Czechoslovak Mathematical Journal

Romaric Tytgat

Espace de Dixmier des opérateurs de Hankel sur les espaces de Bergman à poids

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 65 (2015), No. 2, 399–426

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144279

Czechoslovak Mathematical Journal, 65 (140) (2015), 399–426

ESPACE DE DIXMIER DES OPÉRATEURS DE HANKEL SUR LES ESPACES DE BERGMAN À POIDS

Romaric Tytgat, Marseille

(Reçu le 2 Avril, 2014)

Résumé. Nous donnons des résultats théoriques sur l'idéal de Macaev et la trace de Dixmier. Ensuite, nous caractérisons les symboles antiholomorphes $\overline{f}$ tels que l'opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ sur l'espace de Bergman à poids soit dans l'idéal de Macaev et nous donnons la trace de Dixmier. Pour cela, nous regardons le comportement des normes de Schatten $\mathcal{S}^p$ quand p tend vers 1 et nous nous appuyons sur le résultat de Engliš et Rochberg sur l'espace de Bergman. Nous parlons aussi des puissances de tels opérateurs.

Abstract. In this paper, we give theoretical results on Macaev ideal and Dixmier trace. Then we give a characterization of antiholomorphic symbols $\overline{f}$ such that the Hankel operator $H_{\overline{f}}$ on a Bergman weighted space is in an ideal of Macaev and we give the Dixmier trace. For this, we look at the behavior of Schatten's norms $\mathcal{S}^p$ when p tends to 1, using results of Engliš and Rochberg on Bergman space. We also give results on powers of such operators.

Keywords: Hankel operator; Dixmier trace; Bergman space

MSC 2010: 47B35, 32A36, 32A37, 47B10

1. Introduction

Les propriétés spectrales des opérateurs de Hankel sont traitées dans [1] et [3] pour les espaces de Bergman et dans l'ouvrage de [13] pour l'espace de Hardy. On pourra aussi consulter le livre de Zhu [21] et les références qu'il contient. Les auteurs de [15] s'intéressent eux au cas de certains espaces de Fock. L'étude de leur trace de Dixmier est plus récente, même si le premier résultat dans ce sens se trouve dans [1], où il est montré que l'espace de Besov $\mathcal{B}^1$ est inclus dans l'espace de Dixmier $\mathcal{D}^1$. C'est une dizaine d'années plus tard que l'espace de Dixmier a été caractérisé par Li et Russo [9] dans le cas du petit opérateur de Hankel. Il a encore fallu attendre plus de dix ans pour connaître l'expression de la trace de Dixmier du grand opérateur de Hankel sur l'espace de Bergman de la boule unité de $\mathbb{C}^d$, $d > 1$. Ce dernier résultat a été obtenu par Engliš, Guo et Zhang [6]. Le cas $d = 1$ a dû être traité de façon différente, c'est dans les travaux de Engliš et Rochberg [7] que l'espace et la trace de Dixmier ont été exhibés. Les auteurs arrivent à se ramener, par une transformation unitaire, à un opérateur pseudo-différentiel, et utilisent le résultat de Wodzicki. Notre approche est celle de [9] mais nous utilisons les résultats de [7].

On note $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes du disque et $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes. Pour $\alpha > -1$ un réel, on pose

$$L^{2,\alpha} := L^2((\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \,\mathrm{d}A(z), \mathbb{D})$$

où $\mathrm{d}A(z)$ est la mesure d'aire normalisée, et

$$\mathcal{A}^{2,\alpha} := L^{2,\alpha} \cap \mathrm{Hol}(\mathbb{D}).$$

Soit alors P_α la projection (orthogonale) de Bergman de $L^{2,\alpha}$ sur $\mathcal{A}^{2,\alpha}$:

$$P_\alpha(f)(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) K_\alpha(z,w)\,\mathrm{d}A_\alpha(z)$$

où $\mathrm{d}A_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \,\mathrm{d}A(z)$ et $K_\alpha(z,w) = (1-z\overline{w})^{-(2+\alpha)}$ pour $z, w \in \mathbb{D}$.

Pour $f \in L^{2,\alpha}$, on définit l'opérateur H_f^α de $L^{2,\alpha}$ dans lui même:

$$H_f^\alpha(g)(z) = (I - P_\alpha)(f P_\alpha g)(z).$$

Cet opérateur est défini sur le sous-espace dense $\mathcal{P}$ de $L^{2,\alpha}$ et s'appelle l'opérateur de Hankel (cf [1] et [21]).

Avant de continuer, faisons quelques rappels sur la métrique de Bergman, c'est l'objet du paragraphe 4.3 p 58 de [21]. On définit la distance β sur $\mathbb{D}$ par:

$$\beta(z,w) := \frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+\varphi_z(w)}{1-\varphi_z(w)}\Big), \quad z, w \in \mathbb{D}$$

où

$$\varphi_z(w) = |\varphi_z(w)| = \Big|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\Big|, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Le disque hyperbolique de centre $z \in \mathbb{D}$ et de rayon $r > 0$ est alors:

$$D(z,r) = \{w \in \mathbb{D};\ \beta(z,w) < r\}.$$

On a alors le lemme 4.3.6 p 62 de [21]:

Lemme 1.1. *Il existe un entier N tel que pour tout réel positif $r \leqslant 1$, il existe une suite (λ_n) du disque vérifiant*

(1) $\mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\lambda_n, r)$;

(2) $D(\lambda_n, r) \cap D(\lambda_m, r) = \emptyset$ *si* $n \neq m$;

(3) *tout point de $\mathbb{D}$ appartient au plus à N disques $D(\lambda_n, 2r)$.*

Toute suite du disque vérifiant ce lemme sera appelée suite atomique.

Rappelons que la p-ième classe de Schatten $\mathcal{S}^p$ pour $0 < p \leqslant \infty$ est le sous espace des opérateurs compacts T vérifiant $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N})$ où $(s_n(T))_n$ est la suite des valeurs singulières rangée par ordre décroissant (cf [11]).

Les auteurs de [1] ont montré que pour $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ et $p > 1$, $H^\alpha_{\overline{f}} \in \mathcal{S}^p$ si et seulement si $f \in \mathcal{B}^p$, où $\mathcal{B}^p$ est l'espace des fonctions holomorphes du disque vérifiant:

$$\|f\|^p_{\mathcal{B}^p} := \int_{\mathbb{D}} ((1-|z|^2)|f'(z)|)^p \,\mathrm{d}\lambda(z) < \infty, \tag{1.1}$$

où $\mathrm{d}\lambda(z)$ est la mesure Möbius invariante:

$$\mathrm{d}\lambda(z) := \frac{1}{(1-|z|^2)^2}\,\mathrm{d}A(z)$$

Notons $\mathcal{S}_1^+$ l'idéal (de Macaev) des opérateurs compacts T vérifiant:

$$\sup_{N\geqslant 2}\left\{\frac{1}{\ln N}\sigma_N(T)\right\} < \infty,$$

où

$$\sigma_N(T) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k(T).$$

Afin de définir la trace de Dixmier sur $\mathcal{S}_1^+$, on choisit une forme linéaire positive ω sur $l^\infty(\mathbb{N})$, invariante par 2-dilatation et vérifiant:

$$\text{si } a \text{ est convergente, alors } \operatorname*{Lim}_{\omega}(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

où $\mathrm{Lim}_\omega(a_n)$ désigne la valeur de ω en $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Pour un opérateur positif T dans $\mathcal{S}_1^+$, on définit sa trace de Dixmier par

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) = \operatorname*{Lim}_{\omega} \frac{\sigma_N(T)}{\ln(N+1)},$$

et on étend $\mathrm{Tr}_\omega(\cdot)$ à $\mathcal{S}_1^+$ par linéarité. Cette définition dépend a priori du choix de ω et nous dirons que T est mesurable si $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ est indépendant de ω. Nous en citerons des exemples. On renvoie à [4] et [5] pour plus de détails. La trace de Dixmier est une forme linéaire continue si nous équipons $\mathcal{S}_1^+$ de la norme complète:

$$\|T\|_{\mathcal{S}_1^+} = \sup_{N\geqslant 2} \frac{1}{\ln N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k(T).$$

On définit alors les espaces de Dixmier $\mathcal{D}^p_\alpha$ comme ceci:

$$\mathcal{D}^p_\alpha = \{f \in \mathcal{A}^{2,\alpha};\ |H^\alpha_{\overline{f}}|^p \in \mathcal{S}_1^+\}$$

avec

$$\|f\|_{\mathcal{D}^p_\alpha} = \||H^\alpha_{\overline{f}}|^p\|^{1/p}_{\mathcal{S}_1^+}.$$

On note simplement $\mathcal{D}^p$ quand $\alpha = 0$.

De facon équivalente, on a:

$$f \in \mathcal{D}^p_\alpha \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{N} s_n(H^\alpha_{\overline{f}})^p = O(\ln(N)).$$

Si $p \geqslant 1$, $\mathcal{D}^p_\alpha$ est un espace vectoriel complet pour la semi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^p_\alpha}$, tandis que si $0 < p < 1$, $\mathcal{D}^p_\alpha$ est un espace vectoriel complet pour la quasi-semi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^p_\alpha}$ (voir [17]).

Par exemple, pour tout $k \geqslant 0$, $H^\alpha_{\overline{z}^k} \in \mathcal{S}^1_+$ et grâce au calcul des valeurs propres des opérateurs de Hankel à symbole monomial (cf [1]), on obtient:

$$\mathrm{Tr}_\omega(|H^\alpha_{\overline{z}^k}|) = k\sqrt{\alpha+1}. \tag{1.2}$$

Pour $p > 0$, notons l'espace de Hardy H^p, l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ holomorphes du disque vérifiant:

$$\|f\|^p_{H^p} := \sup_{r\in[0;1[} \int_{\mathbb{T}} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} < \infty.$$

Engliš et Rochberg ont montré les deux résultats suivants:

Théorème 1.2 (Engliš et Rochberg [7]). *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$:*

$$H_{\overline{f}} \in \mathcal{S}^1_+ \Leftrightarrow f \in H'$$

où H' est l'espace des fonctions à dérivée dans H^1. De plus, pour $f' \in H^1$, on a

$$\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{f}}|) = \int_{\mathbb{T}} |f'|\,\mathrm{d}\theta \tag{1.3}$$

où $\mathrm{d}\theta$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité.

Théorème 1.3 (Engliš et Rochberg [7]). *Soit $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ alors $H_{\overline{f}} \in \mathcal{S}^1_+$ et*

$$\operatorname{Tr}_\omega(|H_f|) = \int_{\mathbb{T}} |\overline{\partial} f| \, \mathrm{d}\theta \tag{1.4}$$

où $\mathrm{d}\theta$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité.

Nous allons étendre ces résultats pour tout $\alpha > -1$:

Théorème 1.4. *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et $\alpha > -1$:*

$$H^\alpha_{\overline{f}} \in \mathcal{S}^1_+ \Leftrightarrow f' \in H^1.$$

De plus, pour $f' \in H^1$, on a

$$\operatorname{Tr}_\omega(|H^\alpha_{\overline{f}}|) = \sqrt{\alpha+1} \int_{\mathbb{T}} |f'| \, \mathrm{d}\theta$$

où $\mathrm{d}\theta$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité.

Théorème 1.5. *Soit $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ alors $H^\alpha_{\overline{f}} \in \mathcal{S}^1_+$ et*

$$\operatorname{Tr}_\omega(|H^\alpha_f|) = \sqrt{\alpha+1} \int_{\mathbb{T}} |\overline{\partial} f| \, \mathrm{d}\theta$$

où $\mathrm{d}\theta$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité.

Un mot sur les notations, $f(z) \lesssim g(z)$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$, pour tout z dans l'ensemble considéré, vérifiant $f(z) \leqslant C g(z)$. De même pour $f(z) \gtrsim g(z)$, et on note $f(z) \simeq g(z)$ si $f(z) \gtrsim g(z)$ et $f(z) \lesssim g(z)$.

2. Résultats généraux

Pour un opérateur compact T, on définit, $\zeta_T(s) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n(T)^s$, pour $s > 1$. Si T est de plus positif, alors $\zeta_T(s) = \operatorname{Tr}(T^s)$. Notre approche est clairement motivée par le résultat de Li et Russo [9]:

Lemme 2.1. *Soit T un opérateur compact, on a alors:*

$$T \in \mathcal{S}_1^+ \Leftrightarrow \sup_{s \in]1;2[} \{(s-1)\zeta_T(s)\} < \infty.$$

On peut dire un peu plus et montrer que ces deux quantités sont équivalentes. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres qui converge vers 0, on note $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ rangée par ordre décroissant. Plus précisément, on a:

$$a_n^* := \inf\Big\{ \sup_{j\in\mathbb{N}\setminus J} |a_j|,\ J\subset\mathbb{N},\ \operatorname{card} J < n\Big\}.$$

Soit $l^{1,+}$ l'ensemble des suites vérifiant $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^* = O(\ln(n+1))$ muni de la norme:

$$\|a\|_{1,+} = \sup_{N\in\mathbb{N}^*}\left\{\frac{1}{\ln(N+1)}\sum_{k=0}^{N} a_k^*\right\}.$$

Lemme 2.2. *$l^{1,+}$ est complet.*

Démonstration. Pour tout entier $N>0$, on définit la famille de normes

$$\|a\|_N = \frac{1}{\ln(N+1)}\sum_{k=0}^{N} a_k^*.$$

En fait, voir [16] p 4, on peut définir les a_k^* de la façon suivante. On pose

$$a_0^* = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|, \quad a_0^* + a_1^* = \max_{k\neq j}(|a_k| + |a_j|)$$

et ainsi de suite. Il est alors clair que les $\|\cdot\|_N$ sont des normes.

On a:

$$\frac{1}{\ln(N+1)}\|a\|_{\sup} \leqslant \|a\|_N \leqslant N\|a\|_{\sup}.$$

On note ici $\|\cdot\|_{\sup}$ la norme infinie plutôt que $\|\cdot\|_\infty$ afin d'éviter toute confusion avec le cas $N=\infty$.

Si $(a^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $l^{1,+}$, elle l'est pour chaque $\|\cdot\|_N$ et donc pour $\|\cdot\|_{\sup}$. Ainsi, il existe $a\in l^\infty$ tel que

$$\|a^p - a\|_N \to 0$$

quand p tend vers l'infini et pour tout $N>0$. Soit $\varepsilon>0$, pour r et q assez grands, on a:

$$\frac{1}{\ln(N+1)}\sum_{k=0}^{N}(a_k^q - a_k^r)^* \leqslant \varepsilon \quad \forall N.$$

A la limite sur r, on a:

$$\frac{1}{\ln(N+1)}\sum_{k=0}^{N}(a_k^q - a_k)^* \leqslant \varepsilon \quad \forall N$$

et donc (a^p) converge vers a dans $l^{1,+}$. □

On peut définir une autre norme sur $l^{1,+}$:

$$\|a\|_\zeta = \sup_{s\in]1;2]} \left\{ \left((s-1)\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^s \right)^{1/s} \right\}.$$

En effet:

Lemme 2.3. *Soit $a \in l^{1,+}$. Alors*

$$\|a\|_\zeta \lesssim \|a\|_{1,+}.$$

D é m o n s t r a t i o n. De l'équivalent $\ln(n) \sim \sum_{k=1}^{n} 1/k$ en l'infini, on déduit que pour tout entier naturel n, on a:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \lesssim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \|a\|_{1,+}.$$

Par le lemme 16.30 p 165 de [11], on a pour $1 < s \leqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^s \lesssim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \|a\|_{1,+}^s \lesssim \frac{s}{s-1} \|a\|_{1,+}^s.$$

Ainsi

$$\left((s-1) \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^s \right)^{1/s} \lesssim \|a\|_{1,+}.$$

Passant au sup sur les $s \in \,]1;2]$, on obtient le résultat. $\square$

Lemme 2.4. *$l^{1,+}$ muni de $\|\cdot\|_\zeta$ est complet.*

D é m o n s t r a t i o n. Si $(a^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_\zeta$ elle l'est pour chaque l^s et donc converge vers $a_s \in l^s$. Or si $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$, on a $\|\cdot\|_{p_1} \geqslant \|\cdot\|_{p_2}$, ce qui montre que $a := a_s$ est indépendant de s. Soit $\varepsilon > 0$, r et q assez grands:

$$\begin{aligned} \|a - a^r\|_\zeta &= \sup_{s\in]1;2]} \{((s-1))^{1/s} \limsup_{q\to\infty} \|a^q - a^r\|_{l^s}\} \\ &\leqslant \limsup_{q\to\infty} \sup_{s\in]1;2]} \{((s-1))^{1/s} \|a^q - a^r\|_{l^s}\} \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

et donc (a^p) converge vers a pour $\|\cdot\|_\zeta$. $\square$

On obtient alors

Proposition 2.5. *Les normes* $\|\cdot\|_{1,+}$ *et* $\|\cdot\|_\zeta$ *sont équivalentes.*

D é m o n s t r a t i o n. Résulte des trois lemmes précédents et du théorème de Banach. □

Pour la trace de Dixmier, nous avons la proposition 4 p 306 de Connes [4]:

Lemme 2.6. *Soit* T *un opérateur compact positif dans* $\mathcal{S}_1^+$. *On a équivalence entre*

$$(s-1)\zeta_T(s) \to L \quad \text{quand } s \to 1^+$$

et

$$(\ln N)^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} s_n(T) \to L \quad \text{quand } N \to \infty.$$

Sous ces conditions, $\mathrm{Tr}_\omega(T) = L$.

Lorsque nous n'avons pas convergence, on a le résultat classique:

Lemme 2.7. *Soit* $T \in \mathcal{S}_+^1$ *un opérateur positif, alors:*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sigma_n(T) \leqslant \mathrm{Tr}_\omega(T) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sigma_n(T).$$

Mais on peut montrer que:

Proposition 2.8. *Soit* (s_k) *une suite décroissante de limite nulle. On a:*

$$\limsup_{s\to 1^+} (s-1) \sum_{k=1}^{\infty} s_k^s \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\ln(N)} \sum_{k=1}^{N} s_k \leqslant \mathrm{e} \limsup_{s\to 1^+} (s-1) \sum_{k=1}^{\infty} s_k^s.$$

D é m o n s t r a t i o n. On commence par montrer que

$$\limsup_{s\to 1^+} (s-1) \sum_{k=1}^{\infty} s_k^s \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\ln(N)} \sum_{k=1}^{N} s_k.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant pour tout $N \geqslant N_0$

$$\frac{1}{\ln(N)} \sum_{k=1}^{N} s_k \leqslant \limsup_{N\to\infty} \Big(\frac{1}{\ln(N)} \sum_{k=1}^{N} s_k \Big) + \varepsilon.$$

Notons

$$c = \limsup_{N\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(N)} \sum_{k=1}^{N} s_k \right) + \varepsilon.$$

On a pour tout entier $N \geqslant N_0$

$$\frac{1}{\ln(N)} \sum_{k=N_0}^{N} s_k \leqslant \frac{1}{\ln(N)} \sum_{k=1}^{N} s_k \leqslant c$$

et donc

$$\frac{1}{\ln(N)} \sum_{k=1}^{N-N_0+1} s_{k+N_0-1} \leqslant c$$

ainsi pour tout $N - N_0 + 1 \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{N-N_0+1} s_{k+N_0-1} \leqslant c\ln(N) = c\ln(N) \left(\sum_{k=1}^{N-N_0+1} \frac{1}{k} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{N-N_0+1} \frac{1}{k}.$$

On applique le lemme 16.30 p 165 de [11] et on obtient:

$$\sum_{k=1}^{N-N_0+1} s_{k+N_0}^s \leqslant \left(c\ln(N) \left(\sum_{k=1}^{N-N_0+1} \frac{1}{k} \right)^{-1} \right)^s \sum_{k=1}^{N-N_0+1} \left(\frac{1}{k}\right)^s$$

et donc à la limite sur N

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_{k+N_0}^s \leqslant c^s \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^s.$$

Par une comparaison série/intégrale on voit que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \leqslant \frac{s}{s-1}$$

ainsi

$$(s-1) \sum_{k=1}^{\infty} s_{k+N_0}^s \leqslant sc^s.$$

A la limite sur s:

$$\limsup_{s\to 1^+} (s-1) \sum_{k=1}^{\infty} s_{k+N_0}^s \leqslant c$$

et comme

$$\limsup_{s\to 1^+} (s-1) \sum_{k=1}^{\infty} s_{k+N_0}^s = \limsup_{s\to 1^+} (s-1) \sum_{k=1}^{\infty} s_k^s$$

on a

$$\limsup_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{k=1}^{\infty} s_k^s \leqslant c = \limsup_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(N)}\sum_{k=1}^{N} s_k\right)+\varepsilon.$$

Passons à présent à:

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{\ln(N)}\sum_{k=1}^{N} s_k \leqslant \mathrm{e}\limsup_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{k=1}^{\infty} s_k^s.$$

Soit N un entier positif, notons

$$G_N = \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)^{-1}$$

par Jensen, pour $s>1$, on a:

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{s_k}{k}G_N\right)^s \leqslant \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}G_N s_k^s$$

et en remplacant s_k par ks_k on obtient

$$\left(\sum_{k=1}^{N} s_k G_N\right)^s \leqslant \sum_{k=1}^{N} k^{s-1}G_N s_k^s \leqslant N^{s-1}G_N\sum_{k=1}^{N} s_k^s$$

d'où

$$\left(\frac{1}{\ln(N)}\sum_{k=1}^{N} s_k\right)^s \leqslant \frac{N^{s-1}G_N^{1-s}}{\ln(N)^s(s-1)}(s-1)\sum_{k=1}^{N} s_k^s.$$

Posons

$$s = 1+\frac{1}{\ln(N)}$$

on a

$$\frac{N^{s-1}G_N^{1-s}}{\ln(N)^s(s-1)} = \frac{G_N^{-s}}{\ln(N)^s}\frac{N^{s-1}G_N}{(s-1)}.$$

Mais

$$\frac{G_N^{-s}}{\ln(N)^s} = \left(\frac{\ln(N)+\gamma+o(1)}{\ln(N)}\right)^{1+1/\ln(N)} \to 1$$

et

$$\frac{N^{s-1}G_N}{(s-1)} = \frac{\mathrm{e}^{(s-1)\ln(N)}}{(s-1)(\ln(N)+\gamma+o(1))} \to \mathrm{e}.$$

Ainsi pour $s = 1+1/\ln(N)$

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{\ln(N)}\sum_{k=1}^{N} s_k \leqslant \mathrm{e}\limsup_{N\to\infty}(s-1)\sum_{k=1}^{N} s_k^s \leqslant \mathrm{e}\limsup_{t\to 1^+}(t-1)\sum_{k=1}^{N} s_k^t.$$

□

De même:

Proposition 2.9. *Soit (s_k) une suite décroissante de limite nulle. On a:*

$$\liminf_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{k=1}^{\infty} s_k^s \geqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{\ln(N)}\sum_{k=1}^{N} s_k \geqslant \mathrm{e}^{-1}\liminf_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{k=1}^{\infty} s_k^s.$$

D é m o n s t r a t i o n. De la même façon on montre que

$$\liminf_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{k=1}^{\infty} s_k^s \geqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{\ln(N)}\sum_{k=1}^{N} s_k.$$

Passons à:

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{\ln(N)}\sum_{k=1}^{N} s_k \geqslant \mathrm{e}^{-1}\liminf_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{k=1}^{\infty} s_k^s.$$

Sans perte de généralité on suppose $s_k \leqslant 1$. Soit N un entier positif avec les notations de la proposition 2.8, nous avons, par l'inégalité de Jensen, pour $s<1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{s_k}{k} G_N\right)^s \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} G_N s_k^s$$

et en remplacant s_k par ks_k et comme $s_k<1$, on obtient

$$\left(\sum_{k=1}^{N} s_k G_N\right)^s \geqslant \sum_{k=1}^{N} k^{s-1} G_N s_k^s \geqslant \sum_{k=1}^{N} k^{s-1} G_N s_k^t$$

où $t>1$. Mais comme $s<1$

$$\sum_{k=1}^{N} k^{s-1} G_N s_k^t \geqslant N^{s-1} G_N \sum_{k=1}^{N} s_k^t.$$

On a

$$\left(\frac{1}{\ln(N)}\sum_{k=1}^{N} s_k\right)^s \geqslant \frac{N^{s-1}G_N^{1-s}}{\ln(N)^s(t-1)}(t-1)\sum_{k=1}^{N} s_k^t.$$

Posons

$$s = 1-\frac{1}{\ln(N)} \quad \text{et} \quad t = 1+\frac{1}{\ln(N)}$$

on a

$$\frac{N^{s-1}G_N^{1-s}}{\ln(N)^s(t-1)} = \frac{G_N^{-s}}{\ln(N)^s}\frac{N^{s-1}G_N}{t-1}.$$

Mais

$$\frac{G_N^{-s}}{\ln(N)^s} = \Big(\frac{\ln(N) + \gamma + o(1)}{\ln(N)}\Big)^{1-1/\ln(N)} \to 1$$

et

$$\frac{N^{s-1}G_N}{(t-1)} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(t-1)(\ln(N) + \gamma + o(1))} \to \mathrm{e}^{-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{\ln(N)} \sum_{k=1}^{N} s_k &\geqslant \mathrm{e}^{-1} \liminf_{N\to\infty} (t-1) \sum_{k=1}^{N} s_k^t \\ &\geqslant \mathrm{e}^{-1} \liminf_{r\to 1^+} (r-1) \sum_{k=1}^{N} s_k^r.\end{aligned}$$

□

On obtient immédiatement:

Proposition 2.10. *Soit $T \in \mathcal{S}^1_+$, alors:*

$$\mathrm{e}^{-1} \liminf_{s\to 1} (s-1)\|T\|^s_{\mathcal{S}^s} \leqslant \mathrm{Tr}_\omega(T) \leqslant \mathrm{e} \limsup_{s\to 1} (s-1)\|T\|^s_{\mathcal{S}^s}$$

où de façon équivalente, pour reprendre la notation de Connes, Li et Russo

$$\mathrm{e}^{-1} \liminf_{s\to 1} (s-1)\zeta_T(s) \leqslant \mathrm{Tr}_\omega(T) \leqslant \mathrm{e} \limsup_{s\to 1} (s-1)\zeta_T(s).$$

3. L'espace H'

La section précédente nous invite à regarder la limite de $(p-1)\|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p}$. Comme les normes $\|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p}$ et $\|f\|_{\mathcal{B}^p}$ sont équivalentes, nous nous intéressons au sup de $(p-1)\|f\|_{\mathcal{B}^p}$. Tous les résultats sur les espaces de Hardy utilisés dans cette section se trouvent dans [14].

Définition 3.1. H' est défini comme suit:

$$H' = \{h;\ h' \in H^1\}.$$

Proposition 3.2 (Arazy, Fisher et Peetre [2]). *L'espace H' muni de la semi norme*

$$\|h\|_{H'} = \int_{\mathbb{T}} |h'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \,\mathrm{d}\theta$$

est Möbius invariant au sens de [2], *et donc complet.*

On s'inspire de [2] pour donner une description alternative:

Proposition 3.3.

$$H' = \Big\{ h \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\,;\ \sup_{p\in]1;2]} (p-1)\|h\|_{\mathcal{B}^p} < \infty \Big\}$$

et

$$\|h\|_{H'} = \|h'\|_{H^1} = \lim_{p\to 1^+} (p-1)\|h\|_{\mathcal{B}^p}.$$

Démonstration. Soit

$$u_p = \int_0^{2\pi} |h'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta$$

et

$$\mathrm{d}\lambda_p(r) = 2(p-1)r(1-r^2)^{p-2}\,\mathrm{d}r$$

suite de mesures de probabilité sur $[0;1[$. Avec ces notations, on a donc

$$(p-1)\|h\|^p_{\mathcal{B}^p} = \int_0^1 u_p \,\mathrm{d}\lambda_p(r).$$

On procède par double inégalité, soit $a<1$

$$\begin{aligned}
\int_0^a u_p \,\mathrm{d}\lambda_p &= \int_0^a u_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(-(1-r^2)^{p-1})\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u_p)\Big)((1-r^2)^{p-1})\,\mathrm{d}r + \big[-u_p(1-r^2)^{p-1}\big]_0^a \\
&\leqslant \int_0^a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u_p)\,\mathrm{d}r - u_p(a)(1-a^2)^{p-1} + u_p(0) \\
&\leqslant u_p(a) - u_p(0) - u_p(a)(1-a^2)^{p-1} + u_p(0) \\
&= [1-(1-a^2)^{p-1}]u_p(a).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $h' \in H^1$, h' a une limite radiale pp que l'on note h'_*

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_p \,\mathrm{d}\lambda_p &\leqslant \limsup_{a\to 1}[1-(1-a^2)^{p-1}]u_p(a)\\ &\leqslant \limsup_{a\to 1}\int_0^{2\pi} |h'(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta\\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \limsup_{a\to 1} |h'(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi} |h'_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta\\ &= \|h'_*\|^p_{H^p}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to 1^+}\int_0^1 u_p \,\mathrm{d}\lambda_p &\leqslant \limsup_{p\to 1^+}\int_0^{2\pi} |h'_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta\\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \limsup_{p\to 1^+} |h'_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi} |h'_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \,\mathrm{d}\theta\\ &= \|h'_*\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$h' \in H^1 \Rightarrow \sup_{p\in]1;2]} \int_0^1 u_p \,\mathrm{d}\lambda_p(r) < \infty.$$

Réciproquement, supposons que

$$\sup_{p\in]1;2]} \int_0^1 u_p \,\mathrm{d}\lambda_p(r) < \infty.$$

Par Hölder, on a:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{D}} |h'| \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\lambda_p(r)\right)^p &\leqslant \left(\int_{\mathbb{D}} |h'|^p \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\lambda_p(r)\right)\left(\int_{\mathbb{D}} \mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\lambda_p(r)\right)^{p/q}\\ &= \left(\int_{\mathbb{D}} |h'|^p \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\lambda_p(r)\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\liminf_{p\to 1^+}\left(\int_{\mathbb{D}} |h'| \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\lambda_p(r)\right)^p \leqslant \liminf_{p\to 1^+}\left(\int_{\mathbb{D}} |h'|^p \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\lambda_p(r)\right).$$

Mais par [2]

$$\lim_{p\to 1^+}\left(\int_{\mathbb{D}} |h'|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda_p(r)\right)^p = \|h'\|_{H^1}$$

ce qui donne

$$\|h'\|_{H^1} \leqslant \liminf_{p\to 1^+}\int_0^1 u_p\,\mathrm{d}\lambda_p(r) \leqslant \sup_{p\in]1;2]}\int_0^1 u_p\,\mathrm{d}\lambda_p(r).$$

On a donc montré que

$$h' \in H^1 \Leftrightarrow \sup_{p\in]1;2]}\int_0^1 u_p\,\mathrm{d}\lambda_p(r) < \infty$$

et que dans ce cas

$$\|h'\|_{H^1} \leqslant \liminf_{p\to 1^+}\int_0^1 u_p\,\mathrm{d}\lambda_p(r) \leqslant \limsup_{p\to 1^+}\int_0^1 u_p\,\mathrm{d}\lambda_p(r) \leqslant \|h\|_{H'}$$

c'est-à-dire

$$\|h\|_{H'} = \lim_{p\to 1^+}\int_0^1 u_p\,\mathrm{d}\lambda p(r).$$

□

Définition 3.4. On introduit sur H' la norme

$$\|f\|_{1,+} = \sup_{p\in]1;2[}(p-1)^{1/p}\|f\|_{\mathcal{B}^p}.$$

Lemme 3.5. *L'espace H' muni de la norme $\|\cdot\|_{1,+}$ est complet.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de H', elle est de Cauchy dans chaque $\mathcal{B}^p$, $1 < p < 2$, donc converge dans $\mathcal{B}^p$ vers f^p. De l'inégalité

$$\|f\|_{\mathcal{D}} \leqslant c_p\|f\|_{\mathcal{B}^p}$$

on déduit que les f^p sont égales, on note cette limite f. On a noté ici $\mathcal{D}$ l'espace de Dirichlet qui est en fait l'espace de Besov $\mathcal{B}^2$. Enfin, soit $\varepsilon > 0$, pour n, k assez grand on a:

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \limsup_k \sup_p (p-1)^{1/p}\|f_n - f_k\|_{\mathcal{B}^p}\\ &\geqslant \sup_p (p-1)^{1/p}\limsup_k \|f_n - f_k\|_{\mathcal{B}^p}\\ &= \|f - f_n\|_{1,+}.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.6. *Pour tout $f \in H'$, on a*

$$\sup_{p\in]1;2[}(p-1)^{1/p}\|f\|_{\mathcal{B}^p} \simeq \lim_{p\to 1}(p-1)^{1/p}\|f\|_{\mathcal{B}^p}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Résulte du théorème de Banach. □

4. Preuves

On montre dans cette section les théorèmes. Pour cela, on prouve que pour tout $\alpha > -1, \mathcal{D}^1_\alpha \subset H'$ et on met en lien les différents opérateurs de Hankel pour conclure.

On donne une nouvelle preuve de l'inclusion $\mathcal{D}^1 \subset H'$:

Proposition 4.1. *On a:*

$$\mathcal{D}^1 \subset H'.$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous montrons que nous avons, uniformément en p:

$$\|f\|_{\mathcal{B}^p} \lesssim \|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p}$$

ce qui permettra d'affirmer que $\mathcal{D}^1 \subset H'$. Soit f une fonction holomorphe dans l'espace de Dixmier, f est donc dans chaque classe de Schatten $p > 1$ et donc f est dans l'intersection de tous les espaces de Besov d'exposant $p > 1$. On note $D(z)$ le disque hyperbolique de centre z et de rayon r fixé. On part de l'inégalité [20] p 330 par exemple, pour $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)|f'(z)| &\lesssim \int_{D(0)} |f\circ\varphi_z(w)-\lambda|\,\mathrm{d}A(w)\\
&\lesssim \left(\int_{D(0)} |f\circ\varphi_z(w)-\lambda|^2\,\mathrm{d}A(w)\right)^{1/2}\\
&\lesssim \left(\int_{D(z)} |f(w)-\lambda|^2|\varphi_z'(w)|^2\,\mathrm{d}A(w)\right)^{1/2}\\
&\simeq \left(\frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)} |f(w)-\lambda|^2\,\mathrm{d}A(w)\right)^{1/2}\\
&\simeq \left(\frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)} |\overline{f}(w)-\bar{\lambda}|^2\,\mathrm{d}A(w)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Passant à l'inf sur tous les λ et utilisant la proposition 1 p 261 de [10], on obtient:

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|f'(z)| &\lesssim \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left(\frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)}|\overline{f}(w)-\bar{\lambda}|^2\,\mathrm{d}A(w)\right)^{1/2}\\ &\lesssim \inf_{h\in\mathcal{A}^2}\left(\frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)}|\overline{f}(w)-h(w)|^2\,\mathrm{d}A(w)\right)^{1/2}\\ &= F(z)\end{aligned}$$

où F est la fonction de [10] définie p 252:

$$F(z)^2=\inf\left\{\frac{1}{D(z)}\int_{D(z)}|\overline{f}-h|^2\,\mathrm{d}A;\ h\in\mathcal{A}^2\right\}.$$

Mais en regardant attentivement la preuve du théorème 4 p 262 de [10], on voit qu'indépendamment en p, on a:

$$\|F\|_{L^p(\,\mathrm{d}\lambda)}\lesssim\|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Ainsi

$$\|f\|_{\mathcal{B}^p}=\|(1-|z|^2)|f'(z)|\|_{L^p(\mathrm{d}\lambda)}\lesssim\|F\|_{L^p(\mathrm{d}\lambda)}\lesssim\|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p}\tag{4.1}$$

d'où

$$\sup_{p\in]1;2]}(p-1)\|f\|_{\mathcal{B}^p}\lesssim\sup_{p\in]1;2]}(p-1)\|H_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p}$$

ce qui montre l'inclusion $\mathcal{D}^1\subset H'$, via la proposition 3.1. □

Passsons au cas général:

Lemme 4.2. *Pour tout $\alpha>-1$*

$$\mathcal{D}^1_\alpha\subset H'.$$

D é m o n s t r a t i o n. Dans [10], il est dit p 267 que le théorème 4 reste inchangé modulo les adaptations dûes au poids. On précise les quelques modifications afin d'être complet. Reprenons la preuve de [10] et remarquons que l'opérateur A est l'opérateur $-T$ de [21] p 66 de l^2 dans $\mathcal{A}^2$:

$$A((a_k))(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{1-|\xi_k|^2}{(1-\bar{\xi}_k z)^2}$$

où (ξ_k) est une suite atomique. Cela résulte simplement de:

$$-\varphi'_{\xi_k}(z) = \frac{1-|\xi_k|^2}{(1-\bar{\xi}_k z)^2}.$$

Nous définissons donc A_α de l^2 dans $\mathcal{A}^{2,\alpha}$ comme suit:

$$A_\alpha((a_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(1-|\xi_k|^2)^{(2+\alpha)/2}}{(1-\bar{\xi}_k z)^{2+\alpha}}$$

et l'on montre qu'il est borné de la même façon que dans [21] p 66. Soit donc $f \in H^\infty$ une fonction holomorphe bornée du disque. On a:

$$\langle A_\alpha((a_k)),\ f\rangle_{\mathcal{A}^{2,\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (1-|\xi_k|^2)^{(2+\alpha)/2} \overline{f}(\xi_k).$$

Ainsi par Cauchy-Schwarz

$$|\langle A_\alpha((a_k)), f\rangle_{\mathcal{A}^{2,\alpha}}| \leqslant \|(a_k)\|_{l^2} \|(1-|\xi_k|^2)^{(2+\alpha)/2} \overline{f}(\xi_k)\|_{l^2}.$$

Comme H^∞ est dense dans $\mathcal{A}^{2,\alpha}$, il suffit de montrer que

$$\|(1-|\xi_k|^2)^{(2+\alpha)/2} \overline{f}(\xi_k)\|_{l^2} \lesssim \|f\|_{\mathcal{A}^{2,\alpha}}, \quad f \in H^\infty$$

pour conclure.

Soit $z \in \mathbb{D}$ et $r > 0$, par le lemme 4.3.4 p 61 de [21]:

$$\frac{1}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} (1-|w|^2)^\alpha |f(w)|^2 \, \mathrm{d}A(w) \simeq \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} |f(w)|^2 \, \mathrm{d}A(w)$$

et par la proposition 4.3.8 p 62 de [21] on déduit que:

$$(1-|z|^2)^\alpha |f(z)|^2 \lesssim \frac{1}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} (1-|w|^2)^\alpha |f(w)|^2 \, \mathrm{d}A(w).$$

Comme $|D(z,r)|$ est comparable à $(1-|z|^2)^2$ (lemme 4.3.3 p 60 de [21]) on a:

$$(1-|z|^2)^{\alpha+2} |f(z)|^2 \lesssim \int_{D(z,r)} (1-|w|^2)^\alpha |f(w)|^2 \, \mathrm{d}A(w).$$

Pour $z = \xi_k$ et à l'aide du (3) du lemme 1.1, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|\xi_k|^2)^{\alpha+2} |f(\xi_k)|^2 \lesssim \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^\alpha |f(w)|^2 \, \mathrm{d}A(w)$$

ce qui prouve bien:

$$\|(1-|\xi_k|^2)^{(2+\alpha)/2}\overline{f}(\xi_k)\|_{l^2} \lesssim \|f\|_{\mathcal{A}^{2,\alpha}}, \quad f \in H^\infty$$

et donc A_α est borné de l^2 dans $\mathcal{A}^{2,\alpha}$.

Pour (ξ_k) une suite atomique, on note respectivement φ_k et φ'_k plutôt que φ_{ξ_k} et φ'_{ξ_k}. On définit alors l'opérateur B_α de l^2 dans $\mathcal{A}^{2,\alpha}$ qui envoie le k-ième vecteur e_k de la base canonique de l^2 sur $c_k\chi_{D(\xi_k)}H^\alpha_{\overline{f}}((\varphi'_k)^{1+\alpha/2})$ où c_k est une constante pour que $B_\alpha e_k$ soit unitaire. Cet opérateur est borné puisque (ξ_k) est une suite atomique. En notant $T_\alpha = -A_\alpha$, nous avons comme dans [10]:

$$\begin{aligned}
\sum_k \left(\int_{D(0)} |H^\alpha_{\overline{f}\circ\varphi_k}(1)|^2 \,\mathrm{d}A\right)^{p/2} &= \sum_k \left(\int_{D(0)} |(\varphi'_k H^\alpha_{\overline{f}}((\varphi'_k)^{1+\alpha/2}))(\varphi_k)|^2 \,\mathrm{d}A\right)^{p/2} \\
&= \sum_k \left(\int_{D(\xi_k)} |H^\alpha_{\overline{f}}((\varphi'_k)^{1+\alpha/2})|^2 \,\mathrm{d}A\right)^{p/2} \\
&= \sum_k |\langle B^*_\alpha H^\alpha_{\overline{f}} T_\alpha e_k, e_k\rangle|^p. \\
&\lesssim \|H^\alpha_{\overline{f}}\|^p_{\mathcal{S}^p}
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est justifiée par [8] p 95.

On a aussi, comme au début de la page 265 de [10]:

$$F(\xi_k)^2 \lesssim \int_{D(\xi_k)} |H^\alpha_{\overline{f}}((\varphi'_k)^{1+\alpha/2})|^2 \,\mathrm{d}A = \int_{D(0)} |H^\alpha_{\overline{f}\circ\varphi_k}(1)|^2 \,\mathrm{d}A$$

où l'on rappelle que

$$F(z)^2 = \inf\left\{\frac{1}{D(z)}\int_{D(z)} |\overline{f}-h|^2 \,\mathrm{d}A;\ h \in \mathcal{A}^2\right\}.$$

Enfin, au bas de la page 266 de [10]:

$$\|F\|_{L^p(\mathrm{d}\lambda)} \lesssim \|F(\xi_k)\|_{l^p}$$

indépendamment en $p > 1$. On obtient alors comme dans le cas $\alpha = 0$, indépendamment en $p > 1$:

$$\|F\|_{L^p(\mathrm{d}\lambda)} \lesssim \|H^\alpha_{\overline{f}}\|_{\mathcal{S}^p}. \tag{4.2}$$

Or, on a vu (4.1) que:

$$\|f\|_{\mathcal{B}^p} \simeq \|F\|_{L^p(\mathrm{d}\lambda)}.$$

On conclut alors comme dans le théorème précédent. □

On a donc montré que pour tout $\alpha > -1$, $\mathcal{D}^1_\alpha \subset H'$. Or, $H' \subset H^\infty$ (p 79 de [12]), l'espace des fonctions holomorphes bornées du disque. Ainsi toute fonction dans $\mathcal{D}^1_\alpha$ est bornée sur le disque.

Lemme 4.3. *Pour tout $\alpha > -1$ et pour tout symbole borné f*

$$H_{\overline{f}} \in \mathcal{S}^1_+ \Leftrightarrow H^\alpha_{\overline{f}} \in \mathcal{S}^1_+.$$

Démonstration. On essaye de trouver un lien entre la projection de Bergman classique et celles à poids. On note C_α l'isométrie de $L^{2,\alpha}$ dans L^2 définie par

$$C_\alpha(f) = (1-|z|)^{\alpha/2} f$$

et P_α la projection de Bergman. On regarde l'image d'un monôme par $P_0 C_\alpha$:

$$\begin{aligned}
P_0 C_\alpha(w^n)(z) &= P_0((1-|w|^2)^{\alpha/2} w^n)(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{w^n (1-|w|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{w}z)^2} \, \mathrm{d}A(w) \\
&= \int_0^1 r^n (1-r^2)^{\alpha/2} \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi^n}{(1-r\bar{\xi}z)^2} \, \mathrm{d}\xi r \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r^n (1-r^2)^{\alpha/2} \int_{\mathbb{T}} \xi^n \sum_k (k+1) r^k \bar{\xi}^k z^k \, \mathrm{d}\xi r \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r^{2n} (1-r^2)^{\alpha/2} (n+1) z^n r \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r^n (1-r)^{\alpha/2} (n+1) z^n \, \mathrm{d}r \\
&= (n+1)\beta(n+1, \alpha/2+1) z^n
\end{aligned}$$

où β est la fonction Bêta. Ainsi, si l'on définit l'opérateur M_α de $\mathcal{A}^2$ dans $\mathcal{A}^{2,\alpha}$ par

$$M_\alpha(z^n) = [(n+1)\beta(n+1, \alpha/2+1)]^{-1} z^n$$

on a l'identité sur $\mathcal{A}^{2,\alpha}$:

$$M_\alpha P_0 C_\alpha = \mathrm{Id} = P_\alpha.$$

Cet opérateur M_α est borné. En effet:

$$\left(\sqrt{n+1} z^n\right)_n \quad \text{et} \quad \left(\left[\sqrt{\alpha+1}\sqrt{\beta(n+1, \alpha+1)}\right]^{-1} z^n\right)_n$$

sont des bases orthonormales respectivement de $\mathcal{A}^2$ et $\mathcal{A}^{2,\alpha}$ [1]. Ainsi

$$\begin{aligned} M_\alpha\big(\sqrt{n+1}z^n\big) &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{\beta(n+1,\alpha/2+1)}z^n \\ &= \frac{\sqrt{\alpha+1}\sqrt{\beta(n+1,\alpha+1)}}{\sqrt{n+1}\beta(n+1,\alpha/2+1)}\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}\sqrt{\beta(n+1,\alpha+1)}}z^n. \end{aligned}$$

De l'équivalent en l'infini, pour y positif fixé

$$\beta(x,y) \sim \Gamma(y)x^{-y}$$

on en déduit que

$$\frac{\sqrt{\alpha+1}\sqrt{\beta(n+1,\alpha+1)}}{\sqrt{n+1}\beta(n+1,\alpha/2+1)} \simeq \frac{(n+1)^{\alpha/2+1}}{(n+1)^{1/2}(n+1)^{\alpha/2+1/2}} \simeq 1$$

ce qui suffit pour conclure. L'opérateur M_α est même inversible et on le prolonge sur L^2 tout entier en envoyant une base orthonormale de $(\mathcal{A}^2)^\perp$ sur une base orthonormale de $(\mathcal{A}^{2,\alpha})^\perp$. Cela reste un opérateur borné et inversible.

On peut aussi montrer que notre opérateur $M_\alpha P_0 C_\alpha$ coïncide avec P_α sur $\widetilde{\mathcal{A}}^{2,\alpha}$ c'est-à-dire que $M_\alpha P_0 C_\alpha(\widetilde{\mathcal{A}}^{2,\alpha}) = 0$. Cependant $M_\alpha P_0 C_\alpha$ n'envoie a priori pas l'orthogonal de $\mathcal{A}^{2,\alpha}$ sur 0. Il faut donc introduire l'opérateur X sur $L^{2,\alpha}$ tel que

$$M_\alpha P_0 C_\alpha + X = P_\alpha.$$

Sur $L^{2,\alpha}$, on a

$$I - P_\alpha = I - M_\alpha P_0 C_\alpha - X = M_\alpha(I-P_0)C_\alpha + I - M_\alpha C_\alpha - X$$

et donc pour $f \in L^\infty$, où l'on note $M_{\overline{f}}$ l'opérateur de multiplication par $\overline{f}$ sur $L^{2,\alpha}$:

$$(I-P_\alpha)M_{\overline{f}} = M_\alpha(I-P_0)C_\alpha M_{\overline{f}} + (I - M_\alpha C_\alpha - X)M_{\overline{f}}.$$

En voyant $M_{\overline{f}}$ comme un opérateur sur L^2, on peut écrire

$$(I-P_\alpha)M_{\overline{f}} = M_\alpha(I-P_0)M_{\overline{f}}C_\alpha + (I - M_\alpha C_\alpha - X)M_{\overline{f}}$$

d'où

$$H^\alpha_{\overline{f}} = M_\alpha H_{\overline{f}} C_\alpha + (I - M_\alpha C_\alpha - X)M_{\overline{f}}. \tag{4.3}$$

Posons $f(z) = z + 2$, par l'égalité (1.2), on sait que $H^{\alpha}_{\overline{f}}$ et $H_{\overline{f}}$ sont dans l'idéal de Macaev et donc $(I - M_\alpha C_\alpha - X)M_{\overline{f}}$ l'est aussi. Comme $M_{\overline{f}}$ est inversible et borné, on en déduit que $(I - M_\alpha C_\alpha - X)$ est aussi dans l'idéal de Macaev. Or cet opérateur est indépendant de $\overline{f}$ donc si l'on revient à l'égalité pour $\overline{f}$ borné quelconque:

$$H^{\alpha}_{\overline{f}} = M_\alpha H_{\overline{f}} C_\alpha + (I - M_\alpha C_\alpha - X)M_{\overline{f}}$$

on voit que pour tout symbole borné f, puisque M_α est inversible borné, $H^{\alpha}_{\overline{f}}$ est dans l'idéal de Macaev si et seulement si $H_{\overline{f}}$ l'est . □

Remark 4.1. On aurait pu construire, au moins de façon théorique, une isométrie C_α envoyant $\mathcal{A}^{2,\alpha}$ sur $\mathcal{A}^2$ et de même pour leurs orthogonaux. Cependant, on n'aurait pu, à priori, le faire commuter avec $M_{\overline{f}}$.

Comme $\mathcal{D}^1_\alpha \subset H^\infty$, cela suffit pour affirmer que l'espace de Dixmier est l'espace H' pour tout $\alpha > -1$.

Passons à l'expression de la trace, pour cela, remarquons que l'égalité (4.3):

$$H^{\alpha}_{\overline{f}} = M_\alpha H_{\overline{f}} C_\alpha + (I - M_\alpha C_\alpha - X)M_{\overline{f}}.$$

est vraie pour une fonction f positive dans $C_c(\mathbb{D})$ ou pour g positive dans $C_0(\mathbb{D})$. Ici, $C_c(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions continues à support compact de $\mathbb{D}$ et $C_0(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{D}$ vérifiant $f(z) \to 0$ quand $|z| \to 1^-$. Enfin, notons

$$T = I - M_\alpha C_\alpha - X.$$

Lemme 4.4. *Si f est positive dans $C_c(\mathbb{D})$ alors $H^{\alpha}_{f} \in \mathcal{S}^1$.*

Démonstration. De l'égalité, où T_f est l'opérateur de Toeplitz:

$$H^*_f H_f = T_{|f|^2} - T_{\overline{f}} T_f$$

il suffit de montrer que pour toute fonction f positive à support compact, on a $T_f \in \mathcal{S}^{1/2}$.

Notons

$$\mathrm{d}\mu(w) = f(z)(1 - |w|^2)^\alpha \,\mathrm{d}A(w).$$

Comme le disque hyperbolique $D(z, r)$ est un disque euclidien de centre et rayon (p 59 de [21]):

$$C = \frac{1 - s^2}{1 - s^2|z|^2} z, \quad R = \frac{1 - |z|^2}{1 - s^2|z|^2} s, \quad s = \tanh(r)$$

la fonction

$$z \mapsto \mu(D(z,r)) = \int_{D(z,r)} \mathrm{d}\mu(w)$$

est à support compact et donc est dans $L^{1/2}(\mathbb{D}, \mathrm{d}\lambda)$. Par le théorème 3 de [18], $T_f \in \mathcal{S}^{1/2}$. $\square$

Ce dernier lemme et l'égalité (4.3) permet d'écrire pour f positive dans $C_c(\mathbb{D})$:

$$\mathrm{Tr}_\omega((I - M_\alpha C_\alpha - X)M_{\overline{f}}) = 0.$$

Un argument de densité entraîne que pour tout $g \in C_0(\mathbb{D})$

$$\mathrm{Tr}_\omega(TM_{\overline{g}}) = 0.$$

Mais $M_{\overline{g}}$ est inversible borné sur L^2, on a donc

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) = 0.$$

Or pour tout n entier:

$$s_n(H^\alpha_{\overline{f}}) \leqslant s_n(M_\alpha H_{\overline{f}} C_\alpha) + s_n(TM_f)$$

et donc pour f bornée:

$$\mathrm{Tr}_\omega(|H^\alpha_{\overline{f}}|) = \mathrm{Tr}_\omega(M_\alpha |H_{\overline{f}}| C_\alpha) \leqslant \|M_\alpha\| \, \mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{f}}|).$$

De la même façon:

$$\|M_\alpha^{-1}\| \, \mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{f}}|^\alpha) \geqslant \mathrm{Tr}_\omega(M_\alpha^{-1} |H^\alpha_{\overline{f}}| C_\alpha^{-1}) = \mathrm{Tr}_\omega(H_{\overline{f}}).$$

Comme M_α^{-1} est un opérateur diagonal on a $\|M_\alpha^{-1}\| = \|M_\alpha\|^{-1}$ et donc

$$\mathrm{Tr}_\omega(|H^\alpha_{\overline{f}}|) = \|M_\alpha\| \, \mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{f}}|).$$

Par l'égalité (1.2), on a $\|M_\alpha\| = \sqrt{\alpha + 1}$ et donc:

$$\mathrm{Tr}_\omega(|H^\alpha_{\overline{f}}|) = \sqrt{\alpha + 1} \, \mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{f}}|).$$

On conclut grâce à (1.3) et (1.4).

5. Généralisation

De façon plus générale, pour $k > 1$ un réel et $f \in \mathcal{A}^2$, on cherche à quelle condition un élément $f \in \mathcal{A}^2$ appartient aussi à $\mathcal{D}^k$. On peut montrer que l'espace de Besov $\mathcal{B}^p$ est l'ensemble des $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ vérifiant

$$(1 - |z|^2)^t R^t f(z) \in L^p(\mathrm{d}\lambda), \quad pt > 1 \tag{5.1}$$

où $R^t f$ est la dérivée fractionnaire de f (voir ci dessous). Avec la même approche que dans la section 3, on peut alors penser que $\mathcal{D}^k$ est l'ensemble des fonctions vérifiant:

$$\int_{\mathbb{T}} |R^{1/k} f|^k \, \mathrm{d}\theta < \infty.$$

Ce n'est pas le cas, la situation est ici différente du cas $k = 1$ puisqu'il existe des symboles non constants vérifiant

$$|H_{\overline{f}}|^k \in \mathcal{S}^1.$$

Soit t un réel positif et f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ avec

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

on définit (voir p 18 de [19])

$$R^t f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k^t a_k z^k$$

et

$$R^{0,t} f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+t)} \frac{\Gamma(2+t+k)}{\Gamma(2+k)} a_k z^k.$$

Pour t fixé, par Stirling, on a:

$$\frac{\Gamma(2+t+k)}{\Gamma(2+k)} \sim k^t. \tag{5.2}$$

Ceci n'entraine pas que $R^t f$ et $R^{0,t} f$ soient comparables mais elles ont même propriété d'intégrabilité.

Lemme 5.1. *Pour $f \in \mathcal{A}^2$, on a:*

$$f(z) = (t+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^t R^{0,t} f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} \, \mathrm{d}A(w).$$

Démonstration. Soit g la fonction définie par

$$g(z) = (t+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^t R^{0,t} f(w)}{(1-z\overline{w})^2}\,\mathrm{d}A(w).$$

Par le théorème 2.19 p 54 de [19], cette expression a bien un sens. Dérivons sous l'intégrale:

$$R^{0,t} g(z) = (t+1)\int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^t R^{0,t} f(w) R^{0,t}\Big(\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\Big)\,\mathrm{d}A(w).$$

Par la proposition 1.14 p 19 de [19]:

$$R^{0,t}\Big(\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\Big) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+t}}$$

et donc

$$R^{0,t} g(z) = (t+1)\int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^t R^{0,t} f(w)\frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+t}}\,\mathrm{d}A(w) = R^{0,t} f(z)$$

puisque $R^{0,t} f \in L^1((1-|z|^2)^t\,\mathrm{d}A)$, voir p 53 de [21].

Ainsi

$$R^{0,t} f = R^{0,t} g$$

et l'on a terminé. □

On peut alors comparer les deux normes de Besov (1.1) et (5.1):

Lemme 5.2. *Il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de k) vérifiant pour tout $t > 0$, $p > 1$ et tout $f \in \mathcal{A}^2$:*

$$\|(1-|z|^2) f'(z)\|_{L^{pk}(\mathrm{d}\lambda)} \leqslant C\|(1-|z|^2)^{1/k} R^{1/k} f(z)\|_{L^{pk}(\mathrm{d}\lambda)}$$

Démonstration. Le lemme précédent affirme que pour tout $t > 0$

$$f(z) = (t+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^t R^{0,t} f(w)}{(1-z\overline{w})^2}\,\mathrm{d}A(w)$$

ainsi en dérivant sous le signe intégral:

$$(1-|z|^2) f'(z) = (1-|z|^2)(t+1)\int_{\mathbb{D}} 2\overline{w}\frac{(1-|w|^2)^t R^{0,t} f(w)}{(1-z\overline{w})^3}\,\mathrm{d}A(w).$$

Comme $pk > k > 1$, par le lemme 5.3.2 p 90 de [21], il existe C dépendant uniquement de k telle que:

$$\|(1-|z|^2) f'(z)\|_{L^{pk}(\mathrm{d}\lambda)} \leqslant C\|(1-|z|^2)^t R^{0,t} f(z)\|_{L^{pk}(\mathrm{d}\lambda)}.$$

On conclut avec (5.2) et en posant $t = 1/k$. □

Nous pouvons à présent prouver l'inclusion annoncée

Proposition 5.3. *Soit $k > 1$, si $f \in \mathcal{A}^2$ vérifie*

$$\int_{\mathbb{T}} |R^{1/k} f|^k \, \mathrm{d}\theta < \infty \tag{5.3}$$

alors

$$|H_{\overline{f}}|^k \in \mathcal{S}_1^+$$

et

$$\mathrm{Tr}_\omega(|H_{\overline{f}}|^k) \lesssim \int_{\mathbb{T}} |R^{1/k} f|^k \, \mathrm{d}\theta.$$

Démonstration. Comme $k > 1$, on a uniformément en p:

$$\||H_{\overline{f}}|^k\|_{\mathcal{S}^p}^p = \||H_{\overline{f}}|^k\|_{\mathcal{S}^{pk}}^{pk} \simeq \|f\|_{\mathcal{B}^{pk}}^{pk}$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{B}^{pk}}^{pk} = \|(1-|z|^2) f'(z)\|_{L^{pk}(\mathrm{d}\lambda)}^{pk}.$$

Ainsi, par le lemme précédent, uniformément en $p > 1$:

$$\begin{aligned}
\||H_{\overline{f}}|^k\|_{\mathcal{S}^p}^p &\lesssim \|(1-|z|^2) f'(z)\|_{L^{pk}(\mathrm{d}\lambda)}^{pk} \\
&\lesssim \|(1-|z|^2)^{1/k} R^{1/k} f(z)\|_{L^{pk}(\mathrm{d}\lambda)}^{pk} \\
&= \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |R^{1/k} f(z)|^{pk} \, \mathrm{d}A(z)
\end{aligned}$$

et donc, par un raisonnement analogue à celui de la section 3:

$$\begin{aligned}
\||H_{\overline{f}}|^k\|_{\mathcal{S}_1^+} &= \sup_{p \in]1;2]} (p-1) \||H_{\overline{f}}|^k\|_{\mathcal{S}^p} \\
&\lesssim \sup_{p \in]1;2]} (p-1) \left(\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |R^{1/k} f(z)|^{pk} \, \mathrm{d}A(z) \right)^{1/k} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{T}} |R^{1/k} f|^k \, \mathrm{d}\theta \right)^{1/k}.
\end{aligned}$$

Pour la majoration de la trace, on reprend la méthode de la section 3, comme $k > 1$, la fonction $|R^{1/k} f|^k$ est sous harmonique et on a:

$$\int_{\mathbb{T}} |R^{1/k} f|^k \, \mathrm{d}\theta = \lim_{p \to 1} (p-1) \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |R^{1/k} f(z)|^{pk} \, \mathrm{d}A(z).$$

On conclut grâce à la proposition 2.10 □

Remark 5.1. En fait pour $k = 2$, (5.3) est une caractérisation de l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ et l'on retrouve l'inclusion classique $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^2$. Dans ce cas là, on peut montrer que l'inclusion est stricte mais cela fera l'objet de prochains travaux.

Remerciement. Je tiens à remercier le référé pour ses remarques ainsi que M. Engliš pour ses conseils.

References

[1] *J. Arazy, S. D. Fisher, J. Peetre*: Hankel operators on weighted Bergman spaces. Am. J. Math. *110* (1988), 989–1053.

[2] *J. Arazy, S. D. Fisher, J. Peetre*: Möbius invariant function spaces. J. Reine Angew. Math. *363* (1985), 110–145.

[3] *S. Axler*: The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators. Duke Math. J. *53* (1986), 315–332.

[4] *A. Connes*: Noncommutative Geometry. Academic Press, San Diego, 1994.

[5] *A. Connes, H. Moscovici*: The local index formula in noncommutative geometry. Geom. Funct. Anal. *5* (1995), 174–243.

[6] *M. Engliš, K. Guo, G. Zhang*: Toeplitz and Hankel operators and Dixmier traces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$. Proc. Am. Math. Soc. *137* (2009), 3669–3678.

[7] *M. Engliš, R. Rochberg*: The Dixmier trace of Hankel operators on the Bergman space. J. Funct. Anal. *257* (2009), 1445–1479.

[8] *I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn*: Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. Translations of Mathematical Monographs 18, American Mathematical Society, Providence, 1969.

[9] *S.-Y. Li, B. Russo*: Hankel operators in the Dixmier class. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. *325* (1997), 21–26.

[10] *D. H. Luecking*: Characterizations of certain classes of Hankel operators on the Bergman spaces of the unit disk. J. Funct. Anal. *110* (1992), 247–271.

[11] *R. Meise, D. Vogt*: Introduction to Functional Analysis. Oxford Graduate Texts in Mathematics 2, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[12] *M. Pavlović*: Introduction to Function Spaces on the Disk. Posebna Izdanja, Matematički Institut SANU, Belgrade, 2004.

[13] *V. Peller*: Hankel Operators and Their Applications. Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2003.

[14] *W. Rudin*: Real an Complex Analysis. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[15] *K. Seip, E. H. Youssfi*: Hankel operators on Fock spaces and related Bergman kernel estimates. J. Geom. Anal. *23* (2013), 170–201.

[16] *B. Simon*: Trace Ideals and Their Applications. London Mathematical Society Lecture Note Series 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[17] *R. Tytgat*: Dixmier class of Hankel operators. J. Oper. Theory *72* (2014), 241–256. (In French.)

[18] *K. Zhu*: Schatten class Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of the unit ball. New York J. Math. (electronic only) *13* (2007), 299–316.

[19] *K. Zhu*: Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. Graduate Texts in Mathematics 226, Springer, New York, 2005.

[20] *K. Zhu*: Analytic Besov spaces. J. Math. Anal. Appl. *157* (1991), 318–336.

[21] *K. Zhu*: Operator Theory in Function Spaces. Pure and Applied Mathematics 139, Marcel Dekker, New York, 1990.

Author's address: Romaric Tytgat, Centre de Mathématiques et Informatique (CMI), Aix-Marseille Université, Technopôle Château-Gombert, 39 Rue F. Joliot Curie, 134 53 Marseille Cedex 13, France, e-mail: `tytgat@cmi.univ-mrs.fr`.