřina, F.: *Důkazy a kalkuly.* Matematika – fyzika – informatika *20* (2010), 2–20.

[35] Lenz, H.: *Grundlagen der Elementarmathematik.* VEB, Berlin 1961.

[36] Lukeš, J., Netuka, I., Veselý, J.: *Professor Gustave Choquet.* Matfyzpress, Praha 2002.

[37] Maleček, K., Nádeník, Z.: C. J. Scriba, P. Schreiber: 5 000 Jahre Geometrie. PMFA *46* (2001), 352–353.

[38] Moise, E. E., Downs, F. L.: *Geometry.* Cambridge 1963.

[39] Neubauer, Z.: *Smysl a svět.* Vize 97, Praha 2001.

[40] Nicola, U.: *Obrazové dějiny filozofie.* Euromedia, Praha 2006.

[41] Pieri, M.: *Della geometria elementare.* Mem. Acad. Sci. Torino 1899.

[42] Pogorelov, A. V.: *Elementarnaja geometrija.* Nauka, Moskva 1969.

[43] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – Planimetrie.* Prometheus, Praha 1995.

[44] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – Stereometrie.* Prometheus, Praha 1995.

[45] Scriba, C. J., Schreiber, P.: *5 000 Jahre Geometrie.* Springer, Berlin 2001.

[46] Sekanina a kol.: *Geometrie II.* SPN, Praha 1988.

[47] Serra, M.: *Discovering geometry.* Key Curriculum Press, Berkeley 1993.

[48] Sériot, P.: *Struktura a celek.* Academia, Praha 2002.

[49] Stehlíková, N., Hejný, M., Jirotková, D.: *Úvod do studia analytické geometrie.* PF UK, Praha 2005.

[50] Šedivý, J.: *O modernizaci školské matematiky.* SPN, Praha 1969.

[51] Van Hiele, P. M.: *Structure and insight.* Academic Press, New York 1986.

[52] Verstraelen, L.: *Univerzální přírodní tvary.* PMFA *52* (2007), 142–151.

[53] Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií.* Panorama, Praha 1989.

[54] Vyšín, J.: *Elementární geometrie I.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.

[55] Wittmann, E.: *Elementargeometrie und Wirklichkeit.* Braunschweig 1987.

[56] Weyl, H.: *Raum, Zeit, Materie.* Berlin 1918.

[57] Wylie, C. R.: *Foundation of Geometry.* McGraw-Hill, New York 1964.